Лекция 1

Расслоения и их морфизмы.— Фактортопология и факторпространство.— Действия групп.— Топологические и гладкие группы и их действия.— Главные расслоения.— Расслоения со структурной группой.— Сечения расслоений.— Локально тривиальные расслоения.

Слово «расслоение» вызывает представление о некотором множестве $\mathscr{E}$, разбитом (расслоенном) на непустые непересекающиеся подмножества—слои. Пусть $\mathscr{B}$—множество всех слоев, а $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$—отображение, сопоставляющее каждой точке $p \in \mathscr{E}$ содержащий ее слой. Отображение π однозначно определено расслоением и, в свою очередь, однозначно его определяет. При этом любое надъективное отображение вида $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ доставляет нам некоторое расслоение множества $\mathscr{E}$ (состоящее из прообразов $\pi^{-1}(b)$ точек $b \in \mathscr{B}$). Конечно, в топологической ситуации (когда $\mathscr{E}$ является топологическим пространством) отображение π естественно считать непрерывным. Все это объясняет и мотивирует следующее определение:

Определение 1. *Расслоением* называется произвольная тройка вида

$$\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B}),$$

где $\mathscr{E}$ и $\mathscr{B}$—топологические пространства, а $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$—непрерывное отображение (как правило, надъективное). Пространство $\mathscr{E}$ называется *тотальным пространством* расслоения ξ. (Употребляются также термины *пространство расслоения* и *расслоенное пространство*.) Пространство $\mathscr{B}$ называется *базой* расслоения ξ. Расслоение с базой $\mathscr{B}$ называется также *расслоением над* $\mathscr{B}$. Отображение $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ называется *проекцией* расслоения ξ. Для любой точки $b \in \mathscr{B}$ ее прообраз $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$ называется *слоем* расслоения ξ над точкой b.

Замечание 1. Так как задание отображения $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ уже предусматривает задание пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{B}$, то средний компонент тройки $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ однозначно определяет остальные два. Поэтому формально расслоение $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ совпадает с отображением π. Различие состоит только в точке зрения (отображение есть правило, сопоставляющее каждой точке $p \in \mathscr{E}$ точку $\pi(p) \in \mathscr{B}$, а расслоение сопоставляет каждой точке $b \in \mathscr{B}$ подпространство $\mathscr{F}_b$).

Тем не менее иногда удобно не различать ξ и π и называть *расслоением* отображение $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Когда нужно отметить зависимость $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ и π от ξ, мы будем писать $\mathscr{E}^\xi$, $\mathscr{B}^\xi$ и π^ξ (а иногда по требованию типографии $\mathscr{E}(\xi)$, $\mathscr{B}(\xi)$ и $\pi(\xi)$).

Расслоение $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ называется *расслоением с типичным слоем*, если для любых двух точек $b_1, b_2 \in \mathscr{B}$ слои $\mathscr{F}_{b_1}$ и $\mathscr{F}_{b_2}$ гомеоморфны, т. е. если существует такое топологическое пространство $\mathscr{F}$, что для любой точки $b \in \mathscr{B}$ слой $\mathscr{F}_b$ гомеоморфен пространству $\mathscr{F}$. Пространство $\mathscr{F}$ однозначно определено с точностью до гомеоморфизма и называется *типичным слоем* расслоения.

Ясно, что проекция каждого расслоения, обладающего типичным слоем, является надъективным отображением.

Пусть $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ и $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ — два расслоения. Непрерывное отображение $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ называется *послойным*, если оно переводит каждый слой $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathscr{B}$, расслоения ξ в некоторый слой $\mathscr{F}_{b'}$ расслоения ξ'. Такое отображение определяет по формуле $\psi(b) = b'$ отображение $\psi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$, удовлетворяющее соотношению $\pi' \circ \varphi = \psi \circ \pi$, т. е. замыкающее коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & \mathscr{E}' \arrow[d, dashed, "\pi'"] \\
\mathscr{B} \arrow[r, "\psi"] & \mathscr{B}',
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

но, вообще говоря, не непрерывное. Если отображение ψ непрерывно, то послойное отображение φ называется *морфизмом* расслоения ξ в расслоение ξ' и в этом случае пишут $\varphi\colon \xi \to \xi'$.

Поскольку отображение ψ однозначно характеризуется как отображение, замыкающее диаграмму (1), можно также сказать, что отображение $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ тогда и только тогда является морфизмом $\varphi\colon \xi \to \xi'$, когда существует непрерывное отображение $\psi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$, замыкающее диаграмму (1). Иногда морфизмом $\xi \to \xi'$ называют пару (φ, ψ).

Морфизм $\varphi\colon \xi \to \xi'$ называется *изоморфизмом*, если оба отображения φ и ψ являются гомеоморфизмами, т. е. если определено непрерывное отображение $\varphi^{-1}\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ и это отображение является морфизмом $\xi' \to \xi$. Расслоения ξ и ξ' называются *изоморфными*, если существует хотя бы один изоморфизм $\xi \to \xi'$.

В случае, когда $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ и $\psi = \mathrm{id}$, послойное отображение φ (автоматически являющееся морфизмом) называется *морфизмом над* $\mathscr{B}$. Для него имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{E}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathscr{B} & \end{tikzcd}$$

Морфизм над $\mathscr{B}$, являющийся гомеоморфизмом (и, следовательно, изоморфизмом), называется *изоморфизмом над* $\mathscr{B}$. Расслоения ξ и ξ' с одной и той же базой $\mathscr{B}$ называются *изоморфными*, если они изоморфны над $\mathscr{B}$.

Задача 1. Докажите, что если отображение π открыто (переводит открытые множества в открытые), то любое послойное отображение $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ является морфизмом $\xi \to \xi'$. Таким образом, для расслоений, проекции которых являются открытыми отображениями, морфизмы — это в точности послойные отображения (а изоморфизмы — послойные гомеоморфизмы).

Непрерывное отображение $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ называется *факторным*, если множество $U \subset \mathscr{B}$ тогда и только тогда открыто в $\mathscr{B}$, когда открыто в $\mathscr{E}$ множество $\pi^{-1}U$. Факторное надъективное отображение называется *эпиоморфным*. Эпиоморфные отображения называются также *эпиоморфизмами*.

Задача 2. Покажите, что любое открытое или замкнутое непрерывное отображение является факторным.

