Лекция 5

Полулокально односвязные пространства.— Существование односвязных накрытий.— Условие изоморфности двух накрытий.— Универсальные накрытия.— Вспомогательная лемма.— Теорема классификации накрытий.—Группа автоморфизмов накрытия.— Регулярные накрытия.— Введение гладкости.

Вычисление фундаментальной группы данного пространства $\mathcal{B}$ с помощью предложений 2 и 3 лекции 4 предполагает умение строить односвязные накрытия этого пространства. На практике такого рода накрытия обычно строятся на основе конкретных свойств пространства $\mathcal{B}$, но для теоретической оценки силы этого метода нужно иметь достаточно общий способ их конструирования, хотя бы на практике и не применимый.

В первую очередь мы укажем простое условие на пространство $\mathcal{B}$, необходимое для того, чтобы оно было односвязно накрываемым.

Определение 1. Топологическое пространство $\mathcal{B}$ называется *локально односвязным*, если каждая его точка b_0 обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из односвязных окрестностей (т. е. таких линейно связных окрестностей U, что $\pi_1(U, b_0) = 1$). Пространство $\mathcal{B}$ называется *полулокально односвязным* (или *микроодносвязным*), если оно может быть покрыто открытыми множествами U, обладающими тем свойством, что для любой точки $b \in U$ каждая петля $u \in \Omega(U, b)$ гомотопна в $\mathcal{B}$ постоянной петле e_b (т. е. такими, что для любой точки $b \in U$ образ группы $\pi_1(U, b)$ в группе $\pi_1(\mathcal{B}, b)$ при гомоморфизме, индуцированном вложением $U \to \mathcal{B}$, тривиален; для сокращения речи мы будем называть такие множества U *односвязными в* $\mathcal{B}$).

Ясно, что любое подмножество односвязного в $\mathcal{B}$ множества U односвязно в $\mathcal{B}$. Поэтому в полулокально односвязном пространстве $\mathcal{B}$ каждая точка обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из односвязных в $\mathcal{B}$ окрестностей, а если пространство $\mathcal{B}$ еще и локально линейно связано, то эти окрестности можно считать линейно связными.

Конечно, каждое локально односвязное пространство полулокально односвязно. Кроме того, так как шар $\mathring{\mathbb{B}}^n$, как мы знаем, односвязен (см. пример 7 лекции 2), то *любое многообразие локально (и, значит, полулокально) односвязно.*

Предложение 1. *Любое связное, локально линейно связное и односвязно накрываемое пространство $\mathscr{B}$ полулокально односвязно.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ — односвязное накрытие пространства $\mathscr{B}$ и пусть U — произвольное ровно накрываемое открытое подмножество пространства $\mathscr{B}$. Предложение 1 будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что для любой точки $b_0 \in U$ каждая петля $u \in \Omega(U, b)$ гомотопна в $\mathscr{B}$ постоянной петле e_{b_0}.

С этой целью, произвольно выбрав точку $p_0 \in \pi^{-1}(b_0)$, рассмотрим окрестность V точки p_0, ровно накрывающую окрестность U. Так как отображение $\pi|_V\colon V \to U$ является, по определению, гомеоморфизмом, то в V определена петля

$$v = (\pi|_V)^{-1} \circ u,$$

а так как пространство $\mathscr{E}$ по условию односвязно, то эта петля гомотопна в $\mathscr{E}$ постоянной петле e_{p_0}. Поэтому петля $u = \pi \circ v$ также гомотопна (в $\mathscr{B}$) постоянной петле. $\square$

Пример 1. Пространство $\mathscr{B}$, являющееся прямым произведением счетного семейства окружностей $\mathbb{S}^1$, очевидным образом, не полулокально односвязно. Поэтому для него не существует односвязного накрытия.

Оказывается, что для хаусдорфовых пространств $\mathscr{B}$ это необходимое условие также и достаточно.

Теорема 1. *Любое связное, локально линейно связное и полулокально односвязное хаусдорфово пространство $\mathscr{B}$ односвязно накрываемо.*

Чтобы догадаться, как можно доказать эту теорему, мы предположим сначала, что односвязное накрытие $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ существует. Тогда, выбрав точку $b_0 \in \mathscr{B}$ и применив лемму 1 лекции 4 к накрытию $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ и тождественному отображению $f = \mathrm{id}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}$, получим отображение $g\colon \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B}) \to \mathscr{E}$, являющееся поднятием отображения $\rho\colon \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$, т. е. такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{E} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B}) \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Задача 1. Докажите, что отображение g надъективно и обладает тем свойством, что для путей u, $v \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ тогда и только тогда имеет место равенство $g(u) = g(v)$, когда $u(1) = v(1)$ и петля uv^{-1} пространства $\mathscr{B}$ гомотопна постоянной петле. [Указание. По определению $g(u) = s(p_0, u)(1)$.]

