Лекция 29

Периоды дифференциальных форм.— Сингулярные симплексы, цепи, циклы и границы.— Теорема Стокса для интегралов по цепям.— Группы сингулярных гомологий.— Теорема де Рама.— Группы когомологий цепного комплекса.— Группы сингулярных когомологий.

Применение теоремы Стокса к вычислению групп когомологий $H^m\mathscr{X}$ гладкого хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ (не обязательно без края) основывается на том, что для любой замкнутой дифференциальной формы $\omega\in\Omega^m\mathscr{X}$ и произвольного ориентированного замкнутого (т. е. компактного и без края) m-мерного подмногообразия $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$ интеграл

$$I_{\mathscr{Y}}[\omega]=\int_{\mathscr{Y}}\omega \tag{1}$$

зависит только от класса когомологий $[\omega]\in H^m\mathscr{X}$ этой формы (поскольку, если форма ω точна, то согласно формуле (4) лекции 27 этот интеграл равен нулю). Поэтому формула (1) корректно определяет некоторое (очевидно, линейное) отображение

$$I_{\mathscr{Y}}\colon\ H^m\mathscr{X}\longrightarrow\mathbb{R},\quad [\omega]\longmapsto I_{\mathscr{Y}}[\omega], \tag{2}$$

группы $H^m\mathscr{X}$ в $\mathbb{R}$ (т. е. линейный функционал на $H^m\mathscr{X}$).

Число $I_{\mathscr{Y}}[\omega]$ называется *периодом* формы ω (или класса когомологий $[\omega]$) по подмногообразию $\mathscr{Y}$.

Конечно, если для класса когомологий $[\omega]$ существует такое подмногообразие $\mathscr{Y}$, что $I_{\mathscr{Y}}[\omega]\neq 0$, то $[\omega]\neq 0$. Оказывается,— это очень трудная теорема!—что и обратно, *если* $[\omega]\neq 0$, *то существует такое подмногообразие* $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$, *что* $I_{\mathscr{Y}}[\omega]\neq 0$.

Трудность этой теоремы объясняется тем, что при конструировании по форме ω подмногообразия $\mathscr{Y}$ очень сложно обеспечить все требования, которым это подмногообразие должно удовлетворять (например, отсутствие самопересечений). Априори ясно, что доказательство облегчится, если эти требования ослабить, т. е., другими словами,— расширить класс подмногообразий $\mathscr{Y}$ (или, точнее, функционалов (2)).

Первое, что здесь приходит в голову, это заменить настоящие подмногообразия $\mathscr{Y}$ замкнутыми *сингулярными* *подмногообразиями*, т. е. гладкими отображениями вида $\gamma\colon \mathscr{D} \to \mathscr{X}$, где $\mathscr{D}$ — произвольное m-мерное ориентированное компактное многообразие без края. Другая идея состоит в том, чтобы рассматривать произвольные линейные комбинации функционалов (2). Объединение этих двух соображений приводит к функционалам вида

$$[\omega] \mapsto \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{\gamma_i} \omega, \quad [\omega] \in H^m\mathscr{X},$$

где γ_i — гладкие отображения вида $\mathscr{D}_i \to \mathscr{X}$, а a_i — произвольные вещественные числа (причем каждое из многообразий $\mathscr{D}_i$ замкнуто). Впрочем, по очевидным техническим причинам здесь удобно ввести в рассмотрение формальные линейные комбинации вида

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N} a_i\gamma_i \tag{3}$$

и по определению считать, что

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{\gamma_i} \omega.$$

Можно ожидать, что для класса когомологий $[\omega] \neq 0$ построить линейную комбинацию γ, для которой $\int_{\gamma} \omega \neq 0$, будет легче, чем найти подмногообразие $\mathscr{Y}$ с $\int_{\mathscr{Y}} \omega \neq 0$. (После того же, как такая комбинация γ найдена, можно — если надо — поставить вопрос и о поиске $\mathscr{Y}$.)

Это ожидание на самом деле оправдывается, но, к сожалению, не в той мере, как этого хотелось бы — задача все равно остается весьма трудной. Поэтому здесь нужна какая-то новая идея.

Такая идея была предложена почти восемьдесят лет тому назад великим французским математиком А. Пуанкаре, и именно с этого момента отсчитывается начало современной алгебраической топологии.

Пуанкаре предложил рассматривать линейные комбинации (3) сингулярных m-мерных многообразий $\gamma_i\colon \mathscr{D}_i \to \mathscr{X}$, для которых многообразия $\mathscr{D}_i$, по-прежнему предполагаемые компактными (для того, чтобы все интегралы существовали), могут иметь край. Для каждой такой линейной комбинации γ ее *граница* $\partial\gamma$ определяется формулой

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^{N} a_i \partial\gamma_i,$$

где, напомним, $\partial\gamma_i = \gamma_i|_{\partial\mathcal{D}_i}$. (Конечно, если все многообразия $\mathcal{D}_i$ замкнуты, то $\partial\gamma = 0$, но равенство $\partial\gamma = 0$ может иметь место и тогда, когда многообразия $\mathcal{D}_i$ имеют край.) Ясно — по линейности — что *формула Стокса остается справедливой и в этом случае*, т. е. для любой формы ω степени $m-1$ на многообразии $\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\int_{\gamma} d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega. \tag{4}$$

Поэтому, если $\partial\gamma = 0$, то формула

$$I_\gamma[\omega] = \int_{\gamma} \omega, \quad [\omega] \in H^m\mathcal{X},$$

корректно определяет некоторый линейный функционал

$$I_\gamma\colon H^m\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R},$$

и теорема состоит в том, что для любого отличного от нуля класса когомологий $[\omega]$ существует такая линейная комбинация (3) (с $\partial\gamma = 0$), что $I_\gamma[\omega] \neq 0$.