Задача 3. Покажите, что эпиоморфизм $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ тогда и только тогда является открытым отображением, когда для каждого открытого множества $V \subset \mathscr{E}$ множество $\pi^{-1}(\pi V)$ также открыто.

Для любого отношения эквивалентности $\sim$ на топологическом пространстве $\mathscr{E}$ множество $\mathscr{B} = \mathscr{E}/\sim$ всех классов эквивалентности естественным образом топологизируется требованием, чтобы каноническая проекция

$$\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}, \quad p \mapsto [p], \tag{2}$$

была эпиоморфизмом. Это означает, что множество $U \subset \mathscr{B}$ тогда и только тогда открыто в $\mathscr{B}$, когда его полный прообраз $\pi^{-1}U = \{p \in \mathscr{E};\ [p] \in U\}$ открыт в $\mathscr{E}$.

Эта топология на $\mathscr{B}$ называется *фактортопологией*, а множество $\mathscr{B}$, снабженное фактортопологией, называется *факторпространством*. [Можно сказать, что фактортопология является наиболее *слабой* топологией на $\mathscr{B}$, т. е.

имеющей наименьший запас открытых множеств, по отношению к которой проекция (2) непрерывна.]

Являясь эпиоморфизмом, проекция (2), тем не менее, может не быть открытым отображением.

Важный класс отношений эквивалентности, для которых проекция (2) открыта, возникает в связи с действиями групп.

Говорят, что группа $\mathcal{G}$ *действует слева* на множестве $\mathcal{E}$ (или является *группой преобразований* этого множества), если задано такое отображение

$$\mathcal{G}\times\mathcal{E}\to\mathcal{E},\quad (a, p)\mapsto ap,\quad a\in\mathcal{G},\quad p\in\mathcal{E}, \tag{3}$$

что для любых элементов $a, b\in\mathcal{G}$ и $p\in\mathcal{E}$ имеют место равенства

$$ep=p,\quad a(bp)=(ab)p,$$

где e — единица группы $\mathcal{G}$.

Аналогично определяется *действие справа*:

$$\mathcal{E}\times\mathcal{G}\to\mathcal{E},\quad (p, a)\mapsto pa. \tag{4}$$

Для любого элемента $a\in\mathcal{G}$ отображение

$$L_a\colon \mathcal{E}\to\mathcal{E},\quad p\mapsto ap,$$

биективно и отображение $a\mapsto L_a$ представляет собой гомоморфизм группы $\mathcal{G}$ в группу $\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ всех биективных отображений $\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ множества $\mathcal{E}$ в себя.

Мы будем называть этот гомоморфизм *представлением группы $\mathcal{G}$ в $\mathcal{E}$, ассоциированным с действием* (3). Ясно, что соответствие

действие $\Leftrightarrow$ ассоциированное представление

между всевозможными действиями (3) и всевозможными гомоморфизмами $\mathcal{G}\to\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ биективно.

Действие (3) называется *эффективным*, если ассоциированное представление является мономорфизмом, т. е. если для любого элемента $a\neq e$ группы $\mathcal{G}$ существует такой элемент $p\in\mathcal{E}$, что $ap\neq p$. Действие (3) называется *свободным*, если для каждого элемента $p\in\mathcal{E}$ равенство $ap=p$ имеет место только при $a=e$. Ясно, что любое свободное действие эффективно.

Действие (3) определяет на $\mathcal{E}$ отношение эквивалентности $\sim$, в котором $p\sim q$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a\in\mathcal{G}$, что $q=ap$. Соответствующие классы эквивалентности называются *орбитами* действия (3). Любые две орбиты либо совпадают, либо не пересекаются. Орбита, содержащая элемент $p \in \mathcal{E}$, состоит из всех элементов вида ap, $a \in \mathcal{G}$, и обозначается символом $\mathcal{G}p$. Множество всех орбит мы будем обозначать символом $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. Оно связано с множеством $\mathcal{E}$ естественным надъективным отображением факторизации

$$\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{G}, \quad p \mapsto \mathcal{G}p. \tag{5}$$

Для любого элемента $p \in \mathcal{E}$ отображение

$$j_p\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}p, \quad a \mapsto ap,$$

надъективно. Оно тогда и только тогда биективно для всех $p \in \mathcal{E}$, когда действие (3) свободно.

Для любой группы $\mathcal{G}$ умножение в $\mathcal{G}$ и операция перехода к обратному элементу определяют отображения

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad (a, b) \mapsto ab, \tag{6}$$

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad a \mapsto a^{-1}. \tag{7}$$

Группа $\mathcal{G}$ называется *топологической группой*, если на ней задана топология, относительно которой оба отображения (6) и (7) непрерывны. Аналогично группа $\mathcal{G}$ называется *группой Ли* (или *гладкой группой*), если на ней задана гладкость, относительно которой оба отображения (6) и (7) гладки.

Задача 4. Покажите, что если для группы $\mathcal{G}$, являющейся гладким многообразием, отображение (6) гладко, то отображение (7) также гладко (т. е. $\mathcal{G}$ является группой Ли). [Заметим, что для топологических групп аналогичное утверждение неверно.]

Действие топологической группы $\mathcal{G}$ на топологическом пространстве $\mathcal{E}$ называется *непрерывным*, если непрерывно отображение (3); имеется в виду, что множество $\mathcal{G} \times \mathcal{E}$ наделено топологией прямого произведения. Аналогично действие группы Ли $\mathcal{G}$ на гладком многообразии $\mathcal{E}$ называется *гладким*, если отображение (3) гладко по отношению к гладкости на $\mathcal{G} \times \mathcal{E}$, являющейся произведением гладкостей многообразий $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$.

Топологическое пространство (гладкое многообразие) $\mathcal{E}$, наделенное непрерывным (гладким) действием топологической (гладкой) группы $\mathcal{G}$, называется *$\mathcal{G}$-пространством* (соответственно *$\mathcal{G}$-многообразием*). $\mathcal{G}$-пространство ($\mathcal{G}$-многообразие) называется *эффективным* или *свободным*, если эффективно или соответственно свободно действие (3).