Утверждение задачи 1 означает, что пространство $\mathscr{E}$ является—с точностью до топологии—факторпространством пространства $\mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ по отношению эквивалентности $\equiv$, в котором $u \equiv v$ тогда и только тогда, когда $u(1) = v(1)$ и $uv^{-1} \sim e_{b_0}$. Это подсказывает, что пространство $\mathscr{E}$ можно пытаться определить как фактормножество пространства $\mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ по отношению $\equiv$, наделенное подходящей топологией. Так мы и поступим.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathscr{E}$—множество классов $\langle u \rangle$ путей $u \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ по отношению эквивалентности $\equiv$ и пусть $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$—отображение, определенное—очевидно, корректно—формулой

$$\pi \langle u \rangle = u(1).$$

Для каждого открытого множества $U \subset \mathscr{B}$ и каждого пути $u\colon I \to \mathscr{B}$, соединяющего точку b_0 с некоторой точкой из U, мы обозначим через $\langle u, U \rangle$ множество всех точек из $\mathscr{E}$ вида $\langle uv \rangle$, где v—произвольный путь в U с началом в точке $u(1)$.

Таким образом, $\langle u' \rangle \in \langle u, U \rangle$ тогда и только тогда, когда $u'(1) \in U$ и $u' \sim uv$, где v—некоторый путь в U, соединяющий точку $u(1)$ с точкой $u'(1)$. Но тогда, если w—произвольный путь в U с началом в точке $u'(1)$, то

$$u'w \sim (uv)\,w \sim u\,(vw)$$

и, значит, $\langle u'w \rangle \in \langle u, U \rangle$. Это показывает, что $\langle u', U \rangle \subset \subset \langle u, U \rangle$ и, следовательно, по симметрии

$$\langle u', U \rangle = \langle u, U \rangle.$$

(Напомним, что здесь u'—произвольный путь из $\mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$, для которого $\langle u' \rangle \in \langle u, U \rangle$.)

Поскольку для любого открытого множества U', содержащего точку $u(1)$, имеет место очевидное включение $\langle u, U' \rangle \subset \langle u, U \rangle$, отсюда следует, что для любых двух пересекающихся множеств $\langle u_1, U_1 \rangle$ и $\langle u_2, U_2 \rangle$ вида $\langle u, U \rangle$ и любой точки $\langle u_0 \rangle \in \langle u_1, U_1 \rangle \cap \langle u_2, U_2 \rangle$ имеет место включение

$$\langle u_0, U_1 \cap U_2 \rangle \subset \langle u_1, U_1 \rangle \cap \langle u_2, U_2 \rangle.$$

Поэтому все множества вида $\langle u, U\rangle$ можно принять за базу некоторой топологии на $\mathscr{E}$. Снабдив $\mathscr{E}$ этой топологией, мы тем самым превратим $\mathscr{E}$ в топологическое пространство.

Если множество U линейно связно, то, конечно,

$$\pi\langle u, U\rangle = U.$$

Поскольку по условию пространство $\mathscr{B}$ локально линейно связно, это доказывает, что *отображение* π *непрерывно и открыто* (заметим, что если $\pi\langle u\rangle \in U$, то $\langle u\rangle \in \langle u, U\rangle$).

Более того, если $\langle u_1\rangle, \langle u_2\rangle \in \langle u, U\rangle$ и $\pi\langle u_1\rangle = \pi\langle u_2\rangle$, то определена петля $u_1u_2^{-1}$, причем если $u_1 \sim uv_1$ и $u_2 \sim uv_2$, где v_1, v_2 — пути в U, то

$$u_1u_2^{-1} \sim u(v_1v_2^{-1})u^{-1},$$

где $v_1v_2^{-1}$ — петля в U. Поэтому если U односвязно в $\mathscr{B}$ и, значит, $v_1v_2^{-1} \sim e_{u(1)}$ в $\mathscr{B}$, то $u_1u_2^{-1} \sim e_{b_0}$, т. е. $\langle u_1\rangle = \langle u_2\rangle$. Это означает, что π биективно — и, значит, гомеоморфно, отображает $\langle u, U\rangle$ на U.

Полный прообраз $\pi^{-1}U$ окрестности U при отображении π состоит, очевидно, из всех множеств вида $\langle u, U\rangle$. При этом, если два таких множества $\langle u_1, U\rangle$ и $\langle u_2, U\rangle$ пересекаются и $\langle u_0\rangle \in \langle u_1, U\rangle \cap \langle u_2, U\rangle$, то по доказанному выше

$$\langle u_1, U\rangle = \langle u_0, U\rangle = \langle u_2, U\rangle.$$

Таким образом, для любого линейно связного и односвязного в $\mathscr{B}$ открытого множества U множество $\pi^{-1}U$ является дизъюнктным объединением открытых множеств вида $\langle u, U\rangle$, каждое из которых гомеоморфно отображается на U. По определению это означает, что множество U ровно накрывается отображением π.

