Лекция 3

Гомотопические классы путей.— Фундаментальная группа топологического пространства.— Односвязность стягиваемых пространств.— Односвязность сферы.— Фундаментальная группа окружности.

Для любой точки $p \in \mathscr{X}$ топологического пространства $\mathscr{X}$ формула

$$e_p(t) = p, \qquad t \in I,$$

задает некоторый путь $e_p\colon I \to \mathscr{X}$, называемый *постоянным путем в точке* p (ср. лекцию III. 11). Этот путь соединяет точку p с самой собой.

Аналогично для любого пути $u\colon I \to \mathscr{X}$ формула

$$u^{-1}(t) = u(1-t), \qquad t \in I,$$

определяет *обратный путь* $u^{-1}\colon I \to \mathscr{X}$, соединяющий конец $u(1)$ пути u с его началом $u(0)$.

Если конец $u(1)$ пути u совпадает с началом $v(0)$ пути v, то формула

$$(uv)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ v(2t-1), & \text{если } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

определяет новый путь uv, изаываемый *произведением путей* u и v. Этот путь соединяет начало $u(0)$ пути u с концом $v(1)$ пути v.

Все это фактически было в лекции III. 11. Следующее же определение является новым.

Определение 1. Два пути u и v, соединяющие одни и те же точки p_0 и p_1 (т. е. такие, что $u(0) = v(0) = p_0$ и $u(1) = v(1) = p_1$), называются *гомотопными* (обозначение $u \sim v$), если существует такое непрерывное отображение

$$f\colon I^2 \to \mathscr{X}, \quad (t, \tau) \mapsto f(t, \tau), \qquad (t, \tau) \in I^2, \tag{1}$$

что

$$f(t, 0) = u(t), \quad f(t, 1) = v(t)$$

и

$$f(0, \tau) = p_0, \qquad f(1, \tau) = p_1$$

для любых $t, \tau \in I$. Отображение f называется *гомотопией, связывающей путь* u *с путем* v.

Предложение 1. *Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве* $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$ *всех путей пространства* $\mathscr{X}$, *соединяющих точку* p_0 *с точкой* p_1.

Классы гомотопных отображений называются *гомотопическими классами* путей. Гомотопический класс, содержащий путь u, обозначается символом $[u]$.

Мы дадим два доказательства предложения 1. Первое — более поучительное — доказательство использует топологию пространства $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$, тогда как второе не опирается ни на что, кроме определения 1.

Первое доказательство. По формуле

$$w(\tau)(t) = f(t, \tau), \qquad t, \tau \in I,$$

каждая гомотопия (1) определяет непрерывное (докажите!) отображение $w: \tau \mapsto w(\tau)$ отрезка I в пространство $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$, удовлетворяющее соотношениям $w(0) = u$ и $w(1) = v$, т. е. некоторый путь этого пространства, соединяющий его точку u с точкой v. Обратно, любой путь $w: I \to \mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$ пространства $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$, соединяющий путь u с путем v, определяет по формуле

$$f(t, \tau) = w(\tau)(t), \qquad t, \tau \in I,$$

гомотопию (1), связывающую путь u с путем v. Таким образом, *гомотопии являются не чем иным, как путями пространства* $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$, и значит отношение гомотопности является частным случаем отношения «быть связанными путем». Следовательно (см. лекцию III. 11), отношение гомотопности является отношением эквивалентности. □

Мы видим, кроме того, что *гомотопические классы путей пространства* $\mathscr{X}$, *соединяющих точку* p_0 *с точкой* p_1, *являются не чем иным, как компонентами линейной связности пространства* $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$.

Второе доказательство. (Это доказательство представляет собой просто переизложение на случай гомотопий данного в лекции III. 11 доказательства того, что отношение «быть соединенными путем» является отношением эквивалентности.) Для любого пути $u: I \to \mathscr{X}$ формула

$$f(t, \tau) = u(t), \qquad t, \tau \in I,$$

определяет гомотопию, связывающую путь u с самим собой. Следовательно, отношение гомотопности рефлексивно.

Аналогично для любой гомотопии f, связывающей путь u с путем v, формула

$$g(t, \tau)=f(t, 1-\tau), \qquad t, \tau \in I,$$

определяет гомотопию g, связывающую путь v с путем u. Следовательно, отношение гомотопности симметрично.