Пространство орбит $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ непрерывного (или гладкого) действия наделяется фактортопологией, так что естественная проекция (5) оказывается эпиоморфизмом. Вопрос, будет ли для гладкого действия это пространство гладким многообразием, в общем случае решается отрицательно. В дальнейшем мы рассмотрим условия, обеспечивающие положительный ответ на этот вопрос, а пока ограничимся лишь непрерывными действиями. Конечно, все результаты топологического характера, которые мы получим для непрерывных действий, будут автоматически справедливы и для действий гладких.

Если действие (3) непрерывно, то для любого элемента $a \in \mathcal{G}$ биективное отображение L_a: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ непрерывно и обладает непрерывным обратным отображением $L_{a^{-1}}$, т. е. является гомеоморфизмом. Поэтому для каждого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$ множество $aV = L_a(V)$ также открыто. Следовательно, открыто и множество

$$\bigcup_{a \in \mathcal{G}} aV = \bigcup_{p \in V} \mathcal{G}p.$$

Но последнее множество является, очевидно, не чем иным, как полным прообразом $\pi^{-1}(\pi V)$ при отображении π множества πV. Поскольку отображение π по построению эпиоморфно, отсюда следует, что множество πV открыто в $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. Этим доказано, что *для любого непрерывного действия* (3) *отображение* (5) *не только эпиоморфно, но даже открыто.*

Конечно, все это немедленно переносится на случай правых действий (4). Единственное существенное отличие состоит в том, что для действия справа ассоциированное представление будет антигомоморфизмом. Множество орбит правого действия обозначается прежним символом $\mathcal{E}/\mathcal{G}$, а отображение $p \mapsto pa$ — символом R_a. (Для пространства орбит левого действия иногда используется символ $\mathcal{G} \backslash \mathcal{E}$. Мы этим символом пользоваться, как правило, не будем, потому что он плохо сочетается с другими обозначениями — скажем, со знаком равенства.)

Таким образом, каждое правое $\mathcal{G}$-пространство $\mathcal{E}$ является тотальным пространством расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{E}/\mathcal{G})$, проекция

$$\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{G}, \quad p \mapsto p\mathcal{G}, \tag{8}$$

которого является открытым надъективным отображением.

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — произвольные $\mathcal{G}$-пространства (для определенности правые). Отображение φ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ называется *эквивариантным*, если оно перестановочно с действием группы $\mathcal{G}$, т. е. если

$$\varphi(pa) = \varphi(p)a$$

для любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любого элемента $a \in \mathcal{G}$.

Ясно, что по отношению к расслоениям $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{E}/\mathcal{G})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{E}'/\mathcal{G})$ каждое эквивариантное отображение φ послойно. А так как отображение (8) открыто, то φ является морфизмом расслоения ξ в расслоение ξ'.

В частности, *любой эквивариантный гомеоморфизм* $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ *является изоморфизмом* $\xi \to \xi'$.

Изоморфизмы $\xi \to \xi'$, являющиеся эквивариантными гомеоморфизмами $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, мы будем называть также *$\mathcal{G}$-изоморфизмами.*

Для любого правого непрерывного действия (4) рассмотрим подпространство $\mathcal{E}^*$ произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, состоящее из пар $(p, q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, обе компоненты p и q которых принадлежат одной орбите действия (4), т. е. для которых существует такой элемент $a \in \mathcal{G}$, что $q = pa$. Если действие (4) свободно, то элемент a определен единственным образом. Обозначив его символом $\tau(p, q)$, мы получим, тем самым, некоторое отображение

$$\tau\colon \mathcal{E}^* \to \mathcal{G}. \tag{9}$$

Это отображение называется *отображением сдвига.*

Определение 2. Если отображение (9) непрерывно, то расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{E}/\mathcal{G})$ называется *главным $\mathcal{G}$-расслоением*. Группа $\mathcal{G}$ называется его *структурной группой*, а пространство $\mathcal{E}$ (на котором свободно действует справа группа $\mathcal{G}$) — *главным $\mathcal{G}$-пространством.*

Легко видеть, что *для каждого главного $\mathcal{G}$-расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{E}/\mathcal{G})$ и любой точки $p \in \mathcal{E}$ непрерывное биективное отображение*

$$j_p\colon \mathcal{G} \to p\mathcal{G}, \quad a \mapsto pa, \qquad a \in \mathcal{G},$$

является гомеоморфизмом. Действительно, по определению $j_p(\tau(p, q)) = q$ для любой точки $q \in p\mathcal{G}$, и значит непрерывное отображение

$$q \mapsto \tau(p, q), \qquad q \in p\mathcal{G},$$

обратно к отображению j_p. □

Доказанное утверждение означает, что *каждое главное $\mathcal{G}$-расслоение является расслоением с типичным слоем,* ко-

торым служит пространство группы $\mathscr{G}$ (допуская определенную неточность, обычно говорят, что типичным слоем главного расслоения является сама группа $\mathscr{G}$).

Примеры главных расслоений.

Пример 1. Для любого топологического пространства $\mathscr{B}$ и любой топологической группы $\mathscr{G}$ произведение $\mathscr{E}=\mathscr{B}\times\mathscr{G}$ является правым $\mathscr{G}$-пространством относительно действия

$$(b,\ a)g=(b,\ ag),\qquad b\in\mathscr{B},\quad a,\ g\in\mathscr{G}.$$

Это действие свободно и подпространство $\mathscr{E}^*$ состоит для него из таких пар $((b_1,\ a_1),\ (b_2,\ a_2))$, что $b_1=b_2$. При этом отображение сдвига (9) задается формулой

$$\tau((b,\ a_1),\ (b,\ a_2))=a_1^{-1}a_2,$$

и следовательно, непрерывно. Поскольку в этом случае факторпространство $\mathscr{E}/\mathscr{G}$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathscr{B}$, мы получаем, что *для любых* $\mathscr{B}$ *и* $\mathscr{G}$ *определено главное расслоение*

$$(10)\qquad (\mathscr{B}\times\mathscr{G},\ \pi,\ \mathscr{B}),\quad \text{где}\quad \pi(b,\ a)=b,\quad b\in\mathscr{B},\ a\in\mathscr{G},$$

со структурной группой $\mathscr{G}$ *и базой* $\mathscr{B}$.

Расслоения вида (10), а также любые главные расслоения, им $\mathscr{G}$-изоморфные, называются *тривиальными главными расслоениями*.