Поскольку такого рода множества U покрывают локально линейно связное и полулокально односвязное пространство $\mathscr{B}$, это доказывает, что *отображение* π *является накрытием.*

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, нам осталось доказать, что *пространство* $\mathscr{B}$ *односвязно.* Для этого нам понадобится явное выражение для связности s в накрытии $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ (в силу хаусдорфовости пространства $\mathscr{B}$ — единственной).

Напомним (см. лекцию 3), что любой путь $u \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ определяет по формуле

$$u^{\#}(t)(\tau) = u(t\tau), \qquad t, \tau \in I,$$

некоторый путь $u^{\#}$ в $\mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$. Поэтому для любого $t \in I$ в пространстве $\mathcal{E}$ определена точка $\langle u^{\#}(t)\rangle$.

Пусть $t_0 \in I$ и пусть U — такое открытое множество в $\mathcal{B}$, что $u(t_0) \in U$, т. е. такое, что $u^{\#}(t_0)(1) \in U$. Тогда в $\mathcal{E}$ определено открытое множество $\langle u^{\#}(t_0), U\rangle$. Так как путь u является непрерывным отображением, то существует такое $\delta > 0$, что $u(t) \in U$ при $|t - t_0| < \delta$. В частности, это означает, что при $t_0 \leqslant t < t_0 + \delta$ ограничение $u|_{[t_0, t]}$ пути u на отрезке $[t_0, t]$ является путем (обобщенным) в U. Поскольку путь $u^{\#}(t)$ составлен, очевидно, из перепараметризированных путей $u^{\#}(t_0)$ и $u|_{[t_0, t]}$, отсюда следует, что

$$\langle u^{\#}(t)\rangle \in \langle u^{\#}(t_0), U\rangle, \qquad t_0 \leqslant t < t_0 + \delta.$$

Задача 2. Докажите, что это включение остается в силе и при $t_0 - \delta < t \leqslant t_0$.

Это доказывает, что *отображение* $t \mapsto \langle u^{\#}(t)\rangle$ *непрерывно*, т. е. является путем в $\mathcal{E}$.

Этот путь начинается в точке $p_0 = \langle e_{b_0}\rangle$ и проектируется в путь

$$t \mapsto u^{\#}(t)(1) = u(t),$$

т. е. в путь u. Следовательно — в силу единственности накрывающего пути — он является накрывающим путем $s(p_0, u)$, в который связность $s\colon \operatorname{Cocyl} \pi \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$ накрытия $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ переводит пару (p_0, π). Таким образом, мы доказали, что *связность* s *накрытия* $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ *определяется формулой*

$$s(p_0, u)(t) = \langle u^{\#}(t)\rangle, \qquad t \in I. \tag{1}$$

Пусть теперь $w \in \Omega(\mathcal{E}, p_0)$ — произвольная петля пространства $\mathcal{E}$ в точке p_0. Рассмотрим петлю $u = \pi \circ w$ пространства $\mathcal{B}$. Так как $u^{\#}(1) = u$, то согласно формуле (1) накрывающий путь $s(p_0, u)$ соединяет точку p_0 с точкой $\langle u\rangle$. С другой стороны, в силу единственности накрывающего пути должно иметь место равенство $s(p_0, u) = w$. Следовательно, $\langle u\rangle = w(1) = p_0$ и, значит, петля u гомотопна в $\mathcal{B}$ постоянному пути e_{b_0}.

Этим доказано, что $\pi_*[w] = e$ в группе $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ и потому — поскольку гомоморфизм π_* является (см. лекцию 3) мономорфизмом, — что $[w] = e$ в группе $\pi_1(\mathcal{E}, p_0)$. Следовательно, $\pi_1(\mathcal{E}, p_0) = 1$. □

Теперь мы уже можем более или менее вплотную приступить к задаче описания всех накрытий данного связного пространства $\mathscr{B}$.

Пусть пока пространство $\mathscr{B}$ лишь локально линейно связно и хаусдорфово и пусть $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — произвольное накрытие пространства $\mathscr{B}$. Как мы знаем (см. лекцию 4), для любой точки $p_0 \in \mathscr{E}$ отображение π индуцирует мономорфизм

$$(\pi_*)_{p_0}\colon \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$$

группы $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$ в группу $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$, где $b_0 = \pi(p_0)$.

Определение 2. Образ $\operatorname{Im}(\pi_*)_{p_0}$ мономорфизма $(\pi_*)_{p_0}$ мы будем называть *группой накрытия* ξ *в точке* p_0 и будем обозначать его символом $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$.

Подчеркнем, что группа накрытия по определению является подгруппой группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$. Как абстрактная группа эта группа изоморфна группе $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$.

Накрытие ξ тогда и только тогда односвязно, когда $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) = \{e\}$, где e, как всегда, единица группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.

