Лекция 2

Накрытия.— Примеры накрытий.— Замечания о иакрытиях.— Теорема о накрывающем пути.—Уточнение этой теоремы.— Расслоения в смысле Гуревича.

Пусть

$$(1) \qquad \pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$$

— непрерывное отображение. Говорят, что открытое множество $U \subset \mathscr{B}$ *ровно накрыто* отображением π, если полный прообраз $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$ этого множества — когда он не пуст — является дизъюнктным объединением открытых множеств $V_\nu \subset \mathscr{E}$:

$$\pi^{-1}U = \coprod_\nu V_\nu,$$

обладающих тем свойством, что для любого ν отображение

$$(2) \qquad \pi|_{V_\nu}\colon V_\nu \to U$$

является гомеоморфизмом.

Пусть пространство $\mathscr{B}$ связно (см. лекцию III.11).

Определение 1. Отображение (1) называется *накрытием* или *накрывающим отображением*, если:

а) пространство $\mathscr{E}$ связно;

б) существует открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ пространства $\mathscr{B}$, состоящее из множеств, ровно накрытых отображением (1)..

Накрытием называют также тройку $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, состоящую из пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ и накрывающего отображения $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Замечание 1. Условие **б** заведомо выполнено, если ξ является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем $\mathscr{F}$. Обратно, пусть ξ — накрытие, b_0 — произвольная точка пространства $\mathscr{B}$ и пусть $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{b_0}$ — слой накрытия ξ над точкой b_0. Рассмотрим множество $C \subset \mathscr{B}$, состоящее из всех точек $b \in \mathscr{B}$, для которых слой $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$ равномощен множеству $\mathscr{F}$. Если U_α — такой элемент покрытия $\mathfrak{U}$, что $C \cap U_\alpha \neq \varnothing$, то, очевидно, $U_\alpha \subset C$. Поэтому множество C одновременно открыто и замкнуто (если $b \in \overline{C}$ и $b \in U_\alpha$, то $C \cap U_\alpha \neq \varnothing$ и, значит, $U_\alpha \subset C$). Поскольку оно непусто (ибо $b_0 \in C$), а пространство $\mathscr{B}$ связно, это возможно только при $C = \mathscr{B}$. Следовательно, все слои отображения (1) равномощны $\mathscr{F}$ и, значит, $\mathscr{F}$ является типичным слоем этого отображения. Это означает, что для любого α множество $\mathscr{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}U_\alpha$ послойно гомеоморфно произведению $U_\alpha\times\mathscr{F}$, т. е., другими словами, что ξ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathscr{F}$. Таким образом, *накрытия—это в точности локально тривиальные расслоения над связным пространством, слои которых дискретны, а тотальные пространства связны.*

В частности, *любое накрытие* (1) *является надъективным отображением.*

Тотальное пространство $\mathscr{E}$ накрытия ξ называется также *накрывающим пространством.*

В случае, когда все слои накрытия конечны (и, следовательно, состоят из одного и того же числа точек), накрытие называется *конечнолистным*, а число точек слоев называется его *числом листов.* (Заметим, что понятие листа накрытия не определяется.)

Примеры накрытий

Пример 1. Формула

$$\pi(t)=(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t),\qquad t\in\mathbb{R},$$

задает накрытие $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{S}^1$ окружности $\mathbb{S}^1=\{(x,y);\ x^2+y^2=1\}$ прямой $\mathbb{R}$.

В комплексной координате $z=x+iy$ это накрытие задается формулой

$$\pi(t)=e^{2\pi it},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Наглядно накрытие π состоит в том, что прямая наматывается на окружность. Его слоями являются дискретные подпространства вида $\{t_0+2\pi N,\ N=0,\ \pm1,\ \ldots\}$ (смежные классы группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $2\pi\mathbb{Z}$) и любая открытая дуга окружности $\mathbb{S}^1$ (даже с совпадающими концами) ровно накрывается посредством отображения $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{S}^1$.

Композиция с π позволяет рассматривать каждую функцию $\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{R}$ на $\mathbb{S}^1$ как периодическую функцию на $\mathbb{R}$. (Этот переход от $\mathbb{S}^1$ к $\mathbb{R}$ равносилен введению на $\mathbb{S}^1$ угловой координаты; см. лекцию III.20, стр. 325.)