Пример 2. Топологическая группа $\mathscr{G}$ называется *подгруппой* топологической группы Γ, если $\mathscr{G}$ является подгруппой абстрактной группы Γ и одновременно подпространством топологического пространства Γ. Очевидно, что по отношению к ограничению на $\Gamma\times\mathscr{G}$ умножения $\Gamma\times\Gamma\to\Gamma$ группа Γ является свободным правым $\mathscr{G}$-пространством. Множество Γ^* для этого $\mathscr{G}$-пространства состоит из всех пар $(x,\ y)\in\Gamma\times\Gamma$, для которых $x^{-1}y\in\mathscr{G}$, а отображение сдвига (9) задается формулой

$$\tau(x,\ y)=x^{-1}y.$$

Следовательно, отображение сдвига непрерывно и потому проекция

$$\Gamma\to\Gamma/\mathscr{G},\quad x\mapsto x\mathscr{G},\qquad x\in\Gamma,$$

является главным $\mathscr{G}$-расслоением. База $\mathscr{B}=\Gamma/\mathscr{G}$ этого расслоения состоит из левых смежных классов $x\mathscr{G}$ группы Γ по подгруппе $\mathscr{G}$.

Задача 5. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *регулярным*, если каждая его точка p замкнута (т. е. если замкнуты все одноточечные множества $\{p\}\subset\mathscr{X}$) и для любой окрестности U произвольной точки $p\in\mathscr{X}$ существует такая окрестность V точки p, что $\overline{V}\subset U$. (Ср. более слабое определение 4 лекции III.14.)

Докажите, что:

а) *любое регулярное пространство хаусдорфово*;

б) *пространство* $\Gamma/\mathscr{G}$ *левых смежных классов группы* Γ *по подгруппе* $\mathscr{G}$ *тогда и только тогда регулярно (и, значит, хаусдорфово), когда подгруппа* $\mathscr{G}$ *замкнута.*

Замечание 2. В утверждении б задачи 5 никаких предположений о топологии группы Γ не делается (в частности, группа Γ хаусдорфовой не предполагается). Поэтому из этого утверждения, в частности, вытекает, что *для любой топологической группы* Γ *равносильны следующие утверждения*:

1) *единица* e *группы* Γ *замкнута*;

2) *группа* Γ *является хаусдорфовым топологическим пространством*;

3) *группа* Γ *является регулярным топологическим пространством.*

Задача 6. Докажите, что для любой группы Ли Γ и любой ее замкнутой подгруппы Ли $\mathscr{G}$ (т. е. подгруппы, одновременно являющейся замкнутым подмногообразием) факторпространство $\Gamma/\mathscr{G}$ представляет собой гладкое многообразие (размерности $\dim\Gamma-\dim\mathscr{G}$).

Пример 3. Для циклической группы второго порядка C_2 с образующей t формула

$$t(x)=-x, \qquad x\in\mathbb{S}^n,$$

определяет свободное действие группы C_2 на сфере $\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1};\ |x|=1\}$. Подпространство $(\mathbb{S}^n)^*$ состоит из точек вида $(x, \varepsilon x)$, где $\varepsilon=\pm 1$, а отображение сдвига действует по формуле $\tau(x, \varepsilon x)=t^a$, где $a=0$ при $\varepsilon=1$ и $a=1$ при $\varepsilon=-1$. Поскольку это отображение, очевидно, непрерывно, мы получаем, что *сфера* $\mathbb{S}^n$ *является главным* C_2*-пространством.* Базой соответствующего главного C_2-расслоения является n-мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$:

$$\mathbb{R}P^n=\mathbb{S}^n/C_2.$$

Заметим, что в этом примере тотальное пространство и база главного расслоения являются гладкими многообразиями, а структурная группа — группой Ли.

Если группа $\mathcal{G}$ непрерывно действует справа на пространстве $\mathcal{E}$ и слева на пространстве $\mathcal{F}$, то формула

$$(p, x)\,a=(pa, a^{-1}x),\qquad p\in\mathcal{E},\quad x\in\mathcal{F},\quad a\in\mathcal{G},$$

определяет на $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ правое — и, как легко видеть, непрерывное — действие группы $\mathcal{G}$.

Соответствующее факторпространство орбит $(\mathcal{E}\times\mathcal{F})/\mathcal{G}$ обозначается символом $\mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F}$ и называется *произведением над* $\mathcal{G}$ *пространств* $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

Орбиту $(p, x)\mathcal{G}$ точки $(p, x)\in\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ мы для сокращения формул будем, как правило, обозначать символом $[p, x]$ (или $[p, x]_{\mathcal{G}}$). Заметим, что по определению

$$[pa, x]=[p, ax]$$

для любого элемента $a\in\mathcal{G}$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\times\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/\mathcal{G}=\mathcal{B}, \end{array}$$

горизонтальными стрелками которой являются отображения факторизации, а левой вертикальной стрелкой — проекция прямого произведения $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ на первый множитель. Что же касается правой вертикальной стрелки, то она однозначно определяется требованием, чтобы получилась коммутативная диаграмма. (Действительно, если $[p, x]=[q, y]$ в $\mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F}$, т. е. $q=pa$, $x=ay$, то $p\mathcal{G}=q\mathcal{G}$, т. е. $\pi(p)=\pi(q)$ в $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. Поэтому формула $\pi[p, x]=p\mathcal{G}$ корректно определяет отображение

$$\pi\colon \mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F}\to\mathcal{B},$$

замыкающее диаграмму.) Из эпиоморфности отображения $\mathcal{E}\times\mathcal{F}\to\mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F}$ непосредственно вытекает, что *отображение* π *непрерывно*. Более того, из того, что отображения $\mathcal{E}\times\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}\to\mathcal{B}$ открыты, следует, что *отображение* π *открыто*. Поэтому, будучи надъективным отображением, *отображение* π *эпиоморфно* (т. е. топология в $\mathcal{B}$ является фактортопологией и по отношению к отображению π).

Таким образом, тройка

$$\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B}), \qquad \mathscr{E} = \mathcal{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} \mathscr{F}, \tag{11}$$

представляет собой расслоение, проекция π которого является открытым надъективным отображением. Пусть $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$ — слой расслоения (11) над точкой $b \in \mathscr{B}$. Пусть, далее, p_0 — такая точка пространства $\mathcal{E}$, что $p_0\mathscr{G} = b$. Тогда формула

$$j(x) = [p_0, x]_{\mathscr{G}}, \qquad x \in \mathscr{F}, \tag{12}$$

определяет непрерывное отображение $j\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}_{b_0}$. (Заметим, что это отображение зависит от выбора точки p_0.)