Далее, мы знаем (см. лекцию 4), что для любого пути v пространства $\mathscr{E}$, соединяющего точку p_0 с некоторой точкой p_1, проектирующейся в ту же точку $b_0 \in \mathscr{B}$ (т. е. лежащую в слое $\mathscr{F}_{b_0} = \pi^{-1}(b_0)$ накрытия ξ над точкой b_0), имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathscr{E}, p_1) & \xrightarrow{\varphi_v} & \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \\ {\scriptstyle (\pi_*)_{p_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_*)_{p_0}} \\ \pi_1(\mathscr{B}, b_0) & \xrightarrow{\varphi_u} & \pi_1(\mathscr{B}, b_0), \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой представляют собой изоморфизмы. Следовательно, нижний изоморфизм φ_u этой диаграммы — являющийся, заметим, внутренним автоморфизмом группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ — переводит подгруппу $\mathrm{GR}_{p_1}(\xi) = \operatorname{Im}(\pi_*)_{p_1}$ в подгруппу $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) = \operatorname{Im}(\pi_*)_{p_0}$.

[Заметим, что, так как пространство $\mathscr{E}$, будучи одновременно с пространством $\mathscr{B}$ локально линейно связным, линейно связно, то хотя бы один путь v существует для любой точки p_1 слоя $\mathscr{F}_{b_0}$.]

В теории групп две подгруппы Γ_0 и Γ_1 группы G называются *сопряженными*, если существует внутренний автоморфизм группы G, отображающий подгруппу Γ_0 на подгруппу Γ_1.

В этой терминологии доказанное утверждение означает, что *группы накрытия* ξ *в различных точках слоя* $\mathcal{F}_{b_0}$ *сопряжены.*

При этом легко видеть, что *если подгруппа* Γ *группы* $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ *сопряжена с подгруппой* $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$, *то существует такая точка* $p_1 \in \mathcal{F}_{b_0}$, *что*

$$\mathrm{GR}_{p_1}(\xi) = \Gamma \tag{2}$$

Действительно, если это сопряжение осуществляется внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом $[u] \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$, то равенство (2) будет, очевидно, иметь место для конца $p_1 = v(1)$ пути $v = s(p_0, u)$, начинающегося в точке p_0 и накрывающего путь u. $\square$

Таким образом, мы видим, что *все группы* $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$, $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$, *составляют класс сопряженных подгрупп группы* $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.

Мы будем обозначать этот класс символом $\mathrm{GR}(\xi)$.

Класс $\mathrm{GR}(\xi)$ вполне может состоять из одной группы. Так будет тогда и только тогда, когда подгруппа $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$ инвариантна (является нормальным делителем). В этом случае мы будем отождествлять $\mathrm{GR}(\xi)$ с $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$. В частности, равенство $\mathrm{GR}(\xi) = \{e\}$ будет означать, что $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) = \{e\}$, т. е. что накрытие ξ односвязно.

Пусть Δ_0 и Δ_1—два класса сопряженных подгрупп некоторой группы G. Говорят, что класс Δ_0 *подчинен* классу Δ_1 и пишут $\Delta_0 \leqslant \Delta_1$, если для некоторой (а значит, и для любой) подгруппы Γ_0 класса Δ_0 существует такая подгруппа Γ_1 класса Δ_1, что $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие существования для двух данных накрытий ξ и ξ' пространства $\mathcal{B}$ хотя бы одного морфизма $\xi \to \xi'$ над $\mathcal{B}$.

Предложение 2. *Для накрытий* $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ *и* $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B})$ *связного и локально линейно связного пространства* $\mathcal{B}$ *тогда и только тогда существует хотя бы один морфизм*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

когда $\mathrm{GR}(\xi) \leqslant \mathrm{GR}(\xi')$.

Доказательство. Если морфизм φ существует, то для любой точки $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ имеет место коммутативная диаграмма гомоморфизмов групп

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathscr{E},p_0) \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dr, "(\pi_*)_{p_0}"'] & & \pi_1(\mathscr{E}',p_0') \arrow[dl, "(\pi'_*)_{p_0'}"] \\ & \pi_1(\mathscr{B},b_0) & \end{tikzcd}$$

где $p_0' = \varphi(p_0)$, т. е. выполнено равенство $(\pi'_*)_{p_0'} \circ \varphi_* = (\pi_*)_{p_0}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\pi_*)_{p_0} &= \operatorname{Im}((\pi'_*)_{p_0'} \circ \varphi_*) = \\ &= (\pi'_*)_{p_0'}(\operatorname{Im}\varphi_*) \subset \\ &\subset (\pi'_*)_{p_0'}(\pi_1(\mathscr{E}', p_0')) = \operatorname{Im}(\pi'_*)_{p_0'}, \end{aligned}$$

т. е. $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p_0'}(\xi)$.