Наконец, если гомотопия f связывает путь u с путем v, а гомотопия g — путь v с путем w, то гомотопия fg, определенная (очевидно, корректно) формулой

$$(2) \qquad (fg)(t, \tau)=\begin{cases} f(t, 2\tau), & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2, \\ g(t, 2\tau-1), & \text{если} \quad 1/2 \leqslant \tau \leqslant 1, \end{cases}$$

будет связывать путь u с путем w. Следовательно, отношение гомотопности транзитивно. □

Особое значение имеют пути, у которых начало совпадает с концом, т. е. которые, начинаясь в некоторой точке p_0, кончаются в ней же. Каждый такой путь называется *петлей в точке* p_0. Множество гомотопических классов всех петель в точке p_0 обозначается символом $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.

Перемножать гомотопии — когда это имеет смысл — можно не только по второму аргументу, как в формуле (2), но и по первому, т. е. по формуле

$$(3) \qquad (fg)(t, \tau)=\begin{cases} f(2t, \tau), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2t-1, \tau), & \text{если} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Если гомотопия f связывает путь u_0 с путем u_1, а гомотопия g — путь v_0 с путем v_1, то произведение (3) этих гомотопий по первому аргументу определено тогда и только тогда, когда общий конец путей u_0 и u_1 совпадает с общим началом путей v_0 и v_1, и в этом случае гомотопия (3) будет связывать путь u_0v_0 с путем u_1v_1. Это доказывает — в случае, когда $u(1)=v(0)$, — что *формула*

$$(4) \qquad [u]\cdot[v]=[uv]$$

корректно определяет произведение $[u]\cdot[v]$ *гомотопических классов* $[u]$ *и* $[v]$.

В частности, это произведение определено для любых элементов множества $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.

Предложение 2. *Относительно умножения* (4) *множество* $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ *является группой. Единицей этой группы служит класс* $[e_{p_0}]$ *постоянного пути* e_{p_0}, *а классом* $[u]^{-1}$, *обратным к классу $[u]$ петли u, является класс $[u^{-1}]$ обратной петли u^{-1}.*

Доказательство этого предложения мы извлечем из некоторых общих соображений, разъясняющих операцию перемножения гомотопических классов путей.

Назовем *обобщенным путем* пространства $\mathscr{X}$ непрерывное отображение u: $[a, b] \to \mathscr{X}$ произвольного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в пространство $\mathscr{X}$. Точку $u(a)$ мы будем называть *началом*, а точку $u(b)$—*концом* обобщенного пути u.

Замечание 1. Понятие обобщенного пути фактически идентично понятию кривой. В зависимости от контекста—определяемого в основном традицией—мы будем свободно пользоваться обоими терминами.

Если u: $[a, b] \to \mathscr{X}$ и v: $[c, d] \to \mathscr{X}$—такие обобщенные пути, что $u(b) = v(c)$, то формула

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } a \leqslant t < b, \\ v(t-b+c), & \text{если } b \leqslant t \leqslant b+d-c, \end{cases}$$

определяет обобщенный путь w: $[a, b+d-c] \to \mathscr{X}$, который мы будем обозначать символом $u * v$ и называть путем, *составленным* из путей u и v.

Например, для любой точки $c \in [a, b]$ каждый обобщенный путь u: $[a, b] \to \mathscr{X}$ составлен из пути $u|_{[a, c]}$ и пути $u|_{[c, b]}$.

Ясно, что *операция составления путей ассоциативна*, т. е. если для трех путей u, v, w путь $(u * v) * w$ определен, то определен путь $u * (v * w)$ и имеет место равенство

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

Поэтому путь $u_1 * \ldots * u_n$, составленный из n путей $u_1, \ldots, u_n$, не зависит от последовательности, в которой эти пути составляются и в его обозначении скобки не требуются.