Оказывается, что в этой формулировке теорема доказывается уже сравнительно просто. Причина этого состоит в том, что соответствующие сингулярные многообразия $\gamma_i\colon \mathcal{D}_i \dashrightarrow \mathcal{X}$ удается найти в классе очень простых многообразий, для которых многообразия $\mathcal{D}_i$ диффеоморфны шару. [На интуитивном уровне это вполне объяснимо: каждое многообразие $\mathcal{D}_i$ мы можем разрезать на элементарные части, диффеоморфные шару и интеграл от произвольной формы по $\mathcal{D}_i$ равен сумме интегралов по этим частям.] Но если это так, то мы можем сделать следующий шаг, также предложенный Пуанкаре, и с самого начала рассматривать лишь сингулярные многообразия $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{X}$, для которых многообразие $\mathcal{D}$ является шаром. Соответствующие построения нуждаются лишь в интегрировании по шарам, и потому их можно провести заново на элементарном уровне независимо от общей теории интегрирования по многообразиям.

При этом удобно вместо шаров рассматривать кубы или симплексы (ни куб, ни симплекс не являются, конечно, многообразиями с краем, но точки, в которых имеются изломы, составляют нуль-множество и потому на интегралы не влияют). Мы — в основном по традиции — выберем симплексы (хотя, конечно, сведение кратных интегралов к повторным для кубов осуществляется проще).

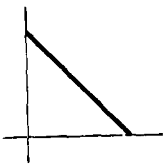
Определение 1. *Стандартным m-мерным симплексом* Δ^m называется подмножество пространства $\mathbb{R}^{m+1}$, состоящее из точек $\boldsymbol{t}=(t_0, t_1, \ldots, t_m)$, для которых

$$0 \leqslant t_0 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 \leqslant t_m \leqslant 1$$

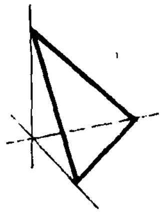
и

$$t_0+t_1+\ldots+t_m=1.$$

[Это — евклидов симплекс в смысле лекции 21 с вершинами в концевых точках ортов $e_0, e_1, \ldots, e_m$ стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^{m+1}$.]



Стандартный симплекс Δ^1



Стандартный симплекс Δ^2

При $0 \leqslant i \leqslant m$ (и $m>0$) определено отображение

$$\delta_i\colon \Delta^{m-1} \to \Delta^m,$$

$$(t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}) \mapsto (t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{m-1}),$$

образ которого (называемый обычно *i-й гранью* симплекса Δ^m) состоит из всех точек $\boldsymbol{t} \in \Delta^m$, для которых $t_i=0$.

Каждая точка симплекса Δ^m однозначно определяется ее координатами $t_1, \ldots, t_m$, что позволяет отождествить этот симплекс с подмножеством пространства $\mathbb{R}^m$, состоящим из таких точек $\boldsymbol{t}=(t_1, \ldots, t_m)$, что

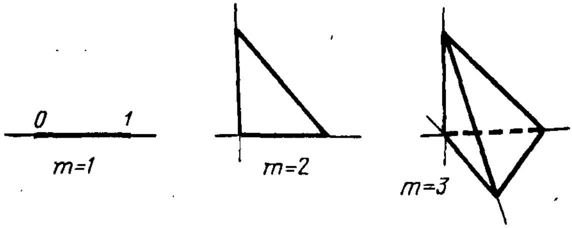
$$0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 \leqslant t_m \leqslant 1$$

и

$$0 \leqslant t_1+\ldots+t_m \leqslant 1$$

(т. е. с симплексом пространства $\mathbb{R}^m$ с вершинами в точках $\mathbf{0}, e_1, \ldots, e_m$).

Отображение $K \to \mathscr{X}$ произвольного множества $K \subset \mathbb{R}^m$ в гладкое многообразие $\mathscr{X}$ называется *гладким*, если оно является ограничением на K некоторого гладкого отображения $U \to \mathscr{X}$, где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, содержащее множество K.



Стандартные симплексы, спроектированные в $\mathbb{R}^m$

В частности, мы можем говорить о гладких отображениях $\Delta^m \to \mathscr{X}$ симплекса Δ^m в $\mathscr{X}$.

Определение 2. *Сингулярным m-мерным симплексом* гладкого многообразия $\mathscr{X}$ называется произвольное гладкое отображение $\sigma\colon \Delta^m \to \mathscr{X}$. Его *$i$-й гранью* $\partial_i\sigma$, $0 \leqslant i \leqslant m$, называется (очевидно, также гладкое) отображение

$$\sigma \circ \delta_i\colon \Delta^{m-1} \to \mathscr{X}.$$

Множество всех сингулярных m-мерных симплексов многообразия $\mathscr{X}$ мы будем обозначать символом $S_m\mathscr{X}$.

Пусть G — произвольная абелева группа (в аддитивной записи).

Определение 3. *Сингулярной m-мерной цепью многообразия $\mathscr{X}$ над группой G* (или *с коэффициентами в* G) называется произвольная конечная формальная линейная комбинация

$$\gamma = \sum_{\sigma \in S^m\mathscr{X}} a_\sigma \sigma, \quad a_\sigma \in G, \tag{5}$$

сингулярных симплексов $\sigma \in S^m\mathscr{X}$ с коэффициентами из группы G. (Конечность суммы (5) означает, что только конечное число коэффициентов a_σ отлично от нуля.) Все такие цепи образуют группу по сложению, которую мы будем обозначать символом $C_m(\mathscr{X}; G)$. При $G = \mathbb{Z}$ — это не что иное, как свободная абелева группа, порожденная множеством $S_m\mathscr{X}$, а при $G = \mathbb{R}$ — линейное пространство с базисом $S_m\mathscr{X}$.

Мы будем рассматривать также б е с к о н е ч н ы е линейные комбинации (5), обладающие тем свойством (называемым *свойством локальной конечности* ср. определение 1 лекции 22), что для любой точки $p \in \mathscr{X}$ — а потому и для любого компактного множества $C \subset \mathscr{X}$ — существует такая ее (его) окрестность U, что множество сингулярных симплексов $\sigma \in S_m\mathscr{X}$, для которых одновременно $a_\sigma \neq 0$ и $\sigma(\Delta^m) \cap U \neq \varnothing$, конечно. Такие линейные комбинации мы будем называть *бесконечными цепями*. Они образуют группу $C_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X}; G)$, содержащую группу $C_m(\mathscr{X}; G)$ в качестве подгруппы.

