Лекция 4

Независимость фундаментальной группы от выбора начальной точки.— Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный непрерывным отображением.— Точная гомотопическая последовательность накрытия.— Свойства гомотопической последовательности накрытия.— Односвязные накрытия.—Существование и единственность поднятий.— Удобные пространства.

Для любых двух точек p_0, p_1 топологического пространства $\mathscr{X}$ каждый путь a, соединяющий точку p_0 с точкой p_1, позволяет сопоставить произвольной петле u пространства $\mathscr{X}$ в точке p_1 петлю v в точке p_0, получающуюся перепараметризацией обобщенной петли $a * u * a^{-1}$. Из установленных при доказательстве предложения 2 лекции 3 свойств умножения гомотопических классов путей немедленно вытекает, что *формула*

$$\varphi_a[u] = [v]$$

корректно определяет изоморфизм

$$\varphi_a\colon \pi_1(\mathscr{X}, p_1) \to \pi_1(\mathscr{X}, p_0),$$

зависящий только от гомотопического класса $[a]$ *пути* a.

Заметим, что если пути a и b, соединяющие точку p_0 с точкой p_1, не гомотопны, то изоморфизмы φ_a и φ_b, вообще говоря, различны.

Например, ясно, что если $p_1 = p_0$ (и, значит, путь a представляет собой петлю в точке p_0), то *изоморфизм* φ_a *является не чем иным, как внутренним автоморфизмом группы* $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$, *индуцированным элементом* $\alpha = [a]$. Поэтому если α не является элементом центра группы $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$, то $\varphi_a \neq \mathrm{id}$.

Как бы то ни было, но мы видим, что *для линейно связного пространства* $\mathscr{X}$ *группа* $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ *с точностью до изоморфизма не зависит от точки* p_0.

В частности, если $\pi_1(\mathscr{X}, p_0) = 1$ для одной точки $p_0 \in \mathscr{X}$, то $\pi_1(\mathscr{X}, p_1) = 1$ и для любой другой точки $p_1 \in \mathscr{X}$.

Произвольное непрерывное отображение

$$h\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$$

определяет по формуле

$$u \mapsto h \circ u, \qquad u\colon I \to \mathscr{X},$$

непрерывное (докажите!) отображение

$$h\circ\colon \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{Y})$$

пространств путей, переводящее каждое подпространство вида $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ в подпространство $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$, где $q_0 = h(p_0)$, $q_1 = h(p_1)$. Поэтому оно индуцирует некоторое отображение h_* множества компонент линейной связности пространства $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ в множество компонент линейной связности пространства $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$. На другом языке это означает, что формула

$$(1) \qquad h_*[u] = [h\circ u], \qquad u\colon I \to \mathcal{X},$$

корректно определяет отображение h_* множества гомотопических классов путей пространства $\mathcal{X}$, соединяющих точку p_0 с точкой p_1, в множество гомотопических классов путей пространства $\mathcal{Y}$, соединяющих точку q_0 с точкой q_1. [Корректность формулы (1) можно также установить, не доказывая непрерывность отображения $h\circ$, а просто заметив, что для любой гомотопии $f\colon I^2 \to \mathcal{X}$, связывающей пути u и v из $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$, отображение $h\circ f\colon I^2 \to \mathcal{Y}$ будет гомотопией, связывающей пути $h\circ u$ и $h\circ v$ из $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$.]

При $p_1 = p_0$ мы получаем, в частности, отображение

$$(2) \qquad h_*\colon \pi_1(\mathcal{X}, p_0) \to \pi_1(\mathcal{Y}, q_0), \qquad q = h(p_0).$$

Из определения произведения путей непосредственно вытекает, что если $w = uv$, то $h\circ w = (h\circ u)(h\circ v)$. Поэтому

$$h_*([u]\cdot[v]) = h_*([u])\cdot h_*([v]),$$

т. е. по отношению к умножению гомотопических классов путей отображение h_* является гомоморфизмом группоидов. В частности, *для любого непрерывного отображения* $h\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *отображение* (2) *является гомоморфизмом групп.*

Об этом гомоморфизме говорят, что он *индуцирован* непрерывным отображением h. Когда нужно отметить зависимость этого гомоморфизма от точки p_0, мы будем обозначать его символом $(h_*)_{p_0}$.

Так как для любых отображений

$$h\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$$

и любого пути $u\colon I \to \mathcal{X}$ имеет место равенство $(g\circ h)\circ u = g\circ(h\circ u)$, то

$$(3) \qquad (g\circ h)_* = g_*\circ h_*.$$

Кроме того, если $h=\mathrm{id}$, то, конечно, $h_*=\mathrm{id}$. [На языке теории категории эти свойства означают, что сопоставление

$$\begin{gathered}\text{пространство с отмеченной точкой}\\ \Downarrow\\ \text{фундаментальная группа}\end{gathered}$$

является функтором.]

Далее, непосредственное сравнение определений показывает, что *для любого пути a пространства $\mathscr{X}$, соединяющего точку p_0 с точкой p_1, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathscr{X}, p_1) \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "(h_*)_{p_1}"'] & \pi_1(\mathscr{X}, p_0) \arrow[d, "(h_*)_{p_0}"] \\
\pi_1(\mathscr{Y}, q_1) \arrow[r, "\varphi_{h\circ a}"] & \pi_1(\mathscr{Y}, q_0),
\end{tikzcd} \qquad q_0=h(p_0),\ q_1=h(p_1).$$

[На языке теории категорий это означает, что соответствие $a\longmapsto\varphi_a$ обладает свойством естественности.]

Рассмотрим теперь взаимоотношения фундаментальных групп с накрытиями.