Если $[p, x] \in \mathscr{F}_b$, т. е. $p\mathscr{G} = b$, то $p = p_0 a$ для некоторого $a \in \mathscr{G}$ и поэтому $[p, x] = [p_0, ax] = j(ax)$. Следовательно, *отображение j надъективно*.

Далее, легко видеть, что *если действие группы $\mathscr{G}$ на пространстве $\mathcal{E}$ свободно, то отображение j биективно*. Действительно, если $j(x) = j(y)$, т. е. $[p_0, x] = [p_0, y]$, то $p_0 a = p_0$ и $x = ay$ для некоторого $a \in \mathscr{G}$. Но в силу свободности действия из равенства $p_0 a = p_0$ вытекает, что $a = e$. А тогда из равенства $x = ay$ следует, что $x = y$. $\square$

Обратное отображение $j^{-1}\colon \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}$ переводит каждую точку $[p, x] \in \mathscr{F}_b$ в точку $ax \in \mathscr{F}$, где a — такой элемент группы $\mathscr{G}$, что $p_0 a = p$. С другой стороны, в случае, когда группа $\mathscr{G}$ действует свободно, равенство $p_0 a = p$ означает, что $a = \tau(p_0, p)$, где τ — отображение сдвига (9). Следовательно,

$$j^{-1}([p, x]) = \tau(p_0, p)\, x.$$

Поэтому если отображение τ непрерывно, т. е. действие группы $\mathscr{G}$ на пространстве $\mathscr{E}$ главное, то отображение j^{-1} непрерывно и, значит, *отображение j представляет собой гомеорфизм*. Таким образом, в этом случае расслоение (11) обладает типичным слоем, которым служит пространство $\mathscr{F}$.

Определение 3. Расслоение (11), построенное по главному расслоению $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathscr{B})$ и левому $\mathscr{G}$-пространству $\mathscr{F}$ (а также любое изоморфное ему расслоение над $\mathscr{B}$), называется *расслоением со структурной группой $\mathscr{G}$ и слоем $\mathscr{F}$, ассоциированным с главным расслоением ξ*.

Обозначается это расслоение символом $\xi[\mathscr{F}]$.

Подчеркнем, что расслоения со структурной группой определяются не независимо, а только через главные расслоения.

Расслоения со структурной группой $\mathcal{G}$ мы будем называть также *$\mathcal{G}$-расслоениями.* (В литературе этот термин употребляется и в другом смысле—для расслоений вида (8), которые мы никак специально не называем.)

Замечание 3. Обратим внимание, что иа слоях $\mathcal{F}_b$ расслоения $\xi[\mathcal{F}]$ группа $\mathcal{G}$, вообще говоря, никак не действует.

Задача 7. Покажите, что если группа $\mathcal{G}$ абелева, то на слоях $\mathcal{F}_b$ расслоения $\xi[\mathcal{F}]$ можно естественным образом определить действие группы $\mathcal{G}$, по отношению к которому все гомеоморфизмы (12) эквивариантны.

Пусть $\xi'=(\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B}')$ и $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$—главные расслоения с одной и той же структуриой группой $\mathcal{G}$. Для любого левого $\mathcal{G}$-пространства $\mathcal{F}$ и любого эквивариантного отображеиия $\varphi\colon \mathcal{E}'\to\mathcal{E}$ формула

$$\varphi[\mathcal{F}]([p, x])=[\varphi(p), x], \qquad p\in\mathcal{E}', \ x\in\mathcal{F},$$

корректно определяет некоторое послойное отображение

$$\varphi[\mathcal{F}]\colon \ \xi'[\mathcal{F}]\to\xi[\mathcal{F}].$$

Если отображение φ гомеоморфно, то отображение $\varphi[\mathcal{F}]$ также гомеоморфио. Послойные гомеоморфизмы вида $\varphi[\mathcal{F}]$ мы будем называть *$\mathcal{G}$-изоморфизмами* расслоений со структурной группой $\mathcal{G}$. Таким образом, *два расслоения $\xi'[\mathcal{F}']$ и $\xi[\mathcal{F}]$ со структурной группой $\mathcal{G}$ тогда и только тогда $\mathcal{G}$-изоморфны, когда $\mathcal{F}'=\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$-изоморфны главные расслоения ξ' и ξ.* Конечно, расслоения $\xi'[\mathcal{F}]$ и $\xi[\mathcal{F}]$ могут быть изоморфны, ио ие $\mathcal{G}$-изоморфны.

Примеры расслоений со структурной группой.

Прнмер 4. Пусть группа $\mathcal{G}$ *тривиально действует* на $\mathcal{F}$, т. е. $ax=x$ для любого элемеита $a\in\mathcal{G}$ и любой точки $x\in\mathcal{F}$. Тогда $(p, x)\sim(q, y)$ в $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $x=y$ и $p\sim q$ в $\mathcal{E}$. Поэтому отображеиие

$$\mathcal{E}\times\mathcal{F}\xrightarrow{\pi\times\mathrm{Id}}\mathcal{B}\times\mathcal{F}, \quad (p, x)\mapsto(p\mathcal{G}, x),$$

индуцирует отображение $\varphi\colon \mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F}\to\mathcal{B}\times\mathcal{F}$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{E}\times\mathcal{F} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi"'] & & \mathcal{B}\times\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Поскольку два остальных отображения этой диаграммы непрерывны и открыты, отображение φ непрерывно и открыто. Кроме того, оно очевидным образом биективно. Следовательно, отображение φ является гомеоморфизмом. С другой стороны, если

$$\mathrm{pr}\colon \mathcal{B}\times\mathcal{F}\to\mathcal{B}, \quad (b, x)\mapsto b,$$

— проекция произведения $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ на первый множитель $\mathcal{B}$, то для любой точки $[p, x]$ из $\mathcal{E}\underset{\mathcal{G}}{\times}\mathcal{F}$ будет иметь место равенство

$$(\mathrm{pr}\circ\varphi)[p, x]=p\mathcal{G}=\pi([p, x]),$$

означающее, что φ является послойным гомеоморфизмом над $\mathcal{B}$ расслоения $\xi[\mathcal{F}]=(\mathcal{E}\underset{\mathcal{G}}{\times}\mathcal{F}, \pi, \mathcal{B})$ на расслоение $(\mathcal{B}\times\mathcal{F}, \mathrm{pr}, \mathcal{B})$.