Ясно, что *равенство* $C_m(\mathscr{X}; G) = C_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X}; G)$ *имеет место тогда и только тогда, когда многообразие* $\mathscr{X}$ *компактно.*

Для каждого $m \geqslant 1$ мы определим гомоморфные отображения

$$\partial\colon C_m(\mathscr{X}; G) \to C_{m-1}(\mathscr{X}; G)$$

и

$$\partial\colon C_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X}; G) \to C_{m-1}^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X}; G),$$

полагая для любой конечной (или соответственно бесконечной) цепи (5)

$$\partial\gamma = \sum_{\sigma \in S_m\mathscr{X}} a_\sigma \,\partial\sigma, \tag{6}$$

где

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \partial_i\sigma,$$

т. е. — формулой

$$\partial\gamma = \sum_{\tau \in S_{m-1}\mathscr{X}} \left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{\sigma \in S_m\mathscr{X}, \\ \partial_i\sigma = \tau}} (-1)^i a_\sigma \right) \tau,$$

где внутренняя сумма распространена на все симплексы $\sigma \in S_m\mathscr{X}$, для которых $\partial_i\sigma = \tau$ (множество таких симплексов с $a_\sigma \neq 0$ конечно — даже если цепь γ бесконечна, — и потому эта сумма имеет смысл).

Определение 4. Цепь $\partial\gamma$ называется *границей* цепи γ. Цепи, для которых $\partial\gamma = 0$, называются *циклами*.

Для любой дифференциальной формы ω степени m на многообразии $\mathscr{X}$ и любого сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^m \to \mathscr{X}$ определена на Δ^m (а точнее — на некотором открытом множестве $U \supset \Delta^m$) форма $\sigma^*\omega$. В координатах $t_1, \ldots, t_m$ эта форма имеет вид

$$\sigma^*\omega = w\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m,$$

где $w=w(t)$ — некоторая гладкая функция. По определению мы положим

$$\int\limits_{\sigma}\omega=\int\limits_{\Delta^m}\!\!\ldots\!\int w(t)\,dt. \tag{7}$$

Иными словами,

$$\int\limits_{\sigma}\omega=\int\limits_{0}^{1}dt_1\int\limits_{0}^{s_1}dt_2\ldots\int\limits_{0}^{s_m}w(t)\,dt_m, \tag{8}$$

где $s_1=1-t_1,\ \ldots,\ s_m=1-t_1-\ldots-t_m$.

Интеграл от ω по произвольной m-мерной цепи γ с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$ мы определим по аддитивности: если $\gamma=\sum a_\sigma\sigma$, то

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\sum_{\sigma\in S_m|\mathscr{X}}a_\sigma\int\limits_{\sigma}\omega. \tag{9}$$

При этом если цепь γ бесконечна, то для того, чтобы сумма (9) имела смысл (была конечна), мы потребуем, чтобы форма ω была финитна.

Теорема 1 (теорема Стокса для интегралов по цепям). *Для любой m-мерной сингулярной цепи γ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$ и любой (финитной, если цепь γ бесконечна) дифференциальной формы ω степени $m-1$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{\gamma}d\omega=\int\limits_{\partial\gamma}\omega. \tag{10}$$

[Конечно, это равенство является частным случаем общего равенства (4), но мы дадим здесь его прямое доказательство, опирающееся лишь на формулы (6), (7) и (9).]

Доказательство. Из формул (6) и (9) непосредственно следует, что равенство (10) достаточно доказать лишь в случае, когда цепь γ является симплексом σ. При этом без ограничения общности можно считать, что форма $\sigma^*\omega$ имеет вид

$$\sigma^*\omega=w\,dt_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dt_k}\wedge\ldots\wedge dt_m,$$

где $0\leqslant k\leqslant m$ (а знак $\widehat{\ }$, как всегда указывает, что соответствующий множитель должен быть опущен), и, значит, что форма $\sigma^*(d\omega)=d(\sigma^*\omega)$ имеет вид

$$\sigma^*(d\omega)=(-1)^{k-1}\frac{\partial w}{\partial t_k}dt_1\wedge\ldots\wedge dt_m.$$

Тогда

$$\int\limits_{\sigma} d\omega = \int\limits_{\Delta^m}\!\!\dots\!\!\int (-1)^{k-1} \frac{\partial w}{\partial t_k}\, d\boldsymbol{t} =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{\Delta^{m-1}_{(k)}}\!\!\dots\!\!\int \left(\int\limits_0^{1-t} \frac{\partial w}{\partial t_k}\, dt_k \right) d\boldsymbol{t}_{(k)},$$

где $t = t_1 + \dots + \hat{t}_k + \dots + t_m$, $d\boldsymbol{t}_{(k)} = dt_1 \dots \widehat{dt}_k \dots dt_m$, а $\Delta^{m-1}_{(k)}$ — симплекс Δ^{m-1} в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$ с координатами $t_1, \dots, \hat{t}_k, \dots, t_m$. Поскольку

$$\int\limits_0^{1-t} \frac{\partial w}{\partial t_k}\, dt_k = w \Big|_{t_k=0}^{t_k=1-t} = w\Big|_{t_k=1-t} - w\Big|_{t_k=0},$$

где $w|_{t_k=r}$ — ограничение функции w на гиперплоскости $t_k = r$ (рассматриваемое как функция от $t_1, \dots, \hat{t}_k, \dots, t_m$), этим доказано, что

$$\text{(11)} \qquad \int\limits_{\sigma} d\omega = (-1)^{k-1} \int\limits_{\Delta^{m-1}_{(k)}}\!\!\dots\!\!\int \left(w\Big|_{t_k=1-t} - w\Big|_{t_k=0}\right) d\boldsymbol{t}_{(k)}.$$