Для любого топологического пространстве $\mathscr{X}$, в котором отмечена точка p_0, мы будем символом $\Omega(\mathscr{X}, p_0)$ или просто $\Omega\mathscr{X}$ обозначать пространство $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_0)$ всех петель в точке p_0 с компактно-открытой топологией. Как мы знаем из лекции 3, элементы группы $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ (гомотопические классы петель) являются не чем иным, как компонентами линейной связности этого пространства. Однако иногда бывает удобно различать эти компоненты, рассматриваемые как элементы группы $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ от них же, но рассматриваемых как подпространства $\Omega\mathscr{X}$. На этом основании компоненту $\alpha\in\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ линейной связности пространства $\Omega\mathscr{X}$ мы будем обозначать также символом $\Omega_\alpha\mathscr{X}$. В частности, $\Omega_e\mathscr{X}$ — это компонента пространства $\Omega\mathscr{X}$, состоящая из петель, гомотопных постоянной петле e_{p_0}. (Символом e мы здесь и в дальнейшем обозначаем единицу группы $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.)

Пусть теперь $\pi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}$ — произвольное расслоение в смысле Гуревича и $s\colon \mathrm{Cocyl}\,\pi\to\mathscr{P}(\mathscr{E})$ — произвольная связность для π. Пусть, далее, $p_0\in\mathscr{E}$, $b_0=\pi(p_0)\in\mathscr{B}$ и $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{b_0}$ — слой расслоения π над точкой b_0. (Заметим, что $p_0\in\mathscr{F}_0$.) Так как для любой точки $u\in\Omega(\mathscr{B}, b_0)$ путь $s(p_0, u)$ является путем в $\mathscr{E}$, начинающимся в точке p_0 и проектирующимся в путь u, то конец $s(p_0,u)(1)$ этого пути принадлежит слою $\mathcal{F}_0$. Таким образом, формула

$$s_1(u) = s(p_0, u)(1), \qquad u \in \Omega\mathcal{B},$$

определяет — очевидно, непрерывное — отображение

$$s_1\colon \Omega\mathcal{B} \to \mathcal{F}_0.$$

В случае, когда расслоение $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ представляет собой накрытие и, значит, пространство $\mathcal{F}_0$ дискретно, отображение s_1 — являясь непрерывным отображением — обладает тем свойством, что для каждой петли $u \in \Omega\mathcal{B}$ точка $s_1(u)$ зависит только от содержащей петлю u компоненты $\Omega_\alpha\mathcal{X}$, т. е. только от гомотопического класса $\alpha = [u]$ этой петли. Это означает, что формула

$$\sigma(\alpha) = s_1(u), \qquad \alpha \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0),$$

где u — произвольная петля класса α, корректно определяет некоторое отображение

$$\sigma\colon \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \to \mathcal{F}_0. \tag{4}$$

Заметим, что в случае, когда пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово, изложенная конструкция определяет отображение (4) *единственным образом.*

Если хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$ локально линейно связно, то пространство $\mathcal{E}$ также локально линейно связно и значит — см. лекцию III.11 — линейно связно (вместе с пространством $\mathcal{B}$). Поэтому для любой точки $p \in \mathcal{F}_0$ в $\mathcal{E}$ существует путь v, соединяющий точку p_0 с точкой p. Проекция $u = \pi \circ v$ этого пути является петлей в точке p_0, а путь $s(p_0, u)$, накрывающий эту петлю, совпадает — в силу единственности накрывающего пути — с путем v. Поэтому $s_1(u) = p$, т. е. $\sigma(\alpha) = p$, где $\alpha = [u]$. Этим доказано, что *если пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово и локально линейно связно, то для любого накрытия $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ отображение σ надъективно.* Попутно мы также доказали, что *для каждого пути $v \in \mathcal{P}(p_0, \mathcal{E})$ имеет место равенство*

$$v = s(p_0, u), \qquad \text{где} \quad u = \pi \circ v. \tag{5}$$

[Для справедливости этого утверждения достаточно, чтобы пространство $\mathcal{B}$ было хаусдорфовым.]

Слой $\mathcal{F}_0$ является множеством с отмеченным элементом p_0. Поэтому для отображения σ имеет смысл говорить о его *ядре* $\operatorname{Ker}\sigma = \sigma^{-1}(p_0)$. По определению это ядро состоит из гомотопических классов $\alpha = [u]$ петель $u \in \Omega\mathcal{B}$, для которых путь $s(p_0, u)$ является петлей. Так как в силу равенства (5) это в точности петли u, являющиеся проекциями $\pi \circ v$ петель $v \in \Omega\mathscr{E}$, то $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Im} \pi_*$, где

(6) $$\pi_*\colon \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$$

— гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрытием π.

С другой стороны, легко видеть, что *гомоморфизм* (6) *является мономорфизмом* (и, следовательно, представляет собой изоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$ на ядро $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Im} \pi_*$ отображения σ). Действительно, для петли $v \in \Omega\mathscr{E}$ равенство $\pi_*[v] = 0$ означает, что в пространстве $\Omega\mathscr{B}$ существует путь $\tau \mapsto u_\tau$, связывающий постоянную петлю e_{p_0} с петлей $u = \pi \circ v$. Поэтому для любого $\tau \in I$ путь $v_\tau = s(p_0, u_\tau)$ пространства $\mathscr{E}$ будет соединять точку p_0 с точкой $s_1(u_\tau)$ и отображение $\tau \mapsto v_\tau$ отрезка I в пространство $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{E})$ будет (докажите!) непрерывным, т. е. будет представлять собой путь в пространстве $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{E})$, соединяющий путь $s(p_0, e_{p_0}) = e_{p_0}$ с путем $s(p_0, u) = v$. Но тогда точка $s_1(u_\tau) = v_\tau(1)$ также будет непрерывно зависеть от τ. Значит — поскольку эта точка принадлежит дискретному пространству $\mathscr{F}_0$, — она будет одна и та же для всех τ. Это означает, что $s_1(u_\tau) = s_1(u_0) = p_0$, т. е. что все пути v_τ являются петлями в точке p_0. Поэтому $v \in \Omega_e\mathscr{E}$, т. е. $[v] = e$. □

[Заметим, что последнее рассуждение справедливо без каких-либо общетопологических ограничений на пространство $\mathscr{B}$.]