Необобщенные пути u: $I \to \mathscr{X}$ и v: $I \to \mathscr{X}$ можно составить, если $u(1) = v(0)$. Получающийся—уже обобщенный—путь $u * v$ определен на отрезке $[0, 2]$ формулой

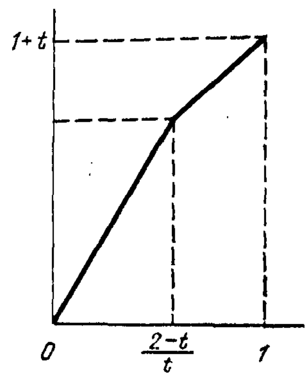
$$(u * v)(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ v(t), & \text{если } 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases} \tag{5}$$

С другой стороны, выбрав произвольную непрерывную функцию φ: $[0, 1] \to [a, b]$, отображающую точки 0 и 1 в точки a и b соответственно, мы можем каждому обобщенному пути u: $[a, b] \to \mathscr{X}$, определенному на отрезке $[a, b]$, сопоставить необобщенный путь

$$u \circ \varphi \colon I \to \mathscr{X},$$

соединяющий те же точки. Мы будем говорить, что путь $u \circ \varphi$ получен из пути u *перепараметризацией* φ *к единичному отрезку* I.

Например, путь, определенный формулой (8) лекции 2, является не чем иным, как результатом перепараметризации к единичному отрезку пути $v * u_t$, составленному из пути v, и ограничения $u_t = u|_{[0,t]}$ пути u на отрезке $[0, t]$, посредством функции φ: $[0, 1] \to [0, 1+t]$ с графиком



Это делает всю конструкцию, связанную с этим путем, совершенно прозрачной.

Замечательно, что *гомотопический класс* $[u \circ \varphi]$ *пути* $u \circ \varphi$ *не зависит от выбора функции* φ. Действительно, если ψ — другая непрерывная функция $[0, 1] \to [a, b]$, переводящая точки 0 и 1 в точки a и b, то формула

$$f(t, \tau) = u((1-\tau)\varphi(t) + \tau\psi(t)), \qquad t, \tau \in I,$$

определяет гомотопию f, связывающую путь $u \circ \varphi$ с путем $u \circ \psi$. $\square$

В частности, это верно и для пути (5). Но перепараметризация φ: $t \mapsto 2t$ этого пути переводит его, очевидно, в произведение uv путей u и v. Поэтому произведение $[u] \cdot [v]$ гомотопических классов $[u]$ и $[v]$ будет гомотопическим классом *произвольной* перепараметризации пути $u * v$.

Если теперь u, v и w — такие пути, что определены произведения $(uv)w$ и $u(vw)$, т. е. такие, что $u(1) = v(0)$

и $v(1)=w(0)$, то оба пути $(uv)w$ и $u(vw)$ будут, очевидно, перепараметризациями одного и того же пути $u*v*w$. Поэтому их гомотопические классы будут совпадать, т. е. будет иметь место равенство

$$([u]\cdot[v])\cdot[w]=[u]\cdot([v]\cdot[w]).$$

По определению это означает, что *умножение гомотопических классов путей ассоциативно.*

В частности, ассоциативно и умножение в множестве $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.

Пусть $[c, d]\subset[a, b]$, т. е. $a\leqslant c<d\leqslant b$. Мы скажем, что обобщенный путь u: $[a, b]\to\mathscr{X}$ *постоянен на* $[c, d]$, если $u(t)=u(c)$ для любого $t\in[c, d]$. Такой путь определяет на отрезке $[a, b-d+c]$ путь u', для которого

$$u'(t)=\begin{cases} u(t), & \text{если } a\leqslant t\leqslant c,\\ u(t+d-c), & \text{если } c\leqslant t\leqslant b-d+c.\end{cases}$$

Это означает, что $u'=u_1*u_2$, где u_1 и u_2—ограничения пути u на отрезках $[a, c]$ и $[d, b]$ соответственно. При этом $u=u'\circ\varphi_0$, где φ_0—функция $[a, b]\to[a, b-d+c]$, заданная формулой

$$\varphi_0(t)=\begin{cases} t, & \text{если } a\leqslant t\leqslant c,\\ c, & \text{если } c\leqslant t\leqslant d,\\ t-d+c, & \text{если } d\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

Поэтому любая перепараметризация φ пути u' задает перепараметризацию $\varphi'=\varphi_0\circ\varphi$ пути u, обладающую тем свойством, что $u\circ\varphi=u'\circ\varphi'$. Следовательно, *гомотопические классы перепараметризаций путей u и u' совпадают.*