Расслоение $(\mathcal{B}\times\mathcal{F}, \mathrm{pr}, \mathcal{B})$ (а также любое изоморфное ему расслоение над $\mathcal{B}$) называется *тривиальным*.

Таким образом, мы установили, что *если группа $\mathcal{G}$ тривиально действует на пространстве $\mathcal{F}$, то для любого главного расслоения ξ расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ тривиально* (и, значит, не зависит от ξ и даже от $\mathcal{G}$).

Пример 5. Пусть главное расслоение ξ тривиально, т. е. (см. пример 1) имеет вид $\xi=(\mathcal{B}\times\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$. Тогда формула

$$\varphi[p, x]_{\mathcal{G}}=(b, ax), \quad \text{где } p=(b, a), \quad b\in\mathcal{B}, \quad a\in\mathcal{G},$$

корректно определяет (проверьте!) послойное непрерывное отображение

$$\mathcal{E}\underset{\mathcal{G}}{\times}\mathcal{F}\to\mathcal{B}\times\mathcal{F}, \qquad \mathcal{E}=\mathcal{B}\times\mathcal{G},$$

являющееся гомеоморфизмом (с обратным отображением $(b, x)\mapsto[(b, e), x]$, где e — единица группы $\mathcal{G}$). Таким образом, *для тривиального главного $\mathcal{G}$-расслоения ξ и любого левого $\mathcal{G}$-пространства $\mathcal{F}$ расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ тривиально.*

Расслоения $\xi[\mathcal{F}]$, ассоциированные с тривиальным главным расслоением ξ, мы будем называть *тривиальными $\mathcal{G}$-расслоениями*. (Таким образом, в этой терминологии расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ из примера 4, являясь тривиальным расслоением и одновременно $\mathcal{G}$-расслоением, тривиальным $\mathcal{G}$-расслоением, вообще говоря, не будет.)

Пример 6. Каждый элемент a произвольной группы $\mathscr{G}$ определяет отображение $L_a\colon \mathscr{G}\to\mathscr{G}$, действующее по формуле

$$L_a b = ab, \qquad b\in\mathscr{G},$$

и называемое *левым сдвигом* на a. Соответствие $a\mapsto L_a$ задает левое действие группы $\mathscr{G}$ на множестве ее точек, являющееся в случае топологической группы $\mathscr{G}$ непрерывным действием. (Это действие свободно, но этот факт нам сейчас не нужен.) Поэтому для любого главного $\mathscr{G}$-расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ определено расслоение $\xi[\mathscr{G}]$. По определению тотальным пространством этого расслоения является факторпространство $\mathscr{E}\underset{\mathscr{G}}{\times}\mathscr{G}$ произведения $\mathscr{E}\times\mathscr{G}$ по действию

$$(p, a)g=(pg, g^{-1}a), \qquad p\in\mathscr{E},\ a,\ g\in\mathscr{G},$$

т. е. по отношению эквивалентности, в котором $(p, a)\sim\sim(q, b)$, p, $q\in\mathscr{E}$, a, $b\in\mathscr{G}$, тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g\in\mathscr{G}$, что $q=pg$ и $a=gb$. Поэтому формула $(p, a)\mapsto pa$ корректно определяет — очевидно, непрерывное — отображение $\mathscr{E}\underset{\mathscr{G}}{\times}\mathscr{G}\to\mathscr{E}$, обратное к непрерывному отображению

$$\varphi\colon\ \mathscr{E}\to\mathscr{E}\underset{\mathscr{G}}{\times}\mathscr{G},\quad p\mapsto[p, e]_{\mathscr{G}}.$$

Поскольку отображение φ послойно (диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \mathscr{E}\underset{\mathscr{G}}{\times}\mathscr{G} \arrow[dl] \\ & \mathscr{B} & \end{tikzcd}$$

коммутативна), этим доказано, что *расслоение* $\xi[\mathscr{G}]$ *изоморфно расслоению* ξ.

Пример 7. Пусть $\xi=(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{R}P^1)$ — главное C_2-расслоение из примера 3 (при $n=1$) и пусть I — отрезок $[-1, 1]$, на котором группа C_2 действует по формуле $t(x)=-x$ (где t — образующая группы C_2, а $x\in[-1, 1]$). Тогда тотальным пространством

$$\mathbb{S}^1\underset{C_2}{\times}I$$

соответствующего расслоения $\xi[I]$ будет лист Мёбиуса (докажите!).

Определение 4. Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — произвольное расслоение. Непрерывное отображение $s\colon \mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{E}$ называется *сечением* расслоения ξ, если

$$\pi\circ s=\mathrm{id},$$

т. е. если $s(b)\in\mathscr{F}_b$ для любой точки $b\in\mathscr{B}$. (Таким образом, наглядно говоря, сечение $s\colon \mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{E}$ выбирает в каждом слое $\mathscr{F}_b$ точку $s(b)$.)

Примеры сечений.

Пример 8. Каждое сечение s тривиального расслоения $(\mathscr{B}\times\mathscr{F}, \mathrm{pr}, \mathscr{B})$ действует по формуле

$$s(b)=(b, f(b)), \qquad b\in\mathscr{B}, \tag{13}$$

где $f\colon \mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{F}$ — некоторое непрерывное отображение. Обратно, любое непрерывное отображение $f\colon \mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{F}$ определяет по формуле (13) некоторое сечение $s\colon \mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ расслоения $(\mathscr{B}\times\mathscr{F}, \mathrm{pr}, \mathscr{B})$. Мы видим, следовательно, что *сечения тривиального расслоения* $(\mathscr{B}\times\mathscr{F}, \mathrm{pr}, \mathscr{B})$ *находятся в естественном биективном соответствии с непрерывными отображениями* $\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{F}$.

Таким образом, сечения можно рассматривать как обобщения непрерывных отображений.

