ПРЕДИСЛОВИЕ

Геометрия была и остается Золушкой учебных планов механико-математического факультета МГУ. Никогда за последние пятьдесят лет в этих планах не было ни оснований геометрии, ни алгебраических кривых, ни групп преобразований, ни даже проективной геометрии (если не считать отдельных ее обрывков, включенных в курс аналитической геометрии на первом семестре, которые читаются лишь при особо благоприятных обстоятельствах, и никто не беспокоится, когда лектор их комкает или даже вообще опускает). Студент вполне мог и может окончить мехмат — и успешно! — не имея, по существу, никакого представления о геометрии Лобачевского, идеях Кэли — Клейна в основаниях геометрии, свойствах алгебраических кривых и групп Ли.

Лет двенадцать тому назад вызванное все более распространяющимся внедрением геометрических методов переполнение курса математического анализа посторонним геометрическим материалом побудило создать на втором году обучения новый учебный курс под условным названием «Гладкие многообразия и дифференциальная геометрия» объемом — по одной лекции в неделю. Ожидалось, что этот курс во всяком случае освободит лекторов по анализу и смежным дисциплинам от изложения чуждого геометрического материала. Однако программа этого курса не была достаточно четко продумана, а программы параллельных курсов анализа и теории дифференциальных уравнений не были с ней согласованы. В результате никакой реальной выгоды лекторы по анализу не получили, и дело доходило до анекдота — интегрирование дифференциальных форм на многообразиях и формула Стокса с равной степенью подробности — и лишь с незначительно сдвинутыми точками зрения — дважды рассказывались в двух параллельно читаемых курсах анализа и геометрии!

Чтение курса геометрии на третьем семестре вошло также в противоречие с обобщающей и унифицирующей ролью геометрических представлений в современной математике, для выявления которой необходимо основные аналитические курсы иметь прочтенными и освоенными.

Все это — вместе с другими, более частными, соображениями — привело к решению передвинуть курс геометрии на третий год обучения (пятый—шестой семестры). Однако немедленно выяснилось, что и это решение имеет свои недостатки.

Необходимой составной частью любого курса геометрии является теория кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, важная как своим содержанием, так и как источник наглядных представлений и примеров для римановой геометрии и геометрии аффинной связности. Но для чтения на третьем году она, во-первых, слишком элементарна — к этому времени студенты приобретают умение и вкус к существенно более сложным построениям и концепциям, — а во-вторых, чтобы она сыграла свою пропедевтическую роль нельзя от нее слишком быстро переходить к римановой геометрии.

Ясно, что излагать эту теорию нужно не позже третьего семестра (а, быть может, — как я предлагал в первом издании Семестра II этих «Лекций», — даже на втором семестре). Кроме того, чтение курса геометрии на третьем году никак не помогает лекторам аналитических дисциплин на втором году обучения (из-за чего — я уверен — курс геометрии на третьем году будет скоро ликвидирован и — увы!, — быть может, опять выброшен из сетки учебного плана).

Кардинальное решение проблемы состоит, конечно, в полном пересмотре всей традиционно сложившейся системы математических курсов. Однако поскольку в условиях существующей острой борьбы кафедр за часы и курсы такого рода пересмотр, — который рано или поздно придется безусловно осуществить, — пока мало реален, временным решением может быть возвращение курса геометрии на третий—четвертый семестры с тем, чтобы изложение вопросов интегрирования было четко распределено между курсами анализа и геометрии, которые должны передавать их друг другу как палочку эстафеты.

Можно предположить, например, следующее распределение тем. После того как в курсе анализа рассказан интеграл от функций по областям в $\mathbb{R}^n$, эстафету немедленно перенимает лектор по геометрии и излагает интегрирование плотностей и форм на многообразиях. Одновременно лектор по анализу иллюстрирует общую теорию на частных случаях криволинейных и поверхностных интегралов первого (плотности) и второго (формы) рода. За это время в курсе геометрии рассказывается обобщенная теорема Стокса, которая в курсе анализа немедленно конкретизируется в виде формул Грина, Гаусса—Остроградского и Стокса. Этот дуэт, в котором общая мелодия то расходится, то сливается, заканчивается апофеозом векторного анализа с элементами теории потенциала, где курс анализа непринужденно переливается в теорию многомерных несобственных интегралов, а курс геометрии—в теорию когомологий. Конечно, все это требует точнейшей согласованности лекторов, добиться которой совсем непросто.