Пример 2. Формула

$$\pi(t_1,\ t_2)=(e^{2\pi it_1},\ e^{2\pi it_2}),\qquad t_1,\ t_2\in\mathbb{R},$$

задает накрытие

$$\pi\colon\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbf{T}^2,$$

где $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — двумерный тор. Слоями этого накрытия являются смежные классы группы $\mathbb{R}^2$ по подгруппе $2\pi\mathbb{Z}$. Ограничение отображения π на квадрат $I^2 = \{(t_1, t_2);\ 0 \leqslant t_1 \leqslant \leqslant 1,\ 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$ позволяет представить тор $\mathbb{T}^2$ в виде квадрата I^2 с отождествленными противоположными сторонами.

Конечно, этот пример немедленно обобщается на любое n.

Кроме того, он подсказывает, что *для любых двух накрытий* $\pi_1\colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{B}_1$ *и* $\pi_2\colon \mathscr{E}_2 \to \mathscr{B}_2$ *отображение*

$$\pi_1 \times \pi_2\colon \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2 \to \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2, \quad (p_1, p_2) \mapsto (\pi_1(p_1), \pi_2(p_2)),$$

также является накрытием.

Задача 1. Докажите последнее утверждение. (Не забудьте доказать, что для связных пространств $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ пространство $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ также связно.)

Примеры 1 и 2 можно обобщить и в другом направлении.

Пример 3. Подгруппа Γ топологической группы $\mathscr{G}$ называется *дискретной*, если существует такая окрестность U единицы e группы $\mathscr{G}$, что $U_a \cap U_b = \varnothing$ для любых двух различных элементов $a,\ b \in \Gamma$. (Такая подгруппа является дискретным подпространством группы $\mathscr{G}$. Вопрос: верно ли обратное?) Легко видеть (докажите!), *что для любой дискретной подгруппы* Γ *связной топологической группы* $\mathscr{G}$ *естественная проекция*

$$\pi\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}/\Gamma, \quad g \mapsto g\Gamma, \qquad g \in \mathscr{G},$$

является накрытием.

Это накрытие тогда и только тогда конечнолистно, когда группа Γ конечна, и в этом случае число его листов равно порядку группы Γ.

Пример 4. Для любого $n \geqslant 1$ группа $\mathbb{S}^1$ содержит конечную (и потому дискретную) группу Γ, состоящую из точек вида $e^{2\pi i k/n}$, $k = 1, \ldots, n$. При этом отображение

$$\mathbb{S}^1/\Gamma \to \mathbb{S}^1, \quad e^{it}\Gamma \mapsto e^{int},$$

является, как легко видеть, гомеоморфизмом. Поэтому его композиция с естественной проекцией $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\Gamma$ даст нам конечнолистное накрытие

$$\pi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \tag{3}$$

число листов которого равно n.

Наглядно это накрытие состоит в том, что окружность $\mathbb{S}^1$ навивается n раз на саму себя.

Задача 2 (обобщение примера 4). Докажите, что

а) для любых линейно независимых целочисленных векторов (m_1, m_2) и (n_1, n_2) все точки тора $\mathbb{T}^2$ вида

$$\left(e^{2\pi i(m_1k+m_2l)/\Delta},\ e^{2\pi i(n_1k+n_2l)/\Delta}\right), \qquad \Delta=\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix},$$

где $k, l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, составляют конечную подгруппу порядка $|\Delta|$;

б) соответствующее факторпространство $\mathbb{T}^2/\Gamma$ гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2$.

Тем самым мы получаем $|\Delta|$-листное накрытие

$$\pi\colon \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \tag{4}$$

тора тором. При $(m_1, m_2)=(1, 0)$ и $(n_1, n_2)=(0, n)$ оно имеет вид

$$\pi'\times \mathrm{id}\colon \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2, \tag{5}$$

где $\pi'\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ — накрытие (3), а при $(m_1, m_2)=(m, 0)$ и $(n_1, n_2)=(0, 1)$ — вид

$$\mathrm{id}\times\pi'\colon \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2, \tag{6}$$

где теперь $\pi'\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ — накрытие (3), построенное для числа m.

Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ и $\xi'=(\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B})$ — два накрытия одного и того же пространства $\mathscr{B}$.

В соответствии с общими определениями лекции 1 гомеоморфизм $f\colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ называется *изоморфизмом* накрытия ξ на накрытие ξ', если он переводит слои в слои, т. е. если диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{E}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathscr{B} & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Задача 3. Докажите, что любое накрытие вида (4) изоморфно композиции накрытий вида (5) и (6).