Пример 9 (обобщение примера 8). Пусть расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ с типичным слоем $\mathscr{F}$ ассоциировано с главным $\mathscr{G}$-расслоением $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathscr{B})$. (В частности, $\mathscr{E}=\mathcal{E}\underset{\mathscr{G}}{\times}\mathscr{F}$; проекции расслоений ξ и $\xi=\xi[\mathscr{F}]$ мы для упрощения формул обозначаем одной и той же буквой.) Пусть, далее, $s\colon \mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{E}$ — произвольное сечение расслоения ξ. Для каждой точки $p\in\mathcal{E}$ точка $(s\circ\pi)(p)$ единственным образом представляется в виде $[p, f(p)]_{\mathscr{G}}$, где $f(p)\in\mathscr{F}$. Это задает некоторое отображение $f\colon \mathcal{E}\longrightarrow\mathscr{F}$. Оказывается, что *отображение f непрерывно.*

[На первый взгляд кажется, что это утверждение очевидно, поскольку отображение f однозначно характеризуется тем, что для него имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times f} & \mathcal{E}\times\mathscr{F}\\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ \mathscr{B} & \xrightarrow{s} & \mathcal{E}\underset{\mathscr{G}}{\times}\mathscr{F}=\mathscr{E},\end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются эпиморфными (и даже открытыми) отображениями. Однако на самом деле эта диаграмма помогает нам мало, поскольку прообраз произвольной точки $(p_0, x_0) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ при движении по левой, нижней и правой стрелкам диаграммы состоит (когда он не пуст, т. е. когда $x_0 = f(p_0)$) из всех точек орбиты $p_0\mathcal{G}$, тогда как прообраз точки (p_0, x_0) при верхней стрелке $\mathrm{id} \times f$ исчерпывается лишь точкой p_0. Поэтому доказательство непрерывности отображения f должно быть более тонким.]

Пусть $p_0 \in \mathcal{E}$ и $x_0 = f(p_0)$. Пусть, далее, U — произвольная окрестность точки x_0 в пространстве $\mathcal{F}$. Нам надо найти такую окрестность V точки p_0 в пространстве $\mathcal{E}$, что $fV \subset U$. С этой целью мы заметим, что поскольку действие группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{F}$ непрерывно, в группе $\mathcal{G}$ существует такая окрестность единицы O, а в пространстве $\mathcal{F}$ — такая окрестность U' точки x_0, что $OU' \subset U$ (т. е. $ax \in U$ для любого элемента $a \in O$ и любой точки $x \in U'$). Аналогично, поскольку отображение сдвига (9) и сечение s непрерывны, в пространстве $\mathcal{E}$ существует такая окрестность V' точки p_0, что $\tau((V' \times V') \cap \mathcal{E}^*) \subset O$, а в пространстве $\mathcal{B}$ — такая окрестность W точки $b_0 = \pi(p_0)$, что $s(W) \subset \pi(V' \times U')$ (так как отображение π открыто, то множество $\pi(V' \times U')$ открыто в $\mathcal{E} = \mathcal{E} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}$). Мы положим $V = \pi^{-1}W \cap V'$.

Если $p \in V$, то $\pi(p) \in W$ и $(s \circ \pi)(p) \in \pi(V' \times U')$, т. е. $(s \circ \pi)(p) = [q, x]$, где $q \in V'$ и $x \in U'$. С другой стороны, по определению $(s \circ \pi)(p) = [p, f(p)]$. Поэтому в группе $\mathcal{G}$ существует такой элемент $a = \tau(q, p)$, что $p = qa$ и $f(p) = ax$. Но, так как $q \in V'$ и $p \in V'$, то $a = \tau(q, p) \in O$, и значит — поскольку $x \in U'$, — что $f(p) \in OU' \subset U$. Следовательно, $fV \subset U$. □

По определению для любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любого элемента $a \in \mathcal{G}$ имеет место равенство $(s \circ \pi)(pa) = [pa, f(pa)] = [p, af(pa)]$. С другой стороны, $(s \circ \pi)(pa) = (s \circ \pi)(p) = [p, f(p)]$. Этим доказано, что

$$f(pa) = a^{-1}f(p), \qquad p \in \mathcal{E},\ a \in \mathcal{G}. \tag{14}$$

Обратно, если f — произвольное непрерывное отображение $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, удовлетворяющее соотношению (14), и если $\pi(p) = \pi(q)$, т. е. $q = pa$, то

$$[q, f(q)] = [pa, a^{-1}f(p)] = [p, f(p)].$$

Это показывает, что формула

$$s(b) = [p, f(p)]_{\mathcal{G}}, \qquad b = \pi(p),$$

корректно определяет некоторое сечение s расслоения $\xi=\xi[\mathscr{F}]$.

Таким образом, мы видим, что *сечения расслоения* ξ *находятся в естественном биективном соответствии с непрерывными отображениями* $f\colon \mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$, *удовлетворяющими соотношению* (14). $\square$

Замечание 4. Левое $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ является правым $\mathscr{G}$-пространством относительно действия $a\longmapsto R_a$, определениого формулой

$$R_a x = a^{-1}x, \qquad x\in\mathscr{F}.$$

По отношеиию к этому действию условие (14) означает, что *отображение f эквивариантно*.

Если группа $\mathscr{G}$ тривиально действует на пространстве $\mathscr{F}$ (и, значит, расслоение $\xi=\xi[\mathscr{F}]$ тривиально), условие (14) приобретает вид

$$f(pa)=f(p), \qquad p\in\mathscr{E},\ a\in\mathscr{G}, \tag{15}$$

и потому формула

$$\bar{f}(b)=f(p), \text{ если } b=\pi(p) \text{ (т. е. } b=p\mathscr{G}), \tag{16}$$

корректно определяет отображение $\bar{f}\colon \mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{F}$, замыкающее диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathscr{B} \arrow[rr, "\bar{f}"'] & & \mathscr{F}
\end{tikzcd}$$

Поскольку проекция π является эпиоморфизмом, отображение $\bar{f}$ иепрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображеиие f.

Следовательно, формула (16) устанавливает биективное соответствие между непрерывными отображениями $\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$, удовлетворяющими соотношению (15), и произвольными непрерывными отображениями $\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{F}$.