Обратно, пусть существуют такие точки $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$ и $p_0' \in \mathscr{F}'_{b_0}$, что

(3) $$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p_0'}(\xi').$$

Так как каждый морфизм $\varphi\colon \xi \to \xi'$ является не чем иным, как поднятием отображения π по отношению к отображению π', а необходимое и достаточное условие существования поднятия из теоремы 1 лекции 3 состоит в этом случае как раз во включении (3), то согласно этой теореме существует — единственный, если пространство $\mathscr{B}$ хаусдорфово — морфизм $\varphi\colon \xi \to \xi'$, для которого $\varphi(p_0) = p_0'$. (Пространство $\mathscr{E}$ удобно в силу предложения 3 лекции 4 и предположенной локальной линейной связности пространства $\mathscr{B}$.) □

Определение 3. Мы будем говорить, что накрытие ξ' *подчинено* накрытию ξ, и будем писать $\xi \geqslant \xi'$, если существует хотя бы один морфизм $\xi \to \xi'$.

В этой терминологии предложение 2 утверждает, что $\xi \geqslant \xi'$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{GR}(\xi) \leqslant \mathrm{GR}(\xi')$. (Обратите внимание на то, что знаки неравенств здесь обращаются.)

Заметим, что фактически нами доказано следующее более точное предложение:

Предложение 2'. *Пусть* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *и* $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B})$ — *накрытия связного и локально линейно связного пространства* $\mathscr{B}$ *и пусть* $p_0 \in \mathscr{E}$ *и* $p_0' \in \mathscr{E}'$ — *та-*

кие точки, что $\pi(p_0)=\pi'(p_0')$. *Морфизм*

$$\varphi: \xi \to \xi',$$

для которого $\varphi(p_0)=p_0'$, *существует тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p_0'}(\xi').$$

Если пространство $\mathscr{B}$ *хаусдорфово, то морфизм* φ *единственен.* □

Следствие 1. *Два накрытия* ξ *и* ξ' *над связным и локально линейно связным хаусдорфовым пространством* $\mathscr{B}$ *тогда и только изоморфны, когда*

$$\mathrm{GR}(\xi)=\mathrm{GR}(\xi'). \tag{4}$$

Доказательство. Равенство (4) означает, что для любой точки $p_0 \in \mathscr{E}$, проектирующейся в точку $b_0 \in \mathscr{B}$, существует такая точка $p_0' \in \mathscr{E}'$, также проектирующаяся в точку b_0, что

$$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)=\mathrm{GR}_{p_0'}(\xi'). \tag{5}$$

Но если равенство (5) выполнено, то в силу предложения 2' существуют такие морфизмы

$$\varphi: \xi \to \xi' \quad \text{и} \quad \psi: \xi' \to \xi,$$

что $\varphi(p_0)=p_0'$ и $\psi(p_0')=p_0$. Морфизм $\psi\circ\varphi: \xi \to \xi$, подобно тождественному морфизму $\mathrm{id}: \xi \to \xi$, оставляет точку p_0 на месте. Поэтому в силу единственности $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}$. Аналогично доказывается, что $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}$. Следовательно, морфизмы φ и ψ являются взаимно обратными изоморфизмами, и накрытия ξ и ξ' изоморфны.

Обратно, пусть накрытия ξ и ξ' изоморфны и пусть $\varphi: \xi \to \xi'$ — произвольный изоморфизм. Тогда согласно предложению 2' для любой точки $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$ будет иметь место включение

$$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p_0'}(\xi'), \qquad \text{где } p_0'=\varphi(p_0).$$

С другой стороны, так как имеется обратный изоморфизм $\varphi^{-1}: \xi' \to \xi$ и так как $\varphi^{-1}(p_0')=p_0$, то согласно тому же предложению 2' имеет место и обратное включение

$$\mathrm{GR}_{p_0'}(\xi') \subset \mathrm{GR}_{p_0}(\xi).$$

Поэтому для изоморфных накрытий ξ и ξ' равенство (5) выполнено. □

Фактически нами также доказано более точное утверждение:

Следствие 1'. *Изоморфизм* $\varphi\colon \xi \to \xi$, *для которого* $\varphi(p_0) = p_0'$, *существует тогда и только тогда, когда в группе* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ *имеет место равенство* (5). □

Накрытия из примера Зимана (см. пример 1 и задачу 1 лекции 3) показывают, что для локально линейно несвязных пространств это следствие неверно.

Следствие 2. *Накрытие* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *тогда и только тогда тривиально (изоморфно накрытию* $(\mathscr{B}, \mathrm{id}, \mathscr{B})$*), когда*

$$\mathrm{GR}(\xi) = \pi_1(\mathscr{B}, b_0). \ \square$$

Класс Δ сопряженных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ мы будем называть *реализуемым*, если существует такое накрытие $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, что $\Delta = \mathrm{GR}(\xi)$. Согласно следствию 1 *классы изоморфных накрытий связного локально линейно связного и хаусдорфова пространства* $\mathscr{B}$ *находятся в биективном соответствии с реализуемыми классами сопряженных подгрупп группы* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.