Пример 5 (обобщение примера 3). Пусть дискретная группа Γ непрерывно действует слева (см. лекцию 1) на топологическом пространстве $\mathscr{E}$. Это действие называется *дискретным*, если каждая точка $p\in\mathscr{E}$ обладает такой окрестностью V, что

$$\gamma V\cap V=\varnothing \text{ для любого элемента } \gamma\neq e \text{ группы } \Gamma,$$

где γV — подмножество пространства $\mathscr{E}$, состоящее из всех точек вида γp, $p\in V$. Ясно, что любое дискретное действие свободно.

Задача 4. Докажите, что *любое дискретное действие является главным* (см. лекцию 1).

Пусть U — образ окрестности V при естественной проекции

$$\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\Gamma, \quad p \mapsto \Gamma p, \qquad p \in \mathscr{E}.$$

Так как

$$\pi^{-1}U = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\Gamma \tag{7}$$

и все множества γV открыты, то множество $\pi^{-1}U$ также открыто. Следовательно, по определению фактортопологии множество U открыто. Кроме того, так как ограничение отображения π на каждом множестве γV является гомеоморфизмом этого множества на открытое множество U (докажите!) и имеет место разложение (7), то множество U ровно накрыто отображением π. Поскольку множества вида U составляют базу открытых множеств факторпространства $\mathscr{E}/\Gamma$, этим доказано, что *для любого дискретного действия* $\Gamma \times \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ *проекция* $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\Gamma$ *является накрытием.*

Конечно, накрытием будет и проекция $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\Gamma$ для любого дискретного правого действия $\mathscr{E} \times \Gamma \to \mathscr{E}$.

Пример 6. Иной класс накрытий доставляет нам теория функций комплексной переменной.

Напомним, что любую (вообще говоря, многозначную) аналитическую функцию $w = w(z)$, определенную в области G расширенной плоскости комплексной переменной, можно рассматривать как однозначную функцию на ее римановой поверхности $\mathscr{X}$, являющейся одномерным комплексно-аналитическим (и, значит, двумерным вещественно-аналитическим) многообразием, проектирующимся на область G. При этом проекция $\pi\colon \mathscr{X} \to G$ ровно накрывает любое открытое множество $U \subset G$, не содержащее так называемых точек ветвления функции w. Поэтому, удалив из G точки ветвления (а из $\mathscr{X}$ их прообразы), мы получим накрытие.

В частном случае, когда функция $w = w(z)$ является функцией, обратной к голоморфной однозначной функции $z = z(w)$, это накрытие осуществляется функцией $z = z(w)$ (после удаления из области определения этой функции всех точек, в которых равна нулю ее производная).

Например, функция $z = w^n$ осуществляет n-листное накрытие $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а функция $z = e^w$ — бесконечнолистное накрытие $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В случае, когда пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ являются гладкими (или комплексно-аналитическими) многообразиями, накрытие $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ называется *гладким* (соответственно *комплексно-аналитическим*), если каждая точка $b \in \mathcal{B}$ обладает такой ровно накрытой окрестностью U, что все отображения (2) являются диффеоморфизмами (комплексно-аналитическими гомеоморфизмами).

Конечно, любое гладкое накрытие $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ является гладким отображением. Однако существуют накрытия, представляющие собой гладкие отображения $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$, но, тем не менее, гладкими накрытиями не являющиеся. Примером может служить любое гладкое гомеоморфное отображение, не являющееся диффеоморфизмом.

Накрытия из примеров 1, 2 и 4 (а также накрытия из задачи 2) очевидно гладки.

Задача 5. Докажите, что *если для накрытия* $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ *пространство* $\mathcal{B}$ *является гладким* (*или комплексно-аналитическим*) *многообразием, то на* $\mathcal{E}$ *существует единственная гладкость* (*комплексно-аналитическая структура*), *по отношению к которой* $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ *является гладким* (*соответственно комплексно-аналитическим*) *накрытием*. [Указание. Картами этой гладкости являются пары вида $(V, k \circ \pi)$, где k — координатное отображение произвольной ровно накрытой координатной окрестности $U \subset \mathcal{B}$, а V — такое множество, что отображение $\pi|_V$ является гомеоморфизмом $V \to U$.]