Лежащая перед читателем книга, как и предыдущие книги этой серии [1]), хотя и выросла из конспектов лекций, которые читались на мехмате МГУ в разные годы, но не является записью какого-нибудь определенного курса и представляет собой реализацию предлагаемой программы курса геометрии третьего семестра. Конечно, ее можно использовать и как учебное пособие в преподавании по существующим программам на пятом семестре.

Учебник рассчитан на нормальный курс по две лекции в неделю. [Число лекций (29) объясняется тем, что хотя формально зимний семестр содержит 18 недель, но фактически на втором и третьем курсах удается читать лекции не более 11—15 недель.] Однако им можно пользоваться и в случае, когда учебный план предусматривает лишь одну-полторы лекций в неделю (11—15 и соответственно 16—22 лекции).

Чтобы можно было оценить время, необходимое для изложения той или иной программы, я старался, чтобы каждая лекция в книге отвечала реальной двухчасовой (или, точнее, полуторачасовой) устной лекции. [Напоминание вспомогательного материала из других курсов и рассмотрение примеров, легкое и непринужденное у доски, в письменном виде требует существенно больше места. Этим объясняется неравномерность объема лекций и неожиданно большая величина, например, лекций 3, 11 и 20.]

---

[1]) См. М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр I: Аналитическая геометрия.— 2-е изд.— М.: Наука, 1986; Семестр II: Линейная алгебра.— 2-е изд.— М.: Наука, 1986.

Основной упор в книге сделан на гладкие многообразия, а общетопологические факты и понятия отдельно не выделены и вкраплены в текст.

В последние годы распространилась довольно странная точка зрения на гладкие многообразия, разделяемая, как это не удивительно, и некоторыми весьма уважаемыми и авторитетными математиками. Основываясь на том, что понятие гладкого многообразия можно считать результатом естественной попытки аксиоматического обобщения наивного представления о многообразии как о подмножестве евклидова пространства, задаваемого системой функционально независимых уравнений, они аргументируют, что, поскольку согласно теореме Уитни о вложении это обобщение к новым объектам фактически не приводит, многообразия следует определять как такого рода подмножества, и что общее понятие многообразия является всего лишь примером многочисленных аксиоматических построений, которые неизбежно возникают в процессе выработки понятий, но которые затем лучше забыть. Я никак не могу разделять это мнение и считаю его в принципе ошибочным, хотя бы потому, что на практике—например, в механике—многообразия появляются, как правило, в абстрактной форме, не вложенные ни в какое евклидово пространство, и насильственное их вложение—с большим произволом!—вводит дополнительную структуру, иногда полезную, но большей частью не имеющую отношения к существу дела. Сторонники этого мнения апеллируют к авторитету Пуанкаре, который якобы ее разделял. На самом же деле Пуанкаре отчетливо понимал необходимость в общем понятии многообразия и специально останавливался на склеивании карт атласа. Ссылка на крайности аксиоматизации здесь также бьет мимо цели, поскольку в действительности многообразия появились вовсе не в результате «естественных попыток обобщения наивного понятия многообразия, заданного уравнениями», а как ответ на требование четкой экспликации понятия, необходимым образом возникающего в математическом исследовании. Последовательное проведение тех же принципов отбросило бы математику на сотню лет назад, поскольку, например, с этой точки зрения вся линейная алгебра в ее современном виде не имеет права на существование, основываясь на понятии линеала, которое де «возникло» в результате естественных попыток обобщения наивного понятия пространства $\mathbb{R}^n$»

(что как и для многообразий неверно), тогда как теорема об изоморфизме показывает, что «это обобщение к новым объектам фактически не приводит» (что хотя и верно, но не лишает понятия линеала его ценности). Поэтому в книге многообразия определяются обычным образом — на основе понятия атласа, а подмножества евклидовых пространств появляются лишь как примеры.