Тем самым, для полного описания всех накрытий пространства надо лишь охарактеризовать реализуемые классы.

Определение 4. Накрытие ξ_0 связного и локально линейно связного пространства $\mathscr{B}$ называется *универсальным*, если $\xi_0 \geqslant \xi$ для любого накрытия ξ пространства $\mathscr{B}$. Пространство $\mathscr{B}$ называется *универсально накрываемым*, если для него существует хотя бы одно универсальное накрытие.

Согласно предложению 2 *накрытие* ξ_0 *тогда и только тогда универсально, когда*

$$\mathrm{GR}(\xi_0) \leqslant \mathrm{GR}(\xi) \tag{6}$$

для любого накрытия ξ *пространства* $\mathscr{B}$. Поэтому для любых двух универсальных накрытий ξ_0 и ξ_0' имеет место равенство

$$\mathrm{GR}(\xi_0) = \mathrm{GR}(\xi_0'),$$

и значит эти накрытия изоморфны. Таким образом, *с точностью до изоморфизма универсальное накрытие пространства* $\mathscr{B}$ *единственно.*

Кроме того, мы видим, что класс $\mathrm{GR}(\xi_0)$ не зависит от выбора универсального накрытия ξ_0 и однозначно определяется пространством $\mathscr{B}$. Мы будем обозначать его символом $\mathrm{GR}(\mathscr{B})$.

Задача 3. Докажите, что класс $\mathrm{GR}(\mathscr{B})$ состоит из одной подгруппы (автоматически инвариантной).

По определению условие

$$\mathrm{GR}(\mathscr{B}) \leqslant \Delta \tag{7}$$

необходимо для реализуемости класса Δ сопряженных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.

Условие (6) универсальности накрытия ξ_0 заведомо выполнено, когда $\mathrm{GR}(\xi_0)=\{e\}$, т. е. когда накрытие ξ_0 односвязно. Следовательно, *любое односвязное накрытие универсально*, и значит односвязно накрываемые (т. е. — в предположении хаусдорфовости — полулокально односвязные) пространства универсально накрываемы. Односвязно накрываемые пространства $\mathscr{B}$ характеризуются при этом равенством $\mathrm{GR}(\mathscr{B})=\{e\}$ (и, значит, для них необходимое условие (7) реализуемости класса сопряженных подгрупп всегда выполнено).

Замечание 1. Существуют связные и локально линейно связные — но заведомо не полулокально односвязные — хаусдорфовы пространства, для которых либо не существует универсального накрытия, либо такое накрытие существует, но не является односвязным.

Пример 2 и задача 4. Докажите, что для произведения счетного числа окружностей не существует универсального накрытия.

Пример 3 и задача 5. Пусть $\mathscr{B}$ — подпространство плоскости, являющееся объединением счетного семейства окружностей вида

$$\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\frac{1}{n^2}, \qquad \text{где } n=1, 2, \ldots \tag{8}$$

Докажите, что для $\mathscr{B}$ не существует универсального накрытия.

Пример 4 и задача 6. Пусть $\mathscr{C}$ — конус над пространством из задачи 5, т. е. подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, состоящее из всех прямолинейных отрезков, соединяющих точку $(0, 0, 1)$ со всеми точками окружностей (8), и пусть $\mathscr{C}'$ — образ конуса $\mathscr{C}$ при центральной симметрии $x \longmapsto -x$ пространства $\mathbb{R}^3$. Подпространство $\mathscr{B}=\mathscr{C}\cup\mathscr{C}'$ пространства $\mathbb{R}^3$, очевидно, связно и локально линейно связно. Докажите, что

а. *Пространство $\mathscr{B}$ не односвязно.* [Указание. Рассмотрите петлю, поочередно обегающую уменьшающиеся окружности в подпространствах $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$.]

б. *Любое накрытие $\pi\colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{B}$ пространства $\mathscr{B}$ тривиально* (пространство $\mathscr{B}$ ненакрываемо в смысле лекции 3). [Указание. Подпространства $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ пространства $\mathscr{B}$ стягиваемы, откуда следует, что накрытие π обладает над каждым из них сечением (поднятием тождественного отображения), переводящим точку 0 в произвольную точку соответствующего слоя.]

В силу свойства б тривиальное накрытие id: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ универсально, а в силу свойства а это накрытие неодносвязно. Таким образом, пространство $\mathcal{B}$ доставляет нам пример связного, линейно связного и хаусдорфова пространства, обладающего универсальным, но не односвязным накрытием.

Задача 7. Для каждого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ пространства $\mathcal{B}$ обозначим через $[\mathfrak{U}]$ подгруппу группы $\pi_1(\mathcal{B}, b)$, порожденную гомотопическими классами путей вида uvu^{-1}, где u — произвольный путь пространства $\mathcal{B}$, начинающийся в точке b_0, а v — произвольная петля в точке $u(1)$, для которой существует такой элемент U накрытия $\mathfrak{U}$, что $v(t) \in U$ для всех $t \in I$. Эта подгруппа, очевидно, инвариантна.