Условие связности накрывающего пространства исключает из накрытий все тривиальные расслоения $\mathcal{B} \times \mathcal{F} \to \mathcal{B}$, для которых множество (дискретное пространство) $\mathcal{F}$ содержит более одной точки.

С другой стороны, тождественное отображение $\mathrm{id}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ является, очевидно, накрытием.

Накрытием будет и произвольный гомеоморфизм $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$.

Такие накрытия называются *тривиальными* (или *однолистными*).

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, "\pi^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

показывает, что *накрытие тогда и только тогда тривиально, когда оно изоморфно накрытию* id: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$.

Пространство $\mathscr{B}$ мы будем называть *ненакрываемым*, если любое его накрытие тривиально.

Нашей основной целью будет описание — с точностью до изоморфизма — всех накрытий данного пространства $\mathscr{B}$ и, в частности, выяснение того, когда пространство $\mathscr{B}$ ненакрываемо. При этом мы будем требовать, чтобы пространство $\mathscr{B}$ было хаусдорфовым, линейно связным, локально линейно связным (см. лекцию III.15) и, кроме того, обладало неким свойством полулокальной односвязности, которое мы введем ниже в своем месте. Без этих требований теория накрытий сильно усложняется и вместе с тем они выполнены практически во всех геометрически интересных ситуациях (в частности, в случае, когда $\mathscr{B}$ является связным хаусдорфовым многообразием).

Ясно, что если множество $U \subset \mathscr{B}$ ровно накрыто отображением (1), то любое его подмножество $U' \subset U$ также ровно накрыто. Поэтому все ровно накрытые открытые множества $U \subset \mathscr{B}$ составляют базу открытых множеств пространства $\mathscr{B}$, а если пространство $\mathscr{B}$ локально линейно связно, то базу будут составлять и все линейно связные, ровно накрытые открытые множества.

Аналогично все открытые множества $V \subset \mathscr{E}$, ровно накрывающие открытые множества $U \subset \mathscr{B}$, составляют базу открытых множеств пространства $\mathscr{E}$. Если же пространство $\mathscr{E}$ или — что, очевидно, равносильно — пространство $\mathscr{B}$, локально линейно связно, то базу будут составлять и все линейно связные, ровно накрывающие открытые множества.

Мы видим, в частности, что *любое накрытие* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *является локальным гомеоморфизмом* (каждая точка $p \in \mathscr{E}$ обладает окрестностью V, гомеоморфно отображающейся на некоторую окрестность U точки $\pi(p) = b$) и, значит, *представляет собой открытое отображение.*

Ясно, что любое локальное свойство пространства $\mathscr{B}$ наследуется каждым его накрывающим пространством $\mathscr{E}$ (мы выше это уже заметили в отношении свойства локальной линейной связности). То же самое верно и по отношению к (не локальному!) свойству хаусдорфовости: *если пространство* $\mathscr{B}$ *хаусдорфово, то пространство* $\mathscr{E}$ *также хаусдорфово.* Действительно, пусть p и q — различные точки пространства $\mathscr{E}$. Если $\pi(p) = \pi(q)$, то для любой ровно накрытой окрестности U точки $\pi(p)$ точки p и q принадлежат двум различным открытым множествам V_1 и V_2, ровно накрывающим окрестность U. Поэтому в этом случае условие хаусдорфовости для точек p и q заведомо выполнено. Если же $\pi(p) \neq \pi(q)$, то в силу хаусдорфовости пространства $\mathscr{B}$ точки $\pi(p)$ и $\pi(q)$ обладают в $\mathscr{B}$ непересекающимися окрестностями U_1 и U_2, прообразы $V_1 = \pi^{-1}U_1$ и $V_2 = \pi^{-1}U_2$ которых и будут непересекающимися окрестностями точек p и q в $\mathscr{E}$. $\square$

Для решения задачи об описании всех накрытий мы должны начать довольно издалека.

Напомним (см. лекцию III.11, определение 2), что *путем* в топологическом пространстве $\mathscr{X}$ называется непрерывное отображение

$$u: I \to \mathscr{X}$$

отрезка $I = [0,1]$ в пространство $\mathscr{X}$. Точка $p_0 = u(0)$ называется *началом* пути u, а точка $p_1 = u(1)$—его *концом*. Говорят также, что путь u *соединяет* точку p_0 с точкой p_1.