Последовательность

(7) $$\ldots \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to \ldots$$

групп и их гомоморфизмов (или, более общо, множеств с отмеченными точками и их отображений, переводящих отмеченные точки в отмеченные) называется *точной в члене* B, если $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. Последовательность (7) называется *точной*, если она точна в каждом члене.

Пользуясь этим языком, мы можем теперь подытожить все доказанные утверждения в следующем предложении:

Предложение 1. *Для любого накрытия $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ связного и локально линейно связного хаусдорфова пространства $\mathscr{B}$ имеет место точная последовательность*

(8) $$\{e\} \to \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \xrightarrow{\sigma} \mathscr{F}_0 \to pt,$$

где pt — множество, состоящее из одной точки.

Точность последовательности (8) в члене $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$ означает, что гомоморфизм π_* является мономорфизмом, точность в члене $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ означает выполнение равенства $\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Im}\pi_*$, а точность в члене $\mathscr{F}_0$ — надъективность отображения σ.

Определение 1. Последовательность (8) называется *точной гомотопической последовательностью* накрытия $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Предложение 1 можно дополнить. Именно, легко видеть, что *в последовательности* (8) *прообраз* $\sigma^{-1}(p)$ *при отображении* σ *произвольной точки* $p \in \mathscr{F}_0$ *является левым смежным классом группы* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ *по подгруппе* $\operatorname{Im}\pi_*$ (т. е. для элементов $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ равенство $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha\beta^{-1} \in \operatorname{Im}\pi_*$). Действительно, из единственности накрывающего пути немедленно вытекает, что

$$(9)\qquad \begin{aligned} s(p_0, u)^{-1} &= s(p_1, u^{-1}),\\ s(p_0, uv) &= s(p_0, u)\, s(p_1, v) \end{aligned}$$

для любых путей $u \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ и $v \in \mathscr{P}(b_1, \mathscr{B})$, где $p_1 = s_1(u) = s(p_0, u)(1)$. Поэтому если для петель $u, v \in \Omega\mathscr{B}$ имеет место равенство $\sigma[u] = \sigma[v]$ (т. е. равенство $s_1(u) = s_1(v)$), то

$$s(p_0, u)\, s(p_0, v)^{-1} = s(p_0, uv^{-1}),$$

и, следовательно,

$$uv^{-1} = (\pi \circ s)(p_0, uv^{-1}) \in \pi \circ (\Omega\mathscr{E}).$$

Значит, $[u]\cdot[v]^{-1} = [uv^{-1}] \in \operatorname{Im}\pi_*$.

Обратно, если $[u]\cdot[v]^{-1} \in \operatorname{Im}\pi_*$, то $uv^{-1} = \pi \circ w$, где $w \in \Omega\mathscr{E}$ и, следовательно,

$$s(p_0, u)\, s(p_0, v)^{-1} = s(p_0, \pi \circ w) = w.$$

Поэтому

$$s_1(u) = s(p_0, u)(1) = (w \cdot s(p_0, u))(1) = s(p_0, v)(1) = s_1(v);$$

откуда $\sigma[u] = \sigma[v]$. □

Для любого гомоморфизма групп $\varphi\colon A \to B$ множество $B/\operatorname{Im} A$ смежных классов группы B по подгруппе $\operatorname{Im} A$ называется *коядром* этого гомоморфизма и обозначается символом $\operatorname{Coker}\varphi$. В этой терминологии доказанное утверждение означает, что *для любого накрытия* $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *связного локально линейно связного и хаусдорфова простран-*

ства $\mathscr{B}$ отображение σ индуцирует биективное отображение

(10) $$\operatorname{Coker}\pi_* \to \mathscr{F}_0.$$

На все это можно посмотреть несколько иначе, если ввести отображение

$$\bar{\sigma}\colon \mathscr{F}_0 \times \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \to \mathscr{F}_0,$$

определенное формулой

$$\sigma(p_0, \alpha) = \sigma_{p_0}(\alpha), \quad p_0 \in \mathscr{F}_0, \ \alpha \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0),$$

где σ_{p_0} — отображение σ, отвечающее точке p_0.

Из формул (9) непосредственно вытекает, что *отображение $\bar{\sigma}$ является правым действием группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ на множестве $\mathscr{F}_0$* и, значит, задает некоторое представление

$$\pi_1(\mathscr{B}, b_0) \to \operatorname{Sym}\mathscr{F}_0$$

группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ в группе $\operatorname{Sym}\mathscr{F}_0$ всех перестановок множества $\mathscr{F}_0$. Это представление называется *представлением монодромии* (или просто *монодромией*) накрытия $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$, а его образ в $\operatorname{Sym}\mathscr{F}_0$ — *группой монодромии* этого накрытия.