Докажите, что

а. *Связное, локально линейно связное и хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$ тогда и только тогда универсально накрываемо, когда существует такое открытое покрытие $\mathfrak{U}_0$ пространства $\mathcal{B}$, что для любого покрытия $\mathfrak{U}$ имеет место включение*

$$[\mathfrak{U}_0] \subset [\mathfrak{U}].$$

б. *В этом случае* $\mathrm{GR}(\mathcal{B}) = [\mathfrak{U}_0]$.

[Указание. Докажите, что для любого покрытия $\mathfrak{U}$ существует такое накрытие ξ пространства $\mathcal{B}$, что $\mathrm{GR}(\xi) = [\mathfrak{U}]$. Это — обобщение теоремы 1.]

Мы решим задачу о характеризации реализуемых классов сопряженных подгрупп лишь для простейшего — но практически единственно важного! — класса односвязно накрываемых (= полулокально односвязных) пространств $\mathcal{B}$. Для этого нам понадобится следующая простая лемма:

Лемма 1. *Пусть в коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd} \tag{9}$$

пространство $\mathcal{B}$ связно и локально линейно связно, а отображения $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ и $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ являются накрытиями. Тогда отображение $\pi'\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{B}$ также будет накрытием.

Доказательство. Если открытое множество $U \subset \mathcal{B}$ линейно связно, то утверждение, что оно ровно накрыто отображением $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$, в точности означает, что все компоненты линейной связности множества $\pi^{-1}U$ открыты и каждая из них гомеоморфно проектируется на U. При этом, если пространство $\mathcal{B}$, а значит и пространство $\mathcal{E}$, локально линейно связно, то требование об открытости компонент линейной связности множества $\pi^{-1}U$ автоматически выполнено, так как в локально линейно связном пространстве каждая компонента линейной связности произвольного открытого множества является открытым множеством (см. лекцию III.11).

Назовем открытое множество $U\subset\mathscr{B}$ *отмеченным*, если оно линейно связно и каждая компонента линейной связности V множества $(\pi')^{-1}U$ ровно накрыта отображением $\varphi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{E}'$. (Заметим, что пространство $\mathscr{E}'$, будучи локально гомеоморфным пространству $\mathscr{E}$, а значит и пространству $\mathscr{B}$, локально линейно связно. Следовательно, компонента V открыта в $\mathscr{E}'$.)

Ясно, что отмеченные множества покрывают пространство $\mathscr{B}$ (они даже составляют базу этого пространства). Поэтому для доказательства леммы 1 достаточно показать, что каждое отмеченное множество U ровно накрыто отображением π', т. е. — в силу только что сделанных замечаний — что на каждой компоненте линейной связности V множества $(\pi')^{-1}U$ отображение π' является гомеоморфизмом на U.

Но это теперь почти очевидно. Действительно, пусть W — произвольная компонента линейной связности множества $\varphi^{-1}V$. Так как по условию отображение φ ровно накрывает открытое множество V, то отображение $\varphi|_W\colon W\to V$ является гомеоморфизмом. С другой стороны, так как, очевидно, $\varphi^{-1}V\subset\pi^{-1}U$, то компонента W содержится в одной из компонент линейной связности W' множества $\pi^{-1}U$. Множество $\varphi W'$ содержится в множестве $(\pi')^{-1}U$, линейно связно и содержит множество $\varphi W=V$. Поэтому $\varphi W'=V$. Поскольку отображения $\pi|_{W'}=\pi'|_V\circ\varphi|_{W'}$ и $\varphi|_W$ являются гомеоморфизмами, это возможно только при $W=W'$. Значит, в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\varphi|_W"] \arrow[dr, "\pi|_W"'] & & V \arrow[dl, "\pi'|_V"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

отображения $\pi|_W$ и $\varphi|_W$ являются гомеоморфизмами. Поэтому отображение $\pi'|_V$ также будет гомеоморфизмом. $\square$

Задача 8. Докажите, что если в коммутативиой диаграмме (9) отображеиии $\pi\colon\mathscr{E}\to\mathscr{B}$ и $\pi'\colon\mathscr{E}'\to\mathscr{B}$ являются иакрытиями, а связное пространство $\mathscr{B}$ локально линейно связно и хаусдорфово, то отображение $\varphi\colon\mathscr{E}\to\mathscr{E}'$ также будет накрытием. (*Морфизм накрытий является накрытием.*) (Предупреждение. Не забудьте доказать надъективность отображения φ.)