Пусть π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$—пока произвольное непрерывное отображение (расслоение).

Говорят, что путь v: $I \to \mathscr{E}$ пространства $\mathscr{E}$ *накрывает* (посредством отображения π) путь u: $I \to \mathscr{B}$ пространства $\mathscr{B}$, если $u = \pi \circ v$.

Следующее свойство накрытий лежит в основе всей их теории.

Теорема 1 (о существовании и единственности накрывающего пути). *Пусть π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ — произвольное накрытие, p_0—произвольная точка пространства $\mathscr{E}$ и u: $I \to \mathscr{B}$—произвольный путь пространства $\mathscr{B}$, начинающийся в точке $b_0 = \pi(p_0)$. Тогда существует путь v: $I \to \mathscr{E}$ пространства $\mathscr{E}$, начинающийся в точке p_0 и накрывающий путь u:*

$$u = \pi \circ v, \quad u(0) = p_0.$$

Если пространство $\mathscr{B}$ хаусдорфово, то путь v единственен.

Доказательство. Единственность. Пусть существуют два пути v и v', накрывающие путь u и начинающиеся в точке p_0.

Рассмотрим подмножество C отрезка I, состоящее из таких чисел t, что $v(t) = v'(t)$. Это подмножество содержит нуль и потому непусто.

По условию для любой точки $t_0 \in C$ в $\mathscr{E}$ существует окрестность V точки $v(t_0) = v'(t_0)$, гомеоморфно проектирующаяся на некоторую окрестность U точки $\pi(v(t_0)) =$

$=u(t_0)$. Поскольку отображения v и v' непрерывны, существует такое $\delta > 0$, что $v(t) \in V$ и $v'(t) \in V$ при $|t-t_0| < \delta$.

Но если $v(t)$, $v'(t) \in V$, то в силу биективности отображения π на V необходимо имеет место равенство $v(t) = v'(t)$ и, значит, $t \in C$. Таким образом, для любой точки $t_0 \in I$ существует такое $\delta > 0$, что все точки $t \in I$, для которых $|t-t_0| < \delta$, принадлежат C. По определению это означает, что C открыто в I.

С другой стороны, множество C является не чем иным, как прообразом диагонали $\Delta = \{(p, p); p \in \mathscr{E}\}$ при непрерывном отображении $I \to \mathscr{E} \times \mathscr{E}$, переводящем точку $t \in I$ в точку $(v(t), v'(t)) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$. Поэтому, так как пространство $\mathscr{B}$ — а значит и пространство $\mathscr{E}$ — по условию хаусдорфово (и, следовательно, диагональ Δ замкнута), то множество C замкнуто.

Являясь непустым, открытым и замкнутым подмножеством отрезка I, множество C совпадает — в силу связности отрезка I — со всем этим отрезком. Следовательно, $v(t) = v'(t)$ для любого $t \in I$, т. е. $v = v'$.

С у щ е с т в о в а н и е. Из компактности отрезка I немедленно вытекает, что на этом отрезке существуют такие числа

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1,$$

а в пространстве $\mathscr{B}$ — такие ровно накрытые окрестности

$$U_1, \ldots, U_n,$$

что для любого $i = 1, \ldots$ точки $u(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, принадлежат окрестности U_i. Предположим, что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, путь v уже построен на отрезке $[0, t_{i-1}]$, т. е. построено такое отображение v: $[0, t_{i-1}] \to \mathscr{E}$, что $v(0) = p_0$ и $\pi \circ v = u$ на $[0, t_{i-1}]$. (При $i = 1$ это предположение автоматически выполнено.) Так как $u(t_{i-1}) \in U_i$, то в пространстве $\mathscr{E}$ существует окрестность V_i точки $v(t_{i-1})$, ровно накрывающая окрестность U_i.

Пусть s_i — гомеоморфизм $U_i \to V_i$, обратный к гомеоморфизму π: $V_i \to U_i$. Мы доопределим путь v на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, полагая

$$v(t) = s_i(u(t)) \qquad \text{для любого} \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Тем самым, накрывающий путь v будет, очевидно, построен и на отрезке $[0, t_i]$, а значит — после n шагов — на всем отрезке I. □

Теорему 1 можно существенно уточнить, но для этого ее нужно предварительно переформулировать.