Если теперь u—путь $I\to\mathscr{X}$, e_0—постоянный путь в точке $p_0=u(0)$ и e_1—постоянный путь в точке $p_1=u(1)$, то для $u*e_1$ путь $(u*e_1)'$ совпадает с u, для e_0*u путь $(e_0*u)'$ получается из u сдвигом параметра. Поэтому

$$[e_0]\cdot[u]=[u] \quad \text{и} \quad [u]\cdot[e_1]=[u].$$

В частности, это доказывает, что *гомотопический класс $[e_{p_0}]$ постоянной петли e_{p_0} является единицей умножения в $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.*

Обобщенный путь u: $[a, b]\to\mathscr{X}$ мы будем называть *симметричным*, если

$$u(t)=u(a+b-t) \quad \text{для любого} \quad t\in[a, b]$$

(и, значит, в частности $u(b)=u(a)$). Для такого пути u

формула

$$f(t,\ \tau)=\begin{cases} u(c-(c-a)\tau), & \text{если } c-(c-a)\tau\leqslant t\leqslant c,\\ u(c+(b-c)\tau), & \text{если } c\leqslant t\leqslant c+(b-c)\tau,\\ u(t) & \text{при всех других } t,\end{cases}$$

где $c=\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a,\ b]$, корректно определяет непрерывное отображение

$$f\colon [a,\ b]\times I\to\mathscr{X},$$

удовлетворяющее для всех $t\in[a,\ b]$ и $\tau\in I$ соотношениям

$$f(t,\ 0)=u(t),$$
$$f(t,\ 1)=f(a,\ \tau)=f(b,\ \tau)=p_0, \quad \text{где} \quad p_0=u(a),$$

и потому для любой перепараметризации φ пути u определяющее гомотопию $f\circ(\varphi\times\mathrm{id})$, связывающую путь $u\circ\varphi$ с постоянным путем e_{p_0} в точке $p_0=u(a)$. Следовательно,

$$[u\circ\varphi]=[e_{p_0}].$$

В частном случае, когда путь u определен на $[0,\ 1]$, т. е. является *симметричной петлей*, в перепараметризации φ мы не нуждаемся, и потому $[u]=[e_{p_0}]$. Поскольку для любой петли u в точке p_0 петли uu^{-1} и $u^{-1}u$, очевидно, симметричны, этим доказано, что

$$[u]\cdot[u^{-1}]=[u^{-1}]\cdot[u]=[e_{p_0}]$$

для любого элемента $[u]\in\pi_1(\mathscr{X},\ p_0)$, т. е. что $[u]^{-1}=[u^{-1}]$.

Тем самым предложение 2 полностью доказано. □

Определение 1. Группа $\pi_1(\mathscr{X},\ p_0)$ называется *фундаментальной группой пространства* $\mathscr{X}$ *в точке* p_0.

Замечание 2. На языке алгебры установленные при доказательстве предложения 2 алгебраические свойства умножения гомотопических классов путей означают, что *по отношению к умножению множество всех этих классов является группоидом*. Этот группоид называется *фундаментальным группоидом* пространства $\mathscr{X}$.

Покажем теперь на примерах, как можно вычислять фундаментальные группы конкретных пространств.

Заметим, прежде всего, что так как любая петля пространства $\mathscr{X}$ в точке p_0 является, очевидно, петлей компоненты линейной связности $\mathscr{X}_0$ пространства $\mathscr{X}$, содержащей точку p_0, то

$$\pi_1(\mathscr{X}, p_0)=\pi_1(\mathscr{X}_0, p_0).$$

Поэтому фундаментальные группы достаточно рассматривать лишь для линейно связных пространств.

Пример 1. Пусть $\mathscr{X}$ является единичным шаром $\mathbb{B}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$, а точка p_0—его центром $\mathbf{0}$. Ясно, что для любой петли $u\colon I\to\mathbb{B}^n$ в точке $\mathbf{0}$ формула

$$f(t, \tau)=(1-\tau)u(t), \qquad t, \tau\in I,$$

определяет гомотопию f, связывающую путь u с постоянным путем e_0. Поэтому $[u]=[e_0]$, и значит *группа* $\pi_1(\mathbb{B}^n, \mathbf{0})$ *тривиальна* (состоит только из единицы).