Для любого (правого) действия $\mathscr{F}_0 \times \Pi \to \mathscr{F}_0$ некоторой группы Π на множестве $\mathscr{F}_0$ и любой точки $p_0 \in \mathscr{F}_0$ множество Γ всех элементов $\alpha \in \Pi$, для которых $p_0\alpha = p_0$, является, очевидно, подгруппой группы Π. Эта подгруппа называется *стационарной подгруппой* (или *стабилизатором*) точки p_0. Отображение $\alpha \mapsto p_0\alpha$ группы Π на орбиту $p_0\Pi$ точки p_0 индуцирует — как легко видеть, биективное — отображение

$$\Pi/\Gamma \to p_0\Pi$$

множества Π/Γ левых смежных классов группы Π по подгруппе Γ на орбиту $p_0\Pi$. В случае, когда действие *транзитивно*, т. е. все множество $\mathscr{F}_0$ является орбитой каждого своего элемента, это дает биективное отображение

(11) $$\Pi/\Gamma \to \mathscr{F}_0.$$

Для действия $\bar{\sigma}$ отображение $\alpha \mapsto p_0\alpha$ является, конечно, не чем иным, как отображением $\sigma = \sigma_{p_0}$. Поэтому утверждение о надъективности отображения σ означает, что *действие σ транзитивно*, а утверждение, что $\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Im}\pi_*$, означает, что $\operatorname{Im}(\pi_*)_{p_0}$ *является стационарной подгруппой точки p_0*. Утверждение же о биективности отображения (10) является поэтому всего лишь специализацией общего утверждения о биективности отображения (11) (и потому в отдельном доказательстве не нуждается).

Определение 2. Накрытие $\pi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}$ называется *односвязным*, если пространство $\mathscr{E}$ односвязно.

Пространство $\mathscr{B}$ называется *односвязно накрываемым*, если для него существует хотя бы одно односвязное накрытие.

Следующее предложение является одним из основных орудий для вычисления фундаментальных групп конкретных пространств. (Фактически мы им и пользовались в лекции 2 при вычислении группы $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$.)

Предложение 2. *Если связное и локально линейно связное хаусдорфово пространство $\mathscr{B}$ односвязно накрываемо, то для любой точки $b_0\in\mathscr{B}$ группа $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ находится в биективном соответствии со слоем $\mathscr{F}_0$ над точкой b_0 произвольного односвязного расслоения*

$$\pi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}.$$

Это соответствие зависит от выбора точки $p_0\in\mathscr{F}$ и определяется формулой

$$[u]\to s(p_0, u)(1), \qquad u\in\Omega\mathscr{B}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что если $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)=1$, то $\operatorname{Coker}\pi_*=\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$. □

Предложение 2 ничего не говорит об алгебраической структуре группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$. В этом отношении его дополняет следующее предложение:

Предложение 3. *Пусть для связного и локально линейно связного хаусдорфова пространства $\mathscr{B}$ существует такое связное пространство $\mathscr{E}$ и такая дискретная группа* Γ, *дискретно действующая справа на пространстве $\mathscr{E}$, что:*

а) *пространство $\mathscr{E}$ односвязно*;

б) *пространство орбит $\mathscr{E}/\Gamma$ гомеоморфно пространству $\mathscr{B}$. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ изоморфна группе* Γ.

Доказательство. Отождествив $\mathscr{B}$ с $\mathscr{E}/\Gamma$, рассмотрим естественную проекцию

$$\pi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}, \qquad p\mapsto p\Gamma.$$

Как мы знаем (см. пример 5 лекции 2), тройка $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ является — в силу условия а односвязным — накрытием, слоями которого служат орбиты $p\Gamma$ действия группы Γ

на пространстве $\mathscr{E}$. Поэтому согласно предложению 2 формула

$$\sigma[u]=s(p_0, u)(1),$$

где p_0 — произвольная точка орбиты $b_0\in\mathscr{B}$, определяет биективное отображение

$$\sigma\colon \pi_1(\mathscr{B}, b_0)\to p_0\Gamma$$

группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ на орбиту $p_0\Gamma=b_0$. Но, так как дискретное действие свободно, то любая точка p орбиты $p_0\Gamma$ единственным образом представляется в виде $p_0\gamma$, где $\gamma\in\Gamma$. Поэтому, положив $\tau(p)=\gamma^{-1}$ (в введенных в лекции 1 обозначениях $\gamma=\tau(p, p_0)$, где τ — отображение сдвига), мы получим биективное отображение

$$d=\tau\circ\sigma\colon \pi_1(\mathscr{B}, b_0)\to\Gamma. \tag{12}$$

Мы докажем предложение 3, показав, что отображение (12) является гомоморфизмом групп (а значит — в силу биективности — и изоморфизмом), т. е. что

$$d([u]\cdot[v])=d([u])\cdot d([v])$$

для любых путей u, $v\in\Omega\mathscr{B}$.

Пусть $d[u]=\gamma^{-1}$ и $d[v]=\delta^{-1}$. По определению

$$p_0\gamma=s(p_0, u)(1) \quad \text{и} \quad p_0\delta=s(p_0, v)(1).$$

Пусть $p_0\gamma=p_1$ и $w=s(p_0, v)$. Определим на пространстве $\mathscr{E}$ путь $w\gamma$ формулой

$$(w\gamma)(t)=w(t)\gamma, \qquad t\in I.$$

Путь $w\gamma$ начинается в точке $w(0)\gamma=p_0\gamma=p_1$ и накрывает ту же петлю v, что и путь $w=s(p_0, v)$. Следовательно, $w\gamma=s(p_1, v)$ и потому

$$s(p_0, u)\cdot w\gamma=s(p_0, u)\cdot s(p_1, v)=s(p_0, uv)$$

(см. вторую из формул (9)). Значит,

$$\begin{aligned}\sigma([u]\cdot[v])=\sigma[uv]&=\\ &=s(p_0, uv)(1)=\\ &=(w\gamma)(1)=\\ &=w(1)\gamma=(p_0\delta)\gamma=p_0(\delta\gamma)\end{aligned}$$

и потому

$$d([u]\cdot[v])=(\delta\gamma)^{-1}=\gamma^{-1}\delta^{-1}=d[u]\cdot d[v]. \ \square$$

(Ср. вычисление группы $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$ в лекции 3.)