С другой стороны, так как $t_i \circ \delta_i = 0$ (и, значит, $\delta_i^*(dt_i) = 0$), то $(\partial_i\sigma)^*\omega = \delta_i^*(\sigma^*\omega) = 0$ при $i \neq 0, k$, и потому

$$\int\limits_{\partial\sigma} \omega = \int\limits_{\partial_0\sigma} \omega + (-1)^k \int\limits_{\partial_k\sigma} \omega.$$

В то же время, так как

$$t_i \circ \delta_k = \begin{cases} t_i, & \text{если } i < k, \\ 0, & \text{если } i = k \\ t_{i-1}, & \text{если } i > k, \end{cases}$$

где слева $t_1, \dots, t_m$ — координаты в $\mathbb{R}^m$, а справа $t_1, \dots$ $\dots, t_{m-1}$ — координаты в $\mathbb{R}^{m-1}$), то

$$(\partial_k\sigma)^*\omega = \delta_k^*(\sigma^*\omega) = (w \circ \delta_k)\, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{m-1},$$

где

$$(w \circ \delta_k)(t_1, \dots, t_{m-1}) = w(t_1, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{m-1}),$$

и, значит,

$$\int\limits_{\partial_k\sigma} \omega = \int\limits_{\Delta^{m-1}}\!\!\dots\!\!\int w(t_1, \dots, t_{k-1}, 0, \dots, t_k, \dots, t_{m-1})\, dt_1 \dots dt_{m-1}.$$

Обозначив переменные $t_k, \ldots, t_{m-1}$ через $t_{k+1}, \ldots, t_m$, мы можем переписать этот интеграл в следующем виде:

$$\int\limits_{\partial_k \sigma} \omega = \int \ldots \int\limits_{\Delta^m_{(k)}} \left(w \Big|_{t_k=0} \right) dt_{(k)}.$$

Аналогично, так как $t_i \circ \sigma_0 = t_{i-1}$, $i = 1, \ldots, m$, где $t_0 = 1 - t_1 - \ldots - t_{m-1}$, то

$$\int\limits_{\partial_0 \sigma} \omega = \int \ldots \int\limits_{\Delta^{m-1}} w(1 - t_1 - \ldots - t_{m-1}, t_1, \ldots, t_{m-1})\, dt_1 \ldots dt_{m-1}.$$

Сделав замену переменных

$$\begin{array}{ll} t'_1 = 1 - t_1 - \ldots - t_{m-1}, & t_1 = t'_2, \\ t'_2 = t_1, & t_2 = t'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ t'_{k-1} = t_{k-2}, & t_{k-2} = t'_{k-1}, \\ t'_{k+1} = t_k, & t_{k-1} = 1 - t'_1 - \ldots - \hat{t}'_k - \ldots - t'_m, \\ t'_{k+2} = t_{k+1}, & t_k = t'_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t'_m = t_{m-1}, & t_{m-1} = t'_m \end{array}$$

(якобиан которой равен $(-1)^{k-1}$) и убрав штрихи, мы получим, что

$$\int\limits_{\partial_0 \sigma} \omega = (-1)^{k-1} \int \ldots \int\limits_{\Delta^{m-1}_{(k)}} \left(w \Big|_{t_k = 1-t} \right) dt_{(k)}.$$

Поэтому

$$(12) \qquad \int\limits_{\partial \sigma} \omega = (-1)^{k-1} \int \ldots \int\limits_{\Delta^{m-1}_{(k)}} \left(w \Big|_{t_k = 1-t} - w \Big|_{t_k=0} \right) dt_{(k)}.$$

Сравнение формул (11) и (12) доказывает теорему. □

Из теоремы 1 следует, что для любого цикла γ интеграл

$$I_\gamma \omega = \int\limits_\gamma \omega$$

по γ от замкнутой формы ω зависит только от класса когомологий $[\omega] \in H^m \mathscr{X}$ этой формы, т. е. формула

$$(13) \qquad I_\gamma [\omega] = \int\limits_\gamma \omega$$

корректно определяет некоторый гомоморфизм (линейный функционал)

(14) $$I_\gamma\colon H^m\mathscr{X} \to \mathbb{R}.$$

Аналогичным образом для любого бесконечного цикла γ та же формула (14), но с финитной формой ω корректно определяет линейный функционал

(15) $$I_\gamma\colon H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{X} \to \mathbb{R}.$$

В обоих случаях число $I_\gamma[\omega]$ называется *периодом* формы ω (или класса когомологий $[\omega]$) по циклу γ.

Изучим теперь зависимость функционала I_γ от цикла γ. Для этого нам предварительно нужно развить соответствующий алгебраический аппарат.

Лемма 1. *Если* $0 \leqslant i < j \leqslant m$, *то*

(16) $$\partial_i \partial_j \sigma = \partial_{j-1} \partial_i \sigma$$

для любого m*-мерного сингулярного симплекса* σ *многообразия* $\mathscr{X}$.

Доказательство. Так как $\partial_i\partial_j\sigma = \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i$ и $\partial_{j-1}\partial_i\sigma = \sigma \circ \delta_i \circ \delta_{j-1}$, то достаточно доказать, что

$$\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant m.$$

Но по определению действие отображения δ_i состоит в том, что в вектор $\boldsymbol{t} = (t_0, \ldots, t_m)$ на i-е место вставляется нуль. Так как после этой вставки номер $j > i$ будет иметь место, имевшее номер $j-1$, то отображение $\delta_i \circ \delta_{j-1}$ вставляет нуль на i-е и j-е места. С другой стороны, после применения отображения δ_j все места с номерами, меньшими j, сохранят свой номер, и поэтому отображение $\delta_j \circ \delta_i$, будет также вставлять нуль на i-е и j-е места. Поэтому $\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}$. □

Предложение 1. *Для любой* m*-мерной* ($m \geqslant 2$) *цепи* γ *многообразия* $\mathscr{X}$ *над произвольной группой* G *имеет место равенство*