По тем же соображениям тривиальна и группа $\pi_1(\mathring{\mathbb{B}}^n, \mathbf{0})$, где $\mathring{\mathbb{B}}^n$—открытый шар (внутренность шара $\mathbb{B}^n$).

Определение 2. Линейно связное пространство $\mathscr{X}$, для которого группа $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ состоит только из единицы, называется *односвязным* (как мы покажем в следующей лекции, это свойство не зависит от выбора точки p_0).

Таким образом, нами доказано, что *шар* $\mathbb{B}^n$ (*а также шар* $\mathring{\mathbb{B}}^n$) *односвязен* (при любом $n\geqslant 0$).

Этот результат допускает немедленное обобщение.

Говорят, что (необходимо линейно связное) пространство $\mathscr{X}$ *стягиваемо к точке* p_0, если существует такое непрерывное отображение

$$F\colon \mathscr{X}\times I\to\mathscr{X},$$

что $F(p, 0)=p$, $F(p, 1)=p_0$ для любой точки $p\in\mathscr{X}$ и $F(p_0, \tau)=p_0$ для любого $\tau\in I$. Тогда для каждой петли $u\colon I\to\mathscr{X}$ в точке p_0 формула

$$f(t, \tau)=F(u(t), \tau), \qquad t, \tau\in I,$$

будет определять гомотопию, связывающую путь u с постоянным путем e_{p_0}. Следовательно, *любое стягиваемое пространство односвязно.*

Для шара $\mathbb{B}^n$ отображение F задается формулой

$$F(x, \tau)=\tau x, \qquad x\in\mathbb{B}^n.$$

Более сложные примеры требуют некоторой подготовки.

Пусть $\mathscr{X}$—гладкое многообразие.

Обобщенный путь $u\colon [a, b]\to\mathscr{X}$ называется *гладким*, если он представляет собой гладкое отображение, и *ку-*

сочно гладким, если он составлен из конечного числа гладких путей.

Лемма 1. *Любой путь u: $[a, b] \to \mathscr{X}$ на гладком многообразии $\mathscr{X}$ гомотопен кусочно гладкому пути.*

Доказательство. В виду компактности отрезка $[a, b]$ (а, значит, и множества $u([a, b])$) в многообразии $\mathscr{X}$ существует конечное число координатных окрестностей (которые для определенности можно считать диффеоморфными открытому единичному шару $\mathring{\mathbb{B}}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$), покрывающих множество $u([a, b])$.

По определению это означает, что путь u составлен из конечного числа путей, каждый из которых является отображением в некоторую координатную окрестность. Поэтому нам достаточно доказать лемму 1 лишь для путей, обладающих последним свойством, т. е. фактически для путей в шаре $\mathring{\mathbb{B}}^n$.

Пусть u: $[a, b] \to \mathring{\mathbb{B}}^n$ — произвольный путь в шаре $\mathring{\mathbb{B}}^n$. Мы положим

$$v(t) = (1-t)\,u(a) + t u(b), \qquad t \in I,$$

и

$$f(t, \tau) = (1-\tau)\,u(t) + \tau v(t), \qquad t, \tau \in I.$$

Первая формула определяет гладкий путь v: $[a, b] \to \mathring{\mathbb{B}}^n$, а вторая — гомотопию f, связывающую путь u с путем v. $\square$

Задача 1. Докажите, что любой путь u: $[a, b] \to \mathscr{X}$ гомотопен гладкому пути.

Вернемся теперь к вычислению фундаментальных групп.

Пример 2. Вычислим группу $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ в случае, когда пространство $\mathscr{X}$ является сферой $\mathbb{S}^n$ размерности $n \geqslant 2$ (выбор точки p_0 значения не имеет). Согласно лемме 1 мы без ограничения общности можем рассматривать лишь кусочно гладкие петли u: $I \to \mathbb{S}^n$. Но по следствию из теоремы Сарда (см. следствие из теоремы 1 лекции III. 15) каждая такая петля при $n \geqslant 2$ заведомо не является надъективным отображением, т. е. существует такая точка $q_0 \in \mathbb{S}^n$, что петля u является на самом деле петлей в $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ (представляет собой композицию петли в $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ и вложения $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\} \to \mathbb{S}^n$). Поскольку подпространство $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ стягиваемо (оно гомеоморфно шару $\mathring{\mathbb{B}}^n$), отсюда следует, что петля u гомотопна постоянной петле e_{p_0}