Пусть $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ — произвольное отображение.

Определение 3. Говорят, что непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ *поднимаемо* (относительно π), если существует такое непрерывное отображение $g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, что $\pi \circ g = f$, т. е. если диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{E} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathscr{X} \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отображение g называется *поднятием* (или *лифтом*) отображения f. Говорят также, что g *накрывает* f.

При $\mathscr{X} = I$, т. е. когда f — путь в $\mathscr{B}$, поднятие g является не чем иным, как накрывающим путем. При $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}$ поднятия вложения $\mathscr{X} \to \mathscr{B}$ — это сечения отображения π над $\mathscr{X}$.

С другой стороны, в интерпретации отображения π как расслоения (см. лекцию 1) его поднятия — это в точности морфизмы над $\mathscr{B}$ расслоения f в расслоение π.

Мы будем исследовать задачу о поднятии отображения f для случая, когда отображение $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ является накрытием.

Задача 1. Докажите, что *если пространство $\mathscr{X}$ связно, пространство $\mathscr{B}$ хаусдорфово, а отображение π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ является накрытием, то для любого отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ и любых точек $x_0 \in \mathscr{X}$ и $p_0 \in \mathscr{E}$, связанных соотношением*

$$f(x_0) = \pi(p_0),$$

может существовать не более одного отображения g: $\mathscr{X} \to \mathscr{E}$, накрывающего отображение f и такого, что $g(x_0) = p_0$. (Теорема о единственности накрывающего отображения.)

[Эта теорема является обобщением теоремы о единственности накрывающего пути (см. теорему 1 лекции 2) и доказывается почти дословно так же. Впрочем, если предполагать пространство $\mathscr{X}$ линейно связным, то можно не повторять доказательства, а, выбрав для любой точки $x \in \mathscr{X}$ путь u_x, соединяющий точку x_0 с точкой x, и заметив, что путь $g \circ u_x$ накрывает путь $f \circ u_x$, просто сослаться на теорему о единственности накрывающего пути.]

Вопрос о существовании поднятия значительно сложнее и деликатнее.

Напомним (см. пример 7 лекции 2), что для любого топологического пространства $\mathscr{X}$ и любой его точки x_0 формула

$$\rho(u)=u(1), \qquad u\in\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}),$$

определяет расслоение в смысле Гуревича

$$\rho\colon \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})\to\mathscr{X}.$$

Эта конструкция перестановочна с непрерывными отображениями (естественна в смысле теории категорий), т. е. для любого непрерывного отображения $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{B}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) & \xrightarrow{\rho} & \mathscr{X} \\ {\scriptstyle f\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathscr{P}(y_0, \mathscr{Y}) & \xrightarrow{\rho} & \mathscr{Y}, \end{array} \tag{13}$$

где $y_0=f(x_0)$.

Так как $\rho(e_{x_0})=x_0$, где, как всегда, e_{x_0} — постоянный путь в точке x_0, то расслоение ρ индуцирует отображение

$$\rho\circ\colon \mathscr{P}(e_{x_0}, \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}))\to\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}), \tag{14}$$

переводящее каждый путь $w\colon I\to\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ пространства $\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ в путь $\rho\circ w\colon t\mapsto w(t)(1)$, $t\in I$, пространства $\mathscr{X}$.

Отображение (14) не надо путать с отображением

$$\rho\colon \mathscr{P}(e_{x_0}, \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}))\to\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}),$$

которое путь $w\colon I\to\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ переводит в путь $w(1)\colon \tau\mapsto w(1)\tau$, $\tau\in I$, пространства $\mathscr{X}$ и, вообще говоря, отлично от отображения (14).

Интересно, однако, что *оба отображения* $\rho\circ$ *и* ρ *допускают одно и то же сечение*, т. е. существует такое отображение

$$\#\colon \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})\to\mathscr{P}(e_{x_0}, \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})), \tag{15}$$

что для любого пути $u\in\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ имеют место равенства

$$\rho\circ u^{\#}=u \quad \text{и} \quad \rho(u^{\#})=u, \quad \text{где} \quad u^{\#}=\#(u). \tag{16}$$

Отображение (15) задается формулой

$$u^{\#}(t)(\tau)=u(t\tau), \qquad t, \tau\in I,$$

где $u\in\mathscr{P}(x, \mathscr{X})$.

Лемма 1. *Пусть $\pi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}$ — произвольное расслоение в смысле Гуревича. Тогда для любого непрерывного отобра-*

жения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ *и любой точки* $x_0 \in \mathscr{X}$ *существует отображение* $h\colon \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \to \mathscr{E}$, *замыкающее коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) & \xrightarrow{h} & \mathscr{E} \\ \rho\big\downarrow & & \big\downarrow\pi \\ \mathscr{X} & \xrightarrow{f} & \mathscr{B}, \end{array} \tag{17}$$

т. е. такое, что

$$f \circ \rho = \pi \circ h.$$

Доказательство. Выбрав точку $p_0 \in \mathscr{E}$, удовлетворяющую соотношению $f(x_0) = \pi(p_0)$, мы для любого пути $u \in \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ положим

$$h(u) = s(p_0, f \circ u)(1),$$

где $s\colon \operatorname{Cocyl}\pi \to \mathscr{P}(\mathscr{E})$ — произвольное сечение отображения $\pi_1\colon \mathscr{P}(\mathscr{E}) \to \operatorname{Cocyl}\pi$, $v \mapsto (v(0), \pi \circ v)$ (см. лекцию 2). Тогда

$$(\pi \circ h)(u) = \pi(s(p_0, f \circ u)(1)) = (f \circ u)(1) = \\ = f(u(1)) = (f \circ \rho)(u). \;\square$$