Задачи в книге, как правило, совершенно тривиальны и предназначены исключительно для самоконтроля читателя. Некоторые, в основном более трудные, задачи выделены мелким шрифтом. Мелким шрифтом выделен также вспомогательный материал, относящийся не столько к геометрии, сколько к алгебре или анализу.

Первые пять лекций, лишь косвенно относящиеся к теории гладких многообразий, посвящены элементарной дифференциальной геометрии. После теории кривых (формул Френе) строятся первая и вторая квадратичная формы поверхности, выводятся деривационные формулы Вейнгартена и доказывается теорема Гаусса об инвариантности полной кривизны. Все, что не лежит на прямом пути к теореме Гаусса опущено (теоремы Менье и Эйлера, геодезические линии, асимптотические линии, линии кривизны и т. п.). При чтении лекций на втором курсе этот материал иногда приходилось откладывать до середины семестра (чтобы возможно раньше удовлетворить нужды курса дифференциальных уравнений в основных понятиях общей теории гладких многообразий). Это хотя и позволяло убрать некоторые повторения (например, дифференциал гладкого отображения тогда не нужно было определять дважды — сначала для поверхностей, а затем в общем случае), но методически это было мало оправдано (и слишком привязывало элементарную дифференциальную геометрию — имеющую в принципе локальный характер — к теории многообразий).

Собственно теория многообразий начинается с шестой лекции. Первые десять лекций (с шестой по пятнадцатую) посвящены основным геометрическим понятиям и теоремам теории многообразий. В сокращенном 11-лекционном варианте из этих лекций можно оставить семь, сократив первые пять лекций до четырех и пожертвовав лекциями 8, 9 и 10 (в которых в основном излагаются топологическая теория размерности и теоремы Тихонова), а в 16-лекционном — лекцией 10. Остальные лекции этой группы (в особенности посвященные теоремам Сарда и

Уитни) должны, по моему мнению, сохраниться в курсе при любых вариантах.

В 11-лекционном варианте на этом фактически курс заканчивается. Впрочем, в этом случае оказывается возможным—за счет некоторого сокращения и уплотнения изложения—сэкономить часа полтора лекционного времени для изложения хотя бы части материала лекций 16 и 17. Что же касается теории дифференциальных форм (лекции 18, 19 и 20), то в этом варианте ее приходится переносить на следующий семестр (или оставлять на усмотрение лектора по анализу).

В 16-лекционном варианте этого переноса удается избежать и заканчивать курс лекцией 20, в которой на примере сферы демонстрируются различные способы вычисления групп когомологий де Рама. [Подчеркнем, что это означает исключение из курса «интеграционных» лекций 24—29, материал которых тем самым полностью оставляется на попечении курса анализа.]

В лекциях 21—23 впервые делается попытка дать достаточно полное изложение теории гомологий и когомологий—вплоть до спектральных последовательностей!—пригодное для обязательного курса. Это удается сделать, резко изменив общепринятую точку зрения и практически полностью отказавшись от изложения якобы имеющей геометрическую наглядность симплициальной теории гомологий. [Мне приятно отметить, что аналогичный подход—на более высоком уровне—принят в книге Ботта и Ту «Дифференциальные формы в алгебраической топологии», русский перевод которой выходит в издательстве «Наука» и которую я горячо рекомендую каждому, кто хочет познакомиться с основными идеями и построениями классической теории гомологий в ярком и современном изложении.] При недостатке времени можно опустить вторую половину лекции 22 и всю лекцию 23.

Наконец, заключительные лекции 24—29, которые можно при желании частично переставить с лекциями 21—23, посвящены интегрированию. Здесь изложение сознательно неполное (например, ничего не сказано об аддитивных функциях множества), поскольку они отражают лишь часть общей картины, другая часть которой относится к анализу. Лекцию 28 можно при этом целиком доверить лектору по анализу. Можно также ограничиться лишь одной лекцией 29, фактически независимой от предыдущих четырех лекций.