(в $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ и тем более в $\mathbb{S}^n$). Поэтому

$$\pi_1(\mathbb{S}^n, p_0) = 1, \qquad n \geqslant 2,$$

т. е. *при $n \geqslant 2$ сфера $\mathbb{S}^n$ односвязна.*

При $n=1$ теорема Сарда обеспечивает лишь существование точки $q_0 \in \mathbb{S}^1$, являющейся регулярным значением всех гладких путей u_i: $[a_i, b_i] \to \mathbb{S}^1$, из которых составлена кусочно гладкая петля u. Для исследования этой ситуации нам удобно будет предварительно обсудить некоторые специальные пути на окружности $\mathbb{S}^1$.

Любые две различные точки p, q окружности $\mathbb{S}^1$ разбивают окружность на две дуги $C^{(+)}(p, q)$ и $C^{(-)}(p, q)$ (первая дуга характеризуется тем, что мы можем перейти по ней от p к q, двигаясь против часовой стрелки, а вторая—тем, что переход от p к q осуществляется по ней против часовой стрелки). При $p=q$ мы положим

$$C^{(+)}(p, p) = C^{(-)}(p, p) = \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}.$$

Заметим, что $C^{(+)}(q, p) = C^{(-)}(p, q)$ и $C^{(-)}(q, p) = C^{(+)}(p, q)$ для любых точек p, q окружности $\mathbb{S}^1$.

На дуге $C^{(+)}(p, q)$ мы введем угловой параметр $\theta^{(+)}$, отсчитываемый против часовой стрелки от точки p до точки q (точке p отвечает значение параметра 0, а точке p—значение $\theta_0^{(+)} > 0$, где $\theta_0^{(+)}$—радианная мера дуги $C^{(+)}(p, q)$). Аналогично на дуге $C^{(-)}(p, q)$ мы введем угловой параметр $\theta^{(-)}$, отсчитываемый по часовой стрелке от точки p с $\theta^{(-)} = 0$ до точки q с $\theta^{(-)} = \theta_0^{(-)}$, где $\theta_0^{(-)}$—радианная мера дуги $C^{(-)}(p, q)$. (Таким образом, если $p \neq q$, то $\theta_0^{(-)} = 2\pi - \theta_0^{(+)}$, а если $p=q$, то $\theta_0^{(-)} = \theta_0^{(+)} = 2\pi$.)

Тогда тождественные отображения $[0, \theta_0^{(+)}] \to [0, \theta_0^{(+)}]$, $[0, \theta_0^{(-)}] \to [0, \theta_0^{(-)}]$ будут задавать на окружности обобщенные пути, соединяющие точку p с точкой q. Мы будем обозначать эти пути символами $v^{(+)}(p, q)$ и $v^{(-)}(p, q)$ соответственно.

Заметим, что при $p=q$ эти пути являются взаимообратными петлями:

$$v^{(-)}(p, p) = v^{(+)}(p, p)^{-1}.$$

(Вообще, $v^{(-)}(q, p) = v^{(+)}(p, q)^{-1}$ и $v^{(+)}(q, p) = v^{(-)}(p, q)^{-1}$ для любых точек $p, q \in \mathbb{S}^1$.)

Обобщенный путь v: $[a, b] \to \mathbb{S}^1$, соединяющий точку p с точкой q (случай $p=q$ не исключается), мы будем называть *специальным*, если равенство $v(t)=p$ имеет место только при $t=a$, а равенство $v(t)=q$ — только при $t=b$. По соображениям связности ясно, что для такого пути либо $v^{(+)}(t)\in C^{(+)}(p, q)$ при любом $t\in(a, b)$, либо $v^{(-)}(t)\in C^{(-)}(p, q)$ при любом $t\in(a, b)$. В обоих случаях путь v задается некоторой непрерывной функцией

$$\bar{v}\colon [a, b]\to[0, \theta_0], \qquad \text{где } \theta_0=\theta_0^{(+)},\ \theta_0^{(-)},$$

причем $\bar{v}(a)=0$, а $\bar{v}(b)=\theta_0$ или $\bar{v}(b)=0$ (последний случай возможен только при $p=q$, т. е. при $\theta_0=2\pi$).