Из коммутативности диаграммы (17) вытекает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(e_{x_0}, \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})) & \xrightarrow{h\circ} & \mathscr{P}(p_0, \mathscr{E}) \\ \rho\circ\big\downarrow & & \big\downarrow\pi\circ \\ \mathscr{P}(\mathscr{X}) & \xrightarrow{f\circ} & \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B}) \end{array}$$

также коммутативна. Поэтому в силу первого из равенств (16) будет коммутативна и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(e_{x_0}, \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})) & \xrightarrow{h\circ} & \mathscr{P}(p_0, \mathscr{E}) \\ \#\big\uparrow & & \big\downarrow\pi\circ \\ \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) & \xrightarrow{f\circ} & \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B}), \end{array}$$

т. е. для любой петли $u \in \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ будет иметь место равенство

$$f \circ u = \pi \circ h \circ u^{\#}, \qquad u^{\#} = \#(u). \tag{18}$$

В частности, равенство (18) имеет место для каждого накрытия $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Имея это в виду, рассмотрим два пути $u, v \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$, кончающиеся в одной и той же точке, т. е. такие, что

$$\rho(u) = \rho(v).$$

Тогда определен путь uv^{-1}, являющийся петлей пространства $\mathcal{X}$ в точке x_0. Предположим, что в накрывающем пространстве $\mathcal{E}$ существует такая петля w в точке p_0, что петля

$$f \circ (uv^{-1}) = (f \circ u)(f \circ v)^{-1}$$

пространства $\mathcal{B}$ гомотопна петле $\pi \circ w$. Тогда

$$f \circ u \sim (\pi \circ w)(f \circ v), \tag{19}$$

и, значит (см. формулу (18))

$$\pi \circ h \circ u^{\#} \sim (\pi \circ w)(\pi \circ h \circ v^{\#}),$$

т. е.

$$\pi \circ (h \circ u^{\#}) \sim \pi \circ (w \cdot (h \circ v^{\#})).$$

Поскольку для любого накрытия $\pi \colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ отображение

$$\pi_* \colon [u] \mapsto [\pi \circ u]$$

является, как мы знаем, мономорфизмом, отсюда следует (рассмотрите петлю $(h \circ u^{\#})(w \cdot (h \circ v^{\#}))^{-1}$), что

$$h \circ u^{\#} \sim w \cdot (h \circ v^{\#}).$$

Но гомотопность путей, в частности, предполагает, что концы этих путей (так же, как, конечно, и начала) совпадают. Поэтому

$$\rho(h \circ u^{\#}) = \rho(w \cdot (h \circ v^{\#})) = \rho(h \circ v^{\#});$$

откуда следует — в силу коммутативности диаграммы (13) для отображения h, — что

$$h(\rho(u^{\#})) = h(\rho(v^{\#})),$$

т. е. (см. вторую формулу (16)) что $h(u) = h(v)$.

Тем самым нами доказана следующая лемма:

Лемма 2. *Если в диаграмме* (17) *отображение* π: $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ *является накрытием и если для путей* $u, v \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$, *удовлетворяющих соотношению*

$$\rho(u) = \rho(v),$$

существует такая петля $w \in \Omega\mathcal{E}$, *что имеет место* *гомотопия* (19), *то*

$$h(u) = h(v). \ \square$$

Заметим, что существование петли w заведомо обеспечено, если для гомоморфизмов

$$f_*: \pi_1(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \quad \text{и} \quad \pi_*: \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$$

фундаментальных групп, индуцированными непрерывными отображениями f и π, имеет место включение

$$\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} \pi_*. \tag{20}$$

Пусть теперь пространство $\mathscr{X}$ линейно связно. Выбрав для каждой точки $x \in \mathscr{X}$ путь u_x, соединяющий точку x_0 с точкой x, мы определим отображение $g: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, положив

$$g(x) = h(u_x).$$

[Таким образом, чтобы построить отображение g, надо, выбрав для каждой точки $x \in \mathscr{X}$ путь u_x, рассмотреть путь $f \circ u_x$, построить для этого пути начинающийся в точке p_0 накрывающий путь $s(p_0, f \circ u_x)$ и взять его конец $s(p_0, f \circ u_x)(1)$.]

Согласно только что сделанному замечанию и лемме 2, *если имеет место включение* (20), *то это построение корректно* (точка $g(x)$ не зависит от выбора пути u_x).

По построению $g(x_0) = p_0$, $h = g \circ \rho$, и значит

$$\pi \circ g \circ \rho = \pi \circ h = f \circ \rho.$$

В силу надъективности отображения ρ отсюда следует, что $\pi \circ g = f$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{E} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathscr{X} \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Однако это еще не означает, что отображение g является поднятием отображения f, поскольку, вообще говоря, это отображение может и не быть непрерывным. Чтобы найти условия, обеспечивающие непрерывность отображения g — и значит тот факт, что оно является поднятием отображения f,— мы напомним (см. лекцию 1), что непрерывное отображение $\rho: \mathscr{P} \to \mathscr{X}$ называется *эпиоморфным*, если множество $U \subset \mathscr{X}$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $\rho^{-1}U \subset \mathscr{P}$.

Лемма 3. *Пусть в коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{X} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{21}$$

отображение h непрерывно, а отображение ρ эпиоморфно. Тогда отображение g непрерывно.