(17) $$\partial\partial\gamma = 0.$$

Доказательство. (Ср. с доказательством предложения 1 лекции 21.) Равенство (17), очевидно, достаточно доказать для случая, когда цепь γ является сингулярным симплексом $\sigma \in S_m\mathscr{X}$. Но для любого симплекса σ цепь $\partial\partial\sigma$ является, очевидно, суммой цепей вида $(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j\sigma$, где $0 \leqslant i \leqslant m-1$ и $0 \leqslant j \leqslant m$. С другой стороны, согласно лемме 1, если $i<j$, то $\partial_i\partial_j\sigma=\partial_{j-1}\partial_i\sigma$. Поэтому для любой пары (i, j) с $i<j$ в цепи $\partial\partial\gamma$ будут два равных слагаемых — одно со знаком $(-1)^{i+j}$, а другое с противоположным знаком $(-1)^{(j-1)+i}$. Поэтому все слагаемые цепи $\partial\partial\sigma$ попарно сокращаются. □

Предложение 1 означает, что для любого $m\geqslant 1$ *группа границ* $B_m(\mathscr{X};\ G)$ (образ гомоморфизма ∂: $C_{m+1}(\mathscr{X};\ G)\to C_m(\mathscr{X};\ G)$), содержится в *группе циклов* $Z_m(\mathscr{X};\ G)$ (ядре гомоморфизма ∂: $C_m(\mathscr{X};\ G)\to C_{m-1}(\mathscr{X};\ G)$), и, аналогично, *группа бесконечных границ* $B_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)$ (образ гомоморфизма ∂: $C_{m+1}^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)\to C_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)$) содержится *в группе бесконечных циклов* $Z_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)$ (ядре гомоморфизма ∂: $C_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)\to C_{m-1}^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)$). Поэтому определены факторгруппы

$$H_m(\mathscr{X};\ G)=Z_m(\mathscr{X};\ G)/B_m(\mathscr{X};\ G)$$

и

$$H_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)=Z_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G)/B_m^{\mathrm{inf}}(\mathscr{X};\ G),$$

называемые *m-мерной* (или *m-й*) *группой сингулярных гомологий* (соответственно *сингулярных бесконечных гомологий*) *многообразия $\mathscr{X}$ с коэффициентами в группе G* (или *над группой G*).

Замечание 1. Группы гомологий называются также группами гомологий *с компактными носителями*, а группы бесконечных гомологий — группами гомологий *с произвольными носителями*.

Замечание 2. Все построение дословно переносится на любые топологические пространства $\mathscr{X}$ (нужно лишь в определении сингулярного симплекса вместо гладкости требовать только непрерывность). Для гладкого многообразия, тем самым, наряду с определенными выше группами гомологий (как говорят, основанных на гладких сингулярных симплексах) возникают также *топологические группы гомологий* (основанные на любых непрерывных сингулярных симплексах). Однако можно показать — посредством идейно простого, но несколько громоздкого построения, — что *естественное отображение вторых групп в первые являтся изоморфизмом.*

Элементы групп гомологий (смежные классы групп циклов по группам границ) называются *классами гомологий*, а два цикла, принадлежащие одному и тому же классу гомологий (т. е. отличающиеся на границу), называются *гомологичными*. Соответственно этому ицы называются также циклами, *гомологичными нулю*.

Пусть теперь группа G снова является полем $\mathbb{R}$.

Как мы знаем, для цикла γ и замкнутой формы ω интеграл

$$\int_\gamma \omega$$

зависит лишь от класса когомологий $x=[\omega]$ формы ω. Из теоремы 1 теперь следует, что этот интеграл зависит лишь и от класса ξ гомологий цикла γ (ибо

$$\int_{\partial\beta} \omega = \int_\beta d\omega = 0$$

для любой цепи β). Поэтому формула

$$\langle \xi, x\rangle = \int_\gamma \omega \tag{18}$$

корректно определяет некоторое спаривание (см. лекцию II.4) между линейными пространствами $H_m(\mathscr{X};\ \mathbb{R})$ и $H^m\mathscr{X}$ (а также между линейными пространствами $H_m^{\mathrm{Inf}}(\mathscr{X};\ \mathbb{R})$ и $H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{X}$).

Напомним (см. там же), что спаривание между линейными пространствами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ называется *невырожденным*, если для любого отличного от нуля вектора $\xi\in\mathscr{V}$ существует такой (автоматически отличный от нуля) вектор $x\in\mathscr{W}$, что $\langle \xi, x\rangle \neq 0$, и наоборот.

Теорема 2. *Для любого ориентированного паракомпактного и хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ оба спаривания* (18) (*между $H_m(\mathscr{X};\ \mathbb{R})$ и $H^m\mathscr{X}$ и между $H_m^{\mathrm{Inf}}(\mathscr{X};\ \mathbb{R})$ и $H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{X}$*) *невырождены.*

Обсудим эту теорему подробнее. (Доказывать ее мы не будем.)

Для каждого спаривания между линейными пространствами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ (над некоторым полем $\mathbb{K}$) и любого вектора $\xi\in\mathscr{V}$ формула

$$l_\xi x = \langle \xi, x\rangle, \qquad x\in\mathscr{W},$$

определяет на $\mathscr{W}$ линейный функционал $l_\xi\colon \mathscr{W}\to\mathbb{K}$, т. е. вектор сопряженного пространства $\mathscr{W}'=\operatorname{Hom}(\mathscr{W}, \mathbb{K})$. Невырожденность спаривания по x означает, что для любого отличного от нуля элемента $x\in\mathscr{W}$ существует такой элемент $\xi\in\mathscr{V}$, что $l_\xi x\neq 0$.

Аналогично, для любого элемента $x \in \mathscr{W}$ формула $l_x \xi = \langle \xi, x \rangle$ определяет функционал $l_x: \mathscr{V} \to \mathbb{K}$, и невырожденность спаривания по ξ означает, что для любого отличного от нуля элемента $\xi \in \mathscr{W}$ существует такой элемент $x \in \mathscr{V}$, что $l_x \xi \neq 0$.

Для спаривания (18) функционал l_ξ — это в точности функционал l_γ (где γ — такой цикл, что $\xi = [\gamma]$). Таким образом, теорема 2 утверждает, что для любой не когомологичной нулю замкнутой формы ω существует такой цикл γ (заведомо не гомологичный нулю), что $l_\gamma \omega \neq 0$. Это в точности утверждение, с обсуждения которого мы начали эту лекцию.