Замечание 2. Утверждение, что если отображения π' и φ являются накрытиями, то отображение π также будет накрытием, вообще говоря, неверно, т. е. *композиция двух накрытий может и не быть накрытием.*

Задача 9. Покажите, что композиция $\pi'\circ\varphi\colon \mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{B}$ накрытий $\varphi\colon \mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}'$ и $\pi'\colon \mathscr{E}'\longrightarrow\mathscr{B}$ будет накрытием, если либо накрытие $\pi'\colon \mathscr{E}'\longrightarrow\mathscr{B}$ конечнолистно, либо пространство $\mathscr{B}$—предполагаемое, как всегда, связным и локально линейно связным—локально односвязно. [Указание. Докажите, что *любое односвязное открытое множество $U\subset\mathscr{B}$ ровно накрыто в каждом накрытии $\pi\colon \mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{B}$.*]

Изоморфизмы $\alpha\colon \xi\to\xi$ накрытия $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ на себя называются, естественно, его *автоморфизмами* (другие названия—*преобразования накрытия* и *скольжения*). Они составляют группу, обозначаемую символом $\operatorname{Aut}\xi$.

По определению группа $\operatorname{Aut}\xi$ действует слева на пространстве $\mathscr{E}$. Легко видеть, что *это действие дискретно*, т. е. (см. пример 5 лекции 2) для любой точки $p\in\mathscr{E}$ существует такая ее окрестность V, что $\alpha V\cap V=\varnothing$ для любого нетождественного автоморфизма $\alpha\in\operatorname{Aut}\xi$. (Действительно, за V можно, очевидно, принять любую окрестность точки p, ровно накрывающую открытое множество $U=\pi(V)$.) Поэтому дискретно действие и любой подгруппы Γ группы $\operatorname{Aut}\xi$. При этом пространство орбит $\mathscr{E}_\Gamma=\mathscr{E}/\Gamma$ включается в коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{E}_\Gamma \arrow[dl, "\pi_\Gamma"] \\ & \mathscr{B} & \end{tikzcd}$$

отображение φ которой является, как мы знаем, накрытием. Поэтому в силу леммы 1 накрытием будет и индуцированное отображение

$$\pi_\Gamma\colon \mathscr{E}_\Gamma\to\mathscr{B},\quad \Gamma p\mapsto\pi(p).$$

Если теперь пространство $\mathscr{E}$ односвязно (т. е. односвязно накрытие ξ), то согласно предложению 3 лекции 3 фундаментальная группа пространства $\mathscr{E}_\Gamma$ будет изоморфна (или, точнее,— из-за того, что группа Γ действует теперь слева — антиизоморфна) группе Γ. Таким образом, если *накрытие ξ односвязно, то для любой подгруппы Γ группы $\operatorname{Aut}\xi$ группа накрытия $\xi_\Gamma=(\mathscr{E}_\Gamma, \pi_\Gamma, \mathscr{B})$ антиизоморфна группе Γ.*

С другой стороны, *для односвязного накрытия ξ группа $\operatorname{Aut}\xi$ транзитивно действует на каждом слое $\mathscr{F}_b$,* $b\in\mathscr{B}$

этого накрытия, потому что для односвязного пространства $\mathscr{E}$ условие (5) существования изоморфизма $\xi \to \xi'$, переводящего точку p_0 в точку p_0', выполнено при $\xi' = \xi$ для любых точек p_0 и p_0' одного слоя. Следовательно, при $\Gamma = \operatorname{Aut} \xi$ отображение π_Γ биективно и потому, являясь накрытием, представляет собой изоморфизм. Таким образом, действие группы $\operatorname{Aut} \xi$ на пространстве $\mathscr{E}$ удовлетворяет всем условиям предложения 2 лекции 4 и, значит, согласно этому предложению *для односвязного накрытия* ξ *группа* $\operatorname{Aut} \xi$ *изоморфна фундаментальной группе* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ *пространства* $\mathscr{B}$ *в некоторой — произвольно выбранной! — точке* $b_0 \in \mathscr{B}$.

Не обращаясь к предложению 3 лекции 3, изоморфизм

$$j\colon \operatorname{Aut} \xi \longrightarrow \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \tag{10}$$

можно построить, если выбрать некоторую точку $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$, от которой зависит этот изоморфизм, и для любого автоморфизма $\alpha\colon \xi \to \xi$ положить

$$j(\alpha) = [\pi \circ v], \qquad \alpha \in \operatorname{Aut} \xi, \tag{11}$$

где v — произвольный путь в пространстве $\mathscr{E}$, соединяющий точку p_0 с точкой $\alpha(p_0)$.

Задача 10. Убедитесь непосредственно, что

а) *формула* (11) *корректно определяет некоторое отображение* (10) (не забудьте, что пространство $\mathscr{E}$ по условию односвязно);

б) *это отображение является гомоморфизмом*;

в) *гомоморфизм* (10) *является изоморфизмом* (здесь понадобится предложение 2 и его следствие 1).

Группа $\mathrm{GR}_{\Gamma p_0}(\xi_\Gamma)$ накрытия $\xi_\Gamma = (\mathscr{E}_\Gamma, \pi_\Gamma, \mathscr{B})$ в точке Γp