Доказательство. Так как диаграмма (21) коммутативна, то

$$\rho^{-1}(g^{-1}U) = h^{-1}U$$

для любого множества $U \subset \mathcal{E}$. С другой стороны, если множество U открыто, то в силу непрерывности отображения h множество $h^{-1}U$ также открыто. Таким образом, для любого открытого множества $U \subset \mathcal{E}$ множество $g^{-1}U$ обладает тем свойством, что множество $\rho^{-1}(g^{-1}U)$ открыто. Поэтому в силу эпиоморфности отображения ρ множество $g^{-1}U$ открыто. Следовательно, отображение g непрерывно. □

Определение 4. Топологическое пространство $\mathcal{X}$ мы будем называть *удобным*, если оно линейно связно и для любой точки $x_0 \in \mathcal{X}$ — очевидно, надъективное — отображение

$$\rho: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}, \quad u \mapsto u(1), \quad u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}),$$

эпиоморфно.

В силу леммы 3 для такого пространства $\mathcal{X}$ построенное выше отображение g непрерывно.

Тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ — произвольное накрытие, $\mathcal{X}$ — удобное топологическое пространство и*

$$f: \mathcal{X} \to \mathcal{B}$$

— непрерывное отображение. Если существуют такие точки $x_0 \in \mathcal{X}$ и $p_0 \in \mathcal{E}$, что $f(x_0) = \pi(p_0)$ и имеет место включение (20), *то отображение f поднимаемо. При этом существует поднятие*

$$g: \mathcal{X} \to \mathcal{E}$$

отображения f, для которого $g(x_0) = p_0$. Если пространство хаусдорфово, то поднятие g единственно. □

Заметим, что *условие* (20) *необходимо для существования поднятия g*. Действительно, если $f = \pi \circ g$, то $f_* = \pi_* \circ g$

и потому

$$\operatorname{Im} f_* = \pi_*(\operatorname{Im} g_*) \subset \operatorname{Im} \pi_*. \ \square$$

Задача 2. Покажите, что если условие (20) выполнено при одном выборе точек x_0 и p_0, то для любой точки $x_0' \in \mathscr{X}$ существует такая точка $p_0' \in \mathscr{E}$, удовлетворяющая соотношению $f(x_0') = \pi(p_0')$, что условие (20) выполнено для точек x_0' и p_0', т. е. имеет место включение

$$\operatorname{Im}(f_*)_{x_0'} \subset \operatorname{Im}(\pi_*)_{p_0'}.$$

(Заметим, что принять здесь за p_0' любую точку пространства $\mathscr{E}$, удовлетворяющую соотношению $f(x_0') = \pi(p_0')$, вообще говоря, нельзя.)

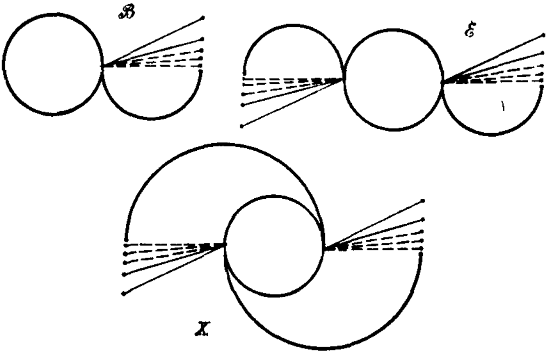
Следствие. *Для любого накрытия $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ и любого односвязного удобного пространства $\mathscr{X}$ каждое непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ поднимаемо. Для любых точек $x_0 \in \mathscr{X}$, $p_0 \in \mathscr{E}$, удовлетворяющих соотношению $f(x_0) = \pi(p_0)$, существует поднятие $g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ отображения f, для которого $g(x_0) = p_0$. Если пространство $\mathscr{B}$ хаусдорфово, то это поднятие единственно.*

Доказательство. Достаточно заметить, что при $\pi_1(\mathscr{X}, x_0) = 1$ условие (20) автоматически выполнено. $\square$

Это следствие (а иногда и сама теорема 1) называется принципом (или теоремой) о монодромии. На нем основывается бессчетное число разнообразных теорем существования в геометрии и анализе. Как мы увидим в следующей лекции, оно играет существенную роль и в собственно теории накрытий.

Для пространств $\mathscr{X}$, не являющихся удобными, теорема о монодромии, вообще говоря, не верна.

Пример 1. Пусть $\mathscr{B}$ — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из окружности $x^2 + y^2 = 1$, полуокружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$, и отрезков, соединяющих точку $(1, 0)$ со всеми точками вида $(3, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть, далее, $\mathscr{E}$ — результат объединения множества $\mathscr{B}$ с множеством, ему центрально симметричным, а $\mathscr{X}$ — множество, получающееся из множества $\mathscr{E}$ заменой полуокружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$, и полуокружности, ей симметричной, на полуокружность $(x-1)^2 + y^2 = 4$, $y \leqslant 0$, и симметричную полуокружность. Пусть, наконец, $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ и $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ — отображения, при которых окружность $x^2 + y^2 = 1$ дважды наматывается на себя (при неподвижной точке $p_0 = (1, 0)$), отрезки отображаются на соответствующие отрезки изометрично, а полуокружности из $\mathscr{E}$ и $\mathscr{X}$ гомеоморфно отображаются на полуокружность из $\mathcal{B}$. Легко видеть (докажите!), что оба эти отображения являются накрытиями. Отображение же g: $\mathcal{X} \to \mathcal{E}$ (единственное!), удовлетворяющее соотношению $\pi \circ g = f$ и оставляющее на месте точку (1, 0), тождественно на окружности $x^2 - y^2 = 1$



и всех отрезках, но нижнюю правую полуокружность из $\mathcal{X}$ оно отображает в верхнюю левую полуокружность из $\mathcal{E}$ (а верхнюю левую — в нижнюю правую). В частности, точку (3, 0) из $\mathcal{X}$ оно отображает в точку (—3, 0) на $\mathcal{E}$. Поскольку концы правых отрезков сходятся в $\mathcal{X}$ и в $\mathcal{E}$ к одной и той же точке (3, 0), это означает, что в точке (3, 0) отображение g терпит разрыв. Следовательно, для отображения f непрерывного поднятия g, переводящего точку (1, 0) в себя, не существует. Вместе с тем условие (20) здесь, как легко видеть, выполнено (докажите!).