Но теорема 2 утверждает также, что и, наоборот, для любого, не гомологичного нулю цикла γ, существует такая (заведомо не когомологичная нулю) замкнутая форма ω, что $l_\omega \gamma \neq 0$ (и, значит, $l_\gamma \omega \neq 0$).

Кроме того, теорема 2 утверждает, что аналогичные утверждения справедливы по отношению к финитным формам и бесконечным цепям. [П р е д у п р е ж д е н и е. Эти две части теоремы — вопреки тому, что можно было бы подумать — непосредственно не сводятся друг к другу, потому что финитная форма, финитно некогомологичная нулю, тем не менее может быть когомологична нулю и, аналогично, не гомологичная нулю конечная цепь может быть границей бесконечной цепи.]

Соответствия $\xi \mapsto l_\xi$ и $x \mapsto l_x$ определяют, очевидно, некоторые гомоморфизмы

(19) $$\mathscr{V} \to \mathscr{W}' \quad \text{и} \quad \mathscr{W} \to \mathscr{V}'$$

линейных пространств $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ в сопряженные пространства $\mathscr{W}'$ и $\mathscr{V}'$. При этом невырожденность спаривания равносильна тому, что *оба гомоморфизма* (19) *являются мономорфизмами.*

Для конечномерных пространств $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ мы знаем (предложение 4 лекции II.4), что для невырожденного спаривания отображения (19) являются даже изоморфизмами. Для бесконечномерных пространств это, вообще говоря, не так, и, более того, может случиться, что одно из этих отображений изоморфно, а другое нет.

П р и м е р 1. Пусть S — бесконечное множество, $\mathscr{V}$ — линейное пространство всех формальных конечных сумм $\xi = \sum a_\sigma \sigma$, где $\sigma \in S$, $a_\sigma \in \mathbb{K}$, а $\mathscr{W}$ — линейное пространство всех функций $\boldsymbol{x}$: $S \to \mathbb{K}$. Тогда формула

$$\langle \xi, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{\sigma \in S} a_\sigma \boldsymbol{x}(\sigma)$$

корректно определяет (очевидно, невырожденное) спаривание между $\mathscr{V}^\circ$ и $\mathscr{W}$. Для этого спаривания каждый функционал

$$l_\xi(\boldsymbol{x}) = \sum_{\sigma \in S} a_\sigma \boldsymbol{x}(\sigma)$$

обладает тем свойством, что $l_\xi \boldsymbol{x} \neq 0$ только для элементов $\boldsymbol{x} \in \mathscr{W}$, принадлежащих некоторому конечномерному подпространству пространства $\mathscr{W}$ (состоящему из функций $\boldsymbol{x}$, отличных от нуля только на тех элементах $\sigma \in S$, для которых $a_\sigma \neq 0$). Следовательно, отображение $\xi \mapsto l_\xi$ пространства $\mathscr{V}^\circ$ в пространство $\mathscr{W}'$ заведомо не эпиморфно. Напротив, так как любой функционал φ: $\mathscr{V}^\circ \to \mathbb{K}$ может быть представлен в виде $l_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x} \in \mathscr{W}$ (достаточно положить $\boldsymbol{x}(\sigma) = \varphi(\sigma)$ для любого $\sigma \in S$), то отображение $\boldsymbol{x} \mapsto l_{\boldsymbol{x}}$ пространства $\mathscr{W}$ в пространство $\mathscr{V}^{\circ\prime}$ является изоморфизмом.

Поэтому следующая теорема является уточнением теоремы 2:

Теорема 3. *Для любого паракомпактного хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ гомоморфизмы*

$$H^m\mathscr{X} \to H_m(\mathscr{X}; \mathbb{R})', \quad \boldsymbol{x} \mapsto l_{\boldsymbol{x}}, \tag{20}$$

и

$$H_m^{\inf}(\mathscr{X}; \mathbb{R}) \to (H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{X})', \quad \xi \mapsto l_\xi, \tag{21}$$

где $l_{\boldsymbol{x}}$ и l_ξ — функционалы $H_m(\mathscr{X}; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ и $H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{X} \to \mathbb{R}$, определенные соответственно формулами

$$l_{\boldsymbol{x}}\xi = \int_\gamma \omega, \quad \boldsymbol{x} = [\omega], \quad \xi = [\gamma],$$

и

$$l_\xi \boldsymbol{x} = \int_\gamma \omega, \quad \boldsymbol{x} = [\omega]_{\mathrm{fin}}, \quad \xi = [\gamma]^{\inf}$$

являются изоморфизмами.

[Напротив, «двойственные» отображения

$$H_m(\mathscr{X}; \mathbb{R}) \to (H^m\mathscr{X})' \quad \text{и} \quad H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{X} \to H_m^{\inf}(\mathscr{X}; \mathbb{R})'$$

изоморфизмами, вообще говоря, не являются.]

Теорема 3 (вместе с теоремой 2) известна как **теорема де Рама** (который ее впервые доказал для компактных многообразий).

Изоморфизм (20) сводит вычисление группы $H^m\mathscr{X}$ к вычислению групп $H_m(\mathscr{X};\ \mathbb{R})'$, для чего в алгебраической топологии разработаны — в принципе достаточно эффективные — специальные методы.

Построение групп гомологий $H_m(\mathscr{X};\ G)$ и $H_m^{\inf}(\mathscr{X};\ G)$ распадается на два этапа — построение групп цепей $C_m(\mathscr{X};\ G)$ и $C_m^{\inf}(\mathscr{X};\ G)$ вместе с гомоморфизмами ∂ (первый этап) и построение по этим группам самих групп гомологий (второй этап). Целесообразно, как и в аналогичной ситуации с группами когомологий, отдельно выделить второй этап.