При $\bar{v}(b)=\theta_0$ это означает, что функция $\bar{v}$ осуществляет перепараметризацию пути $v^{(+)}(p, q)$ (при $\theta_0=\theta_0^{(+)}$) или пути $v^{(-)}(p, q)$ (при $\theta_0=\theta_0^{(-)}$) к пути v. Таким образом, в пространстве $\mathcal{P}(p, \mathbb{S}^1, q)$ путей на окружности $\mathbb{S}^1$, соединяющих точку p с точкой q, каждый специальный путь v, для которого $\bar{v}(b)=\theta_0$, определяет тот же гомотопический класс, что соответственно путь $v^{(+)}(p, q)$ или путь $v^{(-)}(p, q)$.

В случае же, когда $\bar{v}(b)=0$, формула

$$f(t, \tau)=(1-\tau)\bar{v}(t), \qquad t\in[a, b], \quad \tau\in I,$$

очевидно, определяет гомотопию, связывающую путь v с постоянным путем в точке p. Таким образом, при $\bar{v}(b)=0$ специальный путь v гомотопен постоянному пути.

Вернемся теперь к кусочно гладкой петле $u\colon I\to\mathbb{S}^1$ окружности $\mathbb{S}^1$ в точке p_0, составленной из гладких обобщенных путей $u_i\colon [a_i, b_i]\to\mathbb{S}^1$. Если q_0 — регулярное значение всех отображений u_i, то для каждого i прообраз $u_i^{-1}(q_0)$ будет нульмерным подмногообразием отрезка $[a_i, b_i]$, т. е. конечной системой точек. Эти точки разбивают отрезок $[a_i, b_i]$ на отрезки, обладающие тем свойством, что на каждом из них путь u_i специален. Это доказывает, что *любая кусочно гладкая петля u может быть составлена из специальных путей*, и значит по доказанному гомотопна либо постоянной петле, либо петле, составленной из путей вида $v^{(+)}(p, q)$ и $v^{(-)}(p, q)$.

Если три точки p, q, r окружности $\mathbb{S}^1$ обладают тем свойством, что при движении от p против часовой стрелки сначала встречается точка q, то, как непосредственно видно из чертежа, путь $v^{(-)}(q, r)$ составлен из путей $v^{(-)}(q, p)$ и $v^{(-)}(p, r)$:

$$v^{(-)}(q, r)=v^{(-)}(q, p)*v^{(-)}(p, r).$$

Если же первой встречается точка r, то аналогично

$$v^{(+)}(p, q) = v^{(+)}(p, r) * v^{(+)}(r, q).$$

Поэтому в первом случае

$$v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r) = v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(p, q) * v^{(-)}(p, r),$$

а во-втором

$$v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r) = v^{(+)}(p, r) * v^{(+)}(r, q) * v^{(-)}(q, r).$$

Но, так как каждый путь вида $v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r)$, очевидно, симметричен, то он гомотопен постоянному пути. Поэтому каждая петля, составленная из путей вида $v^{(+)}(p, q)$, $v^{(-)}(p, q)$ и начинающаяся с пути вида $v^{(+)}(p_0, q)$ (вида $v^{(-)}(p_0, q)$), гомотопна петле, составленной только из путей вида $v^{(+)}(p, q)$ (вида $v^{(-)}(p, q)$).

С другой стороны, ясно, что каждая петля в точке p_0, составленная из путей вида $v^{(+)}(p, q)$, является комбинацией петель вида $v^{(+)}(p_0, p_0)$ (несколько раз равномерно обегает окружность $\mathbb{S}^1$ против часовой стрелки), а каждая петля, составленная из путей вида $v^{(-)}(p, q)$, — комбинацией петель $v^{(-)}(p_0, p_0) = v^{(+)}(p_0, p_0)^{-1}$ (несколько раз равномерно обегает окружность $\mathbb{S}^1$ по часовой стрелке).