С другой стороны, имеющий место в рассматриваемом случае послойный изоморфизм $\mathscr{E}\times_{\mathscr{G}}\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ устаиавливается соответствием $[p, x]\longrightarrow(\pi(p), x)$ (см. выше пример 4). Следовательно, этот изоморфизм переводит сечение s расслоения $\xi=\xi[\mathscr{F}]$, отвечающее отображеиию f, в сечение $b \mapsto (b, \bar{f}(b))$ тривиального расслоения $(\mathcal{B}\times\mathcal{F}$, pr, $\mathcal{B})$, отвечающее отображению $\bar{f}$.

Таким образом, мы видим, что пример 9 действительно является обобщением примера 8.

Пример 10. Пусть для действия группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{F}$ существует *неподвижная точка* (т. е. такая точка x_0, что $ax_0 = x_0$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$). Тогда формула $f(p) = x_0$, $p \in \mathcal{E}$, определяет отображение $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, удовлетворяющее соотношению (14). Соответствующее сечение задается формулой

$$s(b) = [p, x_0], \qquad b = \pi(p)$$

(эта формула корректно определяет s, так как $[pa, x_0] = [p, x_0]$ для любого $a \in \mathcal{G}$). Таким образом *каждая неподвижная точка $\mathcal{G}$-пространства $\mathcal{F}$ задает сечение расслоения $\xi = \xi[\mathcal{F}]$.*

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 11. Для тривиального главного расслоения $\xi = (\mathcal{B}\times\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ формула

$$s(b) = (b, e), \qquad b \in \mathcal{B},$$

где e — единица группы $\mathcal{G}$, определяет сечение s этого расслоения. В то же время ξ является, как мы знаем (см. пример 5), расслоением вида $\xi[\mathcal{F}]$, слоем $\mathcal{F}$ которого служит группа $\mathcal{G}$, рассматриваемая как $\mathcal{G}$-пространство относительно действия левыми сдвигами, и потому вообще не имеющего неподвижных точек.

Интересно, что в классе главных расслоений это является единственным исключением. Действительно, для произвольного главного $\mathcal{G}$-расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, обладающего сечением $s\colon \mathcal{B} \to \mathcal{E}$, формула

$$\varphi(b, a) = s(b)a, \qquad b \in \mathcal{B},\ a \in \mathcal{G},$$

определяет — очевидно, непрерывное — отображение

$$\varphi\colon \mathcal{B}\times\mathcal{G} \to \mathcal{E}.$$

Поскольку $s(b)(ag) = (s(b)a)g$, $g \in \mathcal{G}$, это отображение эквивариантно. С другой стороны, формула

$$\psi(p) = (\pi(p), \tau((s\circ\pi)p, p)), \qquad p \in \mathcal{E},$$

определяет непрерывное отображение $\psi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}\times\mathcal{G}$, для которого $(\varphi\circ\psi)(p) = (s\circ\pi)(p)\tau((s\circ\pi)p, p) = p$ и $(\psi\circ\varphi)(b, a) = (\pi(s(b)a), \tau((s\circ\pi)(s(b)a), s(b)a)) = (b, a)$, т. е. такое, что $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}$ и $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}$. Следовательно, отображение φ является эквивариантным гомеоморфизмом (изоморфизмом главных $\mathcal{G}$-расслоений). Таким образом, *главное $\mathcal{G}$-расслоение тогда и только тогда обладает сечением, когда оно тривиально.*

В силу результатов примеров 9 и 10 (и равенства $\xi=\xi[\mathcal{G}]$) отсюда немедленно следует, что *главное $\mathcal{G}$-расслоение $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ тогда и только тогда тривиально, когда существует непрерывное отображение $f\colon \mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{G}$, удовлетворяющее соотношению* (14).

Пусть снова $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное расслоение. Для любого подмножества $U\subset\mathcal{B}$ положим $\mathcal{E}_U=\pi^{-1}U$ и $\pi_U=\pi|_{\mathcal{E}_U}$. Тройка $(\mathcal{E}_U, \pi_U, U)$ называется *частью расслоения* ξ над U и обозначается через $\xi|_U$.

Для главного расслоения $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ подпространство $\mathcal{E}_U=\pi^{-1}U$ также является $\mathcal{G}$-пространством (если $p\in\mathcal{E}_U$, то $pa\in\mathcal{E}_U$ для любого $a\in\mathcal{G}$) и, как легко видеть, главным. Это означает, что *для главного расслоения ξ каждое расслоение вида $\xi|_U$ также главное.* При этом ясно, что для любого левого $\mathcal{G}$-пространства $\mathcal{F}$ имеет место равенство (естественный $\mathcal{G}$-изоморфизм)

$$\xi[\mathcal{F}]|_U=\xi|_U[\mathcal{F}].$$

Таким образом, *часть над U произвольного $\mathcal{G}$-расслоения также является $\mathcal{G}$-расслоением.*

Определение 5. Расслоение ξ с типичным слоем $\mathcal{F}$ называется *локально тривиальным*, если существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы $\mathcal{B}$, над каждым элементом U_α которого расслоение ξ (точнее — расслоение $\xi|_{U_\alpha}$) тривиально. Это означает, что для $\xi|_{U_\alpha}$ имеет место коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha\times\mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & \mathcal{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}U_\alpha \arrow[dl, "\pi_\alpha=\pi|_{U_\alpha}"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

верхняя строчка φ_α которой является гомеоморфизмом.

Гомеоморфизм φ_α называется *тривиализацией* расслоения ξ над U_α, а окрестность U_α — *тривиализирующей окрестностью.*

В случае, когда расслоение ξ является $\mathcal{G}$-расслоением от тривиализаций φ_α, дополнительно требуется, чтобы они были $\mathcal{G}$-изоморфизмами.

Легко видеть (докажите!), что $\mathcal{G}$-расслоения, ассоциированные с локально тривиальным главным $\mathcal{G}$-расслоением, локально тривиальны даже и в этом более строгом смысле.

В дальнейшем все рассматриваемые расслоения мы практически всегда будем предполагать локально тривиальными.

В дифференциальной геометрии особую роль играют локально тривиальные расслоения с типичным слоем $\mathbb{R}^n$ и структурной группой $GL(n; \mathbb{R})$ (естественно действующей на $\mathbb{R}^n$). Оказывается, что такие расслоения—они называются *векторными*—допускают прямое определение, не апеллирующее к соответствующему главному расслоению. Мы рассмотрим эти расслоения в лекции 6.