Определение 5. Семейство

$$C_{\bullet}:\qquad C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \longleftarrow \ldots \longleftarrow C_{m-1} \xleftarrow{\partial} C_m \longleftarrow \ldots$$

групп и гомоморфизмов называется *цепным комплексом*, если

$$\partial\partial\gamma = 0$$

для любого элемента $\gamma \in C_m$, $m \geqslant 1$. Элементы группы C_m называются *m-мерными цепями*; гомоморфизм ∂ называется *граничным оператором*; цепи γ, для которых $\partial\gamma = 0$, т. е. принадлежащие ядру

$$Z_m C_{\bullet} = \operatorname{Ker}(\partial\colon\ C_m \longrightarrow C_{m-1})$$

гомоморфизма $\partial\colon\ C_m \longrightarrow C_{m-1}$, называются *циклами* (при $m = 0$ условно считается, что $Z_m C_{\bullet} = C_0$); цепи вида $\partial\gamma$, т. е. принадлежащие образу

$$B_m C_{\bullet} = \operatorname{Im}(\partial\colon\ C_{m+1} \longrightarrow C_m)$$

гомоморфизма $\partial\colon\ C_{m+1} \longrightarrow C_m$, называются *границами* (или циклами *гомологичными нулю*); факторгруппа

$$H_m C_{\bullet} = Z_m(C_{\bullet})/B_m(C_{\bullet})$$

называется *m-мерной* (или *m-й*) *группой гомологий* комплекса $C_{\bullet}$; ее элементы называются *m-мерными классами гомологий*, и циклы, принадлежащие одному классу гомологий, т. е. отличающиеся на границу, называются *гомологичными.*

Таким образом, группы $H_m(\mathscr{X};\ G)$ являются группами гомологий $H_m C_{\bullet}(\mathscr{X};\ G)$ комплекса

$$C_{\bullet}(\mathscr{X};\ G) = \{C_m(\mathscr{X};\ G);\ \partial\},$$

а группы $H_m^{\inf}(\mathscr{X}; G)$ — группами гомологий комплекса

$$C_\bullet^{\inf}(\mathscr{X}; G) = \{C_m^{\inf}(\mathscr{X}; G);\ \partial\}.$$

В случае, когда цепной комплекс $C_\bullet = \{C_m; \partial\}$ состоит из линейных пространств над полем $\mathbb{K}$, мы для любого $m \geqslant 0$ можем построить сопряженное линейное пространство

$$C^m = (C_m)' = \operatorname{Hom}(C_m;\ \mathbb{K}).$$

В современной математике принято переход к двойственной (сопряженной) ситуации отмечать приставкой «ко» (пример: векторы и ковекторы). В соответствии с этим элементы пространства C^m называются *m-мерными коцепями* цепного комплекса $C_\bullet$.

Для любой коцепи $c \in C^m$ формула

$$(\delta c)(\gamma) = c(\partial\gamma), \qquad \gamma \in C_{m+1},$$

определяет некоторую коцепь δc, а так как

$$(\delta\delta c)(\gamma) = c(\partial\partial\gamma) = 0$$

для любой цепи $\gamma \in C_{m+2}$, то

$$\delta\delta c = 0$$

для любой коцепи $c \in C^m$. По определению (см. определение 1 лекции 20) это означает, что *семейство $C^\bullet = \{C^m; \partial\}$ групп и гомоморфизмов является коцепным комплексом.*

Коциклы $c \in C^m(C^\bullet)$ этого комплекса характеризуются соотношением

$$(\delta c)(\gamma) = c(\partial\gamma) = 0, \qquad \gamma \in C_m,$$

т. е. тем, что они равны нулю на подгруппе границ $B_mC_\bullet \subset C_m$. По определению (см. лекцию II.4) это означает, что

$$Z^mC^\bullet = \operatorname{Ann} B_mC_\bullet$$

(*коциклы составляют аннулятор группы границ*). Аналогично, если $\partial\gamma = 0$, то $(\delta e)(\gamma) = e(\partial\gamma) = 0$ для любой коцепи e, и, наоборот, если $c(\gamma) = 0$, когда $\partial\gamma = 0$, то формула $e(\partial\gamma) = c(\gamma)$ корректно определяет линейный функционал $e\colon B_{m-1}C_\bullet \to \mathbb{K}$, обладающий тем свойством, что, произвольно продолжив его — с сохранением линейности — на все пространство C_{m-1}, мы получим такую коцепь $e\colon C_{m-1} \to \mathbb{K}$, что $(\delta e)(\gamma) = e(\partial\gamma) = c(\gamma)$, т. е. такую, что

$\delta e = c$. Этим доказано, что

$$B^m C^{\bullet} = \operatorname{Ann} Z_m C_{\bullet}$$

(*кограницы составляют аннулятор группы циклов*).

Продолжимость функционала e с подпространства $B_{m-1}C_{\bullet}$ на все пространство C_{m-1} — это общий факт: для любого подпространства $\mathcal{P}$ произвольного — даже бесконечномерного! — линейного пространства $\mathcal{V}$ каждый линейный функционал $e\colon \mathcal{P} \to \mathbb{K}$ допускает продолжение на $\mathcal{V}$. Для доказательства достаточно выбрать для $\mathcal{P}$ дополнительное подпространство Q, существование которого доказано в лекции 22 в связи с замечанием 3, и произвольно задать e на Q.

Для групп когомологий $H^n(C^{\bullet})$ комплекса $C^{\bullet}$ отсюда следует, что для любого класса когомологий $x \in H^m C^{\bullet}$ формула

$$(\# x)(\xi) = c(\gamma), \quad \xi \in H_m C_{\bullet},$$

где c — произвольный коцикл класса когомологий x, а γ — произвольный цикл класса гомологий ξ, корректно задает некоторый функционал

$$\# x\colon H_m C_{\bullet} \to \mathbb{K}$$

и что получающееся отображение

$$\#\colon H^m C^{\bullet} \to (H_m C_{\bullet})', \quad x \mapsto \# x,$$

является изоморфизмом. [Мономорфность этого отображения вытекает из равенства $B^m C^{\bullet} = \operatorname{Ann} Z_m C_{\bullet}$, а эпиморфность обеспечивается возможностью продолжить любой линейный функционал $Z_m C_{\bullet} \to \mathbb{K}$ на все пространство C_m.] Таким образом, *для любого цепного комплекса $C_{\bullet}$, состоящего из линейных пространств и любого $m \geqslant 0$ имеет место изоморфизм*

$$\#\colon H^m C^{\bullet} \to (H_m C_{\bullet})'.$$

Тем самым вычисление групп когомологий сводится к вычислению групп гомологий.