Для произвольного топологического пространства $\mathscr{X}$ (как правило, линейно связного) символом $\mathscr{P}(\mathscr{X})$ мы будем обозначать множество всех путей в $\mathscr{X}$. Символом же $\langle K, U\rangle$, где K — замкнутое (=компактное) подмножество отрезка I, а U — открытое подмножество пространства $\mathscr{X}$, мы будем обозначать подмножество множества $\mathscr{P}(\mathscr{X})$, состоящее из всех путей u: $I \to \mathscr{X}$, обладающих тем свойством, что

$$u(t) \in U \qquad \text{при} \quad t \in K.$$

Всевозможные конечные пересечения множеств вида $\langle K, U\rangle$ мы можем принять за базу некоторой топологии на $\mathscr{P}(\mathscr{X})$.

Определение 2. Эта топология называется *компактно-открытой топологией* множества $\mathscr{P}(\mathscr{X})$.

В дальнейшем мы всегда будем считать множество $\mathscr{P}(\mathscr{X})$ снабженным компактно-открытой топологией.

Определение 3. *Коцилиндром* $\operatorname{Cocyl}\pi$ непрерывного отображения π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ называется подпространство прямого произведения $\mathscr{E} \times \mathscr{P}(\mathscr{B})$, состоящее из таких пар (p_0, u), $p_0 \in \mathscr{E}$, u: $I \to \mathscr{B}$, что

$$\pi(p_0) = u(0).$$

[На языке теории категорий подпространство $\operatorname{Cocyl}\pi$ является не чем иным, как к о а м а л ь г а м о й диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & \mathscr{P}(\mathscr{B}) \\ & & \downarrow \\ \mathscr{E} & \xrightarrow{\pi} & \mathscr{B}, \end{array}$$

вертикальная стрелка которой представляет собой отображение $\mathscr{P}(\mathscr{B}) \to \mathscr{B}$, переводящее произвольный путь u в точку $u(0)$.]

Принадлежность пары $(p_0, u) \in \mathscr{E} \times \mathscr{P}(\mathscr{B})$ к подпространству $\operatorname{Cocyl}\pi$ является необходимым условием того, чтобы для пути u существовал накрывающий путь v: $I \to \mathscr{E}$, начинающийся в точке p_0. Достаточным же условием является прииадлежность пары (p_0, u) к образу — очевидно, непрерывного отображения

$$\pi_{\mathrm{I}}\colon\ \mathscr{P}(\mathscr{E}) \to \operatorname{Cocyl}\pi,$$

определенного формулой

$$\pi(v) = (v(0),\ \pi \circ v), \qquad v \in \mathscr{P}(\mathscr{E}).$$

Поэтому *задача построения накрывающего пути разрешима для любой пары* (p_0, u) *тогда и только тогда, когда отображение* π_{I} *надъективно*. При этом задание для каждой пары $(p_0, u) \in \mathrm{Cocyl}\,\pi$ накрывающего пути v означает построение для отображения $\pi_!$ некоторого сечения, т. е.— см. лекцию 1 — такого отображения

$$s\colon \mathrm{Cocyl}\,\pi \to \mathscr{P}(\mathscr{E}),$$

что $\pi_! \circ s = \mathrm{id}$.

Мы видим, следовательно, что теорема 1 — для хаусдорфова пространства $\mathscr{B}$ — равносильна утверждению, что *для любого накрытия $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ отображение $\pi_!$ допускает единственное сечение, т. е. что отображение $\pi_!$ биективно.* Однако эта теорема ничего не говорит о том, будет ли это сечение непрерывным отображением (и, значит, отображение $\pi_!$ гомеоморфизмом). Теперь мы можем заполнить этот пробел.

Предложение 1. *Для любого накрытия $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ хаусдорфова пространства $\mathscr{B}$ отображение*

$$\pi_!\colon \mathscr{P}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Cocyl}\,\pi, \quad v \mapsto (v(0),\ \pi \circ v),$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого компактного множества $K \subset I$ и любого открытого множества $V \subset \mathscr{E}$ множество $\pi_! \langle K, V\rangle$ открыто в $\mathrm{Cocyl}\,\pi$. Но по определению

$$\pi_! \langle K, V\rangle = (V \times \langle K, U\rangle) \cap \mathrm{Cocyl}\,\pi,$$

где $U = \pi V$. Поскольку же отображение π открыто, множество U открыто в $\mathscr{B}$, и значит множество $V \times \langle K, U\rangle$ открыто в $\mathscr{E} \times \mathscr{P}(\mathscr{B})$. Поэтому множество $\pi_! \langle K, V\rangle$ открыто в $\mathrm{Cocyl}\,\pi$. □