Этот пример принадлежит Зиману.

Задача 3. Покажите, что для всех трех пространств $\mathcal{X}$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ из примера 1 вложение окружности индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Таким образом, фундаментальная группа каждого из этих пространств является бесконечной циклической группой с образующей ι, являющейся гомотопическим классом петли, однократно обегающей окружность. Покажите, что оба гомоморфизма фундаментальных групп $\pi_1(\mathcal{X}, p_0) \to \pi_1(\mathcal{B}, p_0)$ и $\pi_1(\mathcal{E}, p_0) \to \pi_1(\mathcal{B}, p_0)$, индуцированные накрытиями f и π, действуют по формуле $\iota^n \mapsto \iota^{2n}$.

Обратим внимание, что в примере Зимана пространство $\mathcal{X}$ локально линейно несвязно. (У точек (3, 0) и (—3, 0) все достаточно малые окрестности линейно несвязны.) Это не является случайностью.

Предложение 4. *Любое связное и локально линейно связное пространство $\mathcal{X}$ удобно.*

Доказательство. Как мы знаем (лекция III. 11), пространство $\mathscr{X}$ линейно связно. Поэтому надо лишь доказать, что для любой точки $x_0 \in \mathscr{X}$ отображение ρ: $\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \to \mathscr{X}$ эпиоморфно. Мы докажем даже большее, а именно (см. задачу 1 лекции 1), что *отображение* ρ *открыто*.

Пусть u_0—путь в $\mathscr{X}$, начинающийся в точке x_0. Для произвольной окрестности W пути u_0 в пространстве $\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ нам надо доказать, что точка $\rho(u_0) = u_0(1)$ является внутренней точкой образа ρW окрестности W при отображении ρ. При этом ясно, что это достаточно сделать лишь для окрестностей вида

$$W = \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \cap \langle K_1, U_1 \rangle \cap \ldots \cap \langle K_n, U_n \rangle,$$

где $K_1, \ldots, K_n$—компактные (= замкнутые) подмножества отрезка I, а $U_1, \ldots, U_n$—открытые множества пространства $\mathscr{X}$. (Напомним, что символом $\langle K, U \rangle$ мы обозначаем множество всех путей u: $I \to \mathscr{X}$, для которых $u(K) \subset U$.)

Без ограничения общности мы можем считать, что множества $K_1, \ldots, K_n$ занумерованы так, что для некоторого m, $0 \leqslant m \leqslant n$, имеют место соотношения

$$1 \in K_1, \ldots, 1 \in K_m, \quad 1 \notin K_{m+1}, \ldots, 1 \notin K_n.$$

(Равенство $m = 0$ означает, что $1 \notin K_i$ для всех i, а равенство $m = n$—что $1 \in K_i$ для всех i.) Тогда $u_0(1) \in U_1 \cap \ldots \ldots \cap U_m$, и значит, существует линейно связная окрестность V точки $\rho(u_0) = u_0(1)$, содержащаяся в $U_1 \cap \ldots \cap U_m$. (При $m = 0$ за окрестность V принимается произвольная линейно связная окрестность точки $\rho(u_0)$.) Выберем число t_0, $0 < t_0 < 1$, так, чтобы отрезок $[t_0, 1]$ не пересекался с множествами $K_{m+1}, \ldots, K_n$ и чтобы для любого t, $t_0 \leqslant t \leqslant 1$, имело место включение $u_0(t) \in V$. Ясно, что это всегда можно сделать.

Выбрав теперь для любой точки $x \in v$ путь v_x в v, соединяющий точку $u_0(1)$ с точкой x, рассмотрим путь $u_x \in \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$, определенный формулой

$$u_x(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ v_x\left(\dfrac{t-t_0}{1-t_0}\right), & \text{если } t_0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $u_x \in W$, т. е. $u_x(t) \in U_i$, когда $t \in K_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Если $i = 1, \ldots, m$ и $t \in K_i$, то $u_x(t) =$

$= u(t) \in U_i$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $u_x(t) = v\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right) \in V \subset U_i$ при $t_0 \leqslant t \leqslant 1$. Значит, в обоих случаях $u_x(t) \in U_i$. Если же $i = m+1, \ldots, n$ и $t \in K_i$, то непременно $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и потому $u_x(t) = u(t) \in U_i$.) Поскольку, очевидно, $\rho(u_x) = x$, этим доказано, что $V \subset \rho W$, и значит, точка $\rho(u_0)$ является внутренней точкой множества ρW. □

Таким образом, принцип монодромии применим к любым связным и локально линейно связным пространствам $\mathscr{X}$.

Следствие. *Для каждого связного, локально линейно связного и односвязного подпространства $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}$ и любых точек $b_0 \in \mathscr{X}$, $p_0 \in \mathscr{E}$, удовлетворяющих соотношению $\pi(p_0) = x_0$, произвольное накрытие π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ обладает сечением s: $\mathscr{X} \to \mathscr{E}$, для которого $s(b_0) = p_0$. Если пространство $\mathscr{B}$ хаусдорфово, то сечение s единственно.*