Этим доказано, что *гомотопический класс* $[u]$ *петли* u *равен* ι^n, где ι — гомотопический класс перепараметризованной к единичному отрезку петли $v^{(+)}(p_0, p_0)$ (один раз равномерно обегающей окружность $\mathbb{S}^1$ против часовой стрелки), а n — некоторое целое число (положительное, когда петля u гомотопна петле, составленной из петель $v^{(+)}(p_0, p_0)$, отрицательное, когда петля u гомотопна петле, составленной из петель $v^{(-)}(p_0, p_0)$, и равное нулю, когда петля u гомотопна постоянной петле). Это означает, что *группа* $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$ *является циклической группой с образующей* ι.

Однако здесь не видно, чему равен порядок этой группы. Поэтому мы изложим другой метод вычисления группы $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$, лишенный этого недостатка.

Воспользуемся накрытием

$$\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

из примера 1 лекции 2. Пусть p_0 — точка 1 окружности $\mathbb{S}^1$.

Для любой петли u на окружности $\mathbb{S}^1$ в точке p_0 рассмотрим накрывающий путь $w = s(0, u)$ с началом в точке

$0 \in \mathbb{R}$, где s—связность для накрытия π. Конец $w(1)$ этого пути проектируется в конец p_0 петли u и, значит, является целым числом. С другой стороны, легко видеть (докажите!), что это число непрерывно зависит от пути u, т. е. при любой гомотопии пути u число $w(1)$ меняется непрерывно. Поэтому, являясь целым числом, оно остается прежним. Это означает, что формула $[u] \mapsto w(1)$ корректно определяет некоторое отображение

$$\text{(6)} \qquad \deg\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, p_0) \to \mathbb{Z}.$$

Оказывается, что *отображение* (6) *является гомоморфизмом*. Действительно, пусть $[u]$, $[v] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$ и пусть $\deg[u] = n$ и $\deg[v] = m$, т. е. пусть в $\mathbb{R}$ путь $s(0, u)$ соединяет точку 0 с точкой n, а путь $s(0, v)$—точку 0 с точкой m. Тогда путь w в $\mathbb{R}$, определенный формулой

$$w(t) = s(0, v)(t) + n, \qquad t \in I,$$

будет начинаться в точке n и будет накрывать путь v (т. е. будет путем $s(n, v)$). Поэтому путь $s(0, u)w$, начинающийся в точке 0, будет накрывать путь uv, т. е. его конец $(s(0, u)w)(1)$ будет равен $\deg([u]\cdot[v])$. Но этот конец является, по определению, концом $w(1)$ пути w, т. е. точкой $m+n = \deg[u] + \deg[v]$. Следовательно,

$$\deg([u]\cdot[v]) = \deg[u] + \deg[v]. \ \square$$

Далее, легко видеть, что *гомоморфизм* (6) *является эпиморфизмом*. Действительно, для любого пути $w\colon I \to \mathbb{R}$, соединяющего точку 0 с точкой $n \in \mathbb{Z}$, путь $u = \pi \circ w$ будет петлей на окружности $\mathbb{S}^1$ и путь $s(0, u)$, накрывающий эту петлю, будет в силу единственности накрывающего пути совпадать с путем w. Поэтому $s(0, u)(1) = w(1) = n$, т. е. $\deg[u] = n$. $\square$

Наконец, *гомоморфизм* (6) *является мономорфизмом*. Действительно, равенство $\deg[u] = 0$ означает, что накрывающий путь $s(0, u)$ является петлей в точке 0. Но прямая $\mathbb{R}$, будучи гомеоморфна интервалу $\mathring{\mathbb{B}}^1$, стягиваема и потому односвязна. Следовательно, в $\mathbb{R}$ существует гомотопия f, связывающая петлю $s(0, u)$ с постоянной петлей e_0 в точке 0. Но тогда композиция $\pi \circ f$ будет, очевидно, гомотопией, связывающей петлю $u = \pi \circ s(0, u)$ с постоянной петлей e_{p_0} в точке p_0. Поэтому $[u] = e$ в группе $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$. $\square$

Таким образом, мы видим, что *отображение* (6) ***представляет собой изоморфизм.*** Следовательно, ***группа*** $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$ ***является бесконечной циклической группой.***

Так как, очевидно, $\deg \iota = 1$, то гомотопический класс является образующей группы $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$.

Видно, насколько метод накрытий превосходит предыдущий элементарно геометрический метод!

В следующей лекции мы обобщим этот метод на произвольные накрытия и на этой основе получим общий способ вычисления фундаментальных групп пространств.