Для комплекса $C_{\bullet} = C_{\bullet}(\mathcal{X}; \mathbb{K})$ сингулярных цепей гладкого многообразия $\mathcal{X}$ над полем $\mathbb{K}$ коцепной комплекс $C^{\bullet}$ обозначается символом $C^{\bullet}(\mathcal{X}; \mathbb{K})$. Так как для любого $m \geqslant 0$ множество $S_m \mathcal{X}$ является базисом пространства $C_m(\mathcal{X}; \mathbb{K})$ и так как линейные функционалы на произвольном линейным пространстее естественным образом отождествляются с $\mathbb{K}$-значными функциями, заданными на его базисе, то для любого $m \geqslant 0$ компонента $C^m(\mathscr{X}; \mathbb{K}) = C_m(\mathscr{X}; \mathbb{K})'$ комплекса $C^\cdot(\mathscr{X}; \mathbb{K})$ отождествляется с линейным пространством всевозможных функций $S_m\mathscr{X} \to \mathbb{K}$. Это, в частности, позволяет определить группу $C^m(\mathscr{X}; G)$ для произвольной группы G. По определению элементы этой группы, называемые *m-мерными сингулярными коцепями многообразия $\mathscr{X}$ над группой G*, представляют собой G-значные функции $c\colon S_m\mathscr{X} \to G$, определенные на множестве $S_m\mathscr{X}$ всех m-мерных сингулярных симплексов многообразия $\mathscr{X}$. Кограничный оператор δ определяется при этом формулой

$$(\delta c)(\sigma) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i c(\partial_i \sigma),$$

являющейся расшифровкой формулы $(\delta c)(\sigma) = c(\partial c)$.

Коциклы, кограницы и классы когомологий комплекса $C^\cdot(\mathscr{X}; G)$ называются *сингулярными коциклами, кограницами и классами когомологий* многообразия $\mathscr{X}$, а соответствующие группы обозначаются символами $Z^m(\mathscr{X}; G)$, $B^m(\mathscr{X}; G)$ и $H^m(\mathscr{X}; G)$. Согласно доказанному выше общему результату *для любого поля $\mathbb{K}$ имеет место изоморфизм*

$$H^m(\mathscr{X}; \mathbb{K}) \to H_m(\mathscr{X}; \mathbb{K})'. \tag{22}$$

В случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, каждая форма $\omega \in \Omega^m\mathscr{X}$ определяет по формуле

$$\overline{\omega}(\gamma) = \int_\gamma \omega, \qquad \gamma \in C_m(\mathscr{X}; \mathbb{R}),$$

некоторую коцепь $\overline{\omega} \in C^m(\mathscr{X}; \mathbb{R})$, причем

$$\overline{d\omega} = \delta\overline{\omega}. \tag{23}$$

[Действительно,

$$\overline{d\omega}(\gamma) = \int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega = \overline{\omega}(\partial\gamma) = (\delta\overline{\omega})(\gamma)$$

для любой цепи $\gamma \in C_m(\mathscr{X}; \mathbb{R})$.] Из формулы (23) следует, что отображение $\omega \mapsto \overline{\omega}$ коциклы переводит в коциклы, а кограницы — в кограницы. Поэтому это отображение индуцирует некоторый гомоморфизм

$$H^m\mathscr{X} \to H^m(\mathscr{X}; \mathbb{R}). \tag{24}$$

Сравнение определений немедленно показывает, что композиция гомоморфизма (24) с изоморфизмом (22) является не чем иным, как гомоморфизмом (20) из теоремы де Рама. Поэтому для доказательства теоремы де Рама (по крайней мере в отношении групп $H^m\mathscr{X}$) достаточно установить, что *гомоморфизм* (24) *является изоморфизмом*. К сожалению, у нас нет возможности провести здесь соответствующее доказательство.

Замечание 3. Утверждение, что гомоморфизм (24) является изоморфизмом, означает, что оба подхода к определению групп когомологий многообразия — через формы и сингулярные цепи — приводят фактически к одному и тому же результату. Существуют и другие подходы к этим группам, например подход Чеха — Лере из лекции 22, который, как мы знаем, приводит к группам, изоморфным группам $H^m\mathscr{X}$. Поэтому для доказательства изоморфизма (24) достаточно доказать, что *группы сингулярных когомологий изоморфны группам Чеха — Лере* (которые, заметим, в лекции 22 были обозначены тем же символом $H^m(\mathscr{X}; \mathbb{R})$). В этой формулировке не участвуют формы, и она имеет смысл для любых топологических пространств (для которых существуют покрытия Лере, соответствующим образом определенные). Поэтому можно ставить вопрос о справедливости этого утверждения в общем виде (для любых топологических пространств). Ответ оказывается положительным для полиэдров (см. замечание 2 лекции 21), но отрицательным в общем случае. Общее изучение всего этого круга вопросов составляет предмет разветвленной теории, входящей в качестве составной части в алгебраическую топологию. К сожалению, мы только лишь намеками могли ее коснуться. [Например, сравнение определений групп когомологий симплициальных схем и групп сингулярных когомологий многообразий — и, более общо, топологических пространств — показывает их большое сходство. Выявление этого сходства в общих терминах приводит к симплициальным множествам, теория которых и красива, и глубока. С другой стороны, построение коцепного комплекса по цепному является жалким примером и бледной тенью алгебраических манипуляций над цепными комплексами, которыми занимается гомологическая алгебра и т. д., и т. п. Заинтересовавшийся читатель может обратиться за дальнейшими сведениями к упомянутой в предисловии книге Ботта и Ту, а также к другим — довольно многочисленным — учебникам алгебраической топологии.]