Определение 4. Непрерывные сечения

$$s\colon \mathrm{Cocyl}\,\pi \to \mathscr{P}(\mathscr{E})$$

отображения $\pi_!\colon \mathscr{P}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Cocyl}\,\pi$ называются *связностями* (или более распространенно — *связностями в смысле Гуревича*). Отображение $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ (или тройка $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$), для которого существует хотя бы одна связность s, называется *расслоением в смысле Гуревича.*

В этой терминологии теорема 1 и предложение 1 утверждают, что *любое накрытие связного хаусдорфова пространства является расслоением в смысле Гуревича, обладающим единственной связностью.*

Замечание 2. Расслоением в смысле Гуревича (но уже с многими возможными связностями) будет и каждое тривиальное расслоение $\pi\colon \mathcal{B}\times\mathcal{F}\to\mathcal{B}$. (Связность s для такого расслоения можно задать, например, формулой

$$[s(p_0, u)](t)=(u(t), x_0),$$
$$\text{если}\quad p_0=(b_0, x_0),\quad b_0\in\mathcal{B},\quad x_0\in\mathcal{F},$$

где $0\leqslant t\leqslant 1$.) Поэтому естественно ожидать, что расслоением в смысле Гуревича будет и любое локально тривиальное расслоение и, более того, любое отображение $\pi\colon \mathcal{E}\to\mathcal{B}$, для которого существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$, что каждое отображение

$$\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha$$

является расслоением в смысле Гуревича. Как показал немецкий математик Дольд, последнее утверждение — в практически не ограничивающем общности предположении, что покрытие $\{U_\alpha\}$ нумерируемо (см. лекцию III. 24, замечание 4), — действительно верно. Доказательство Дольда, хотя и простое по идее, технически довольно сложно, и мы не можем его здесь изложить. (Читатель — чтобы понять, какие подводные камни здесь появляются и зачем нужна нумерируемость — может попытаться доказать теорему Дольда для случая двухэлементного покрытия.)

Приведем пример не локально тривиального расслоения в смысле Гуревича (широко использующегося в разнообразных вопросах топологии).

Пример 7. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное топологическое пространство и пусть $\rho\colon \mathcal{P}(\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ — отображение, сопоставляющее каждому пути u на $\mathcal{X}$ его концевую точку:

$$\rho(u)=u(1),\qquad u\colon I\to\mathcal{X}.$$

Оказывается, что *отображение ρ является расслоением в смысле Гуревича.* Действительно, коцилиндр $\operatorname{Cocyl}\rho$ этого отображения состоит из пар вида (v, u), где v и u — такие пути пространства $\mathcal{X}$, что $v(1)=u(0)$. При этом для любой такой пары формула

$$(8)\qquad w(t)(\tau)=\begin{cases} v\left(\dfrac{2\tau}{2-t}\right), & \text{если}\quad 0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{2-t}{2},\\ u(t+2\tau-2), & \text{если}\quad \dfrac{2-t}{2}\leqslant\tau\leqslant 1,\end{cases}$$

определяет (проверьте!) путь $w\colon t\mapsto w(t)$ в пространстве $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, удовлетворяющий соотношениям $w(0)(\tau)=v(\tau)$ и $w(t)(1)=u(t)$ для любых τ, $t\in I$, т. е. такой, что $w(0)=v$

и $\rho \circ w = u$. Поэтому, положив $s(v, u) = w$, мы получим непрерывное (проверьте!) сечение отображения ρ_I. □

Путь w, определенный формулой (8), обладает тем свойством, что $w(t)(0) = v(0)$ для любого $t \in I$. Поэтому если мы, выбрав точку $p_0 \in \mathscr{X}$, введем в рассмотрение подпространство $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X})$ пространства $\mathscr{P}(\mathscr{X})$, состоящее из путей $u\colon I \to \mathscr{X}$, начинающихся в точке p_0, то *отображение*

$$\rho\colon \mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}) \to \mathscr{X}, \quad u \mapsto u(1),$$

также будет расслоением в смысле Гуревича.

Эти примеры показывают, что расслоение в смысле Гуревича может иметь негомеоморфные слои и даже не быть надъективным отображением (если его база не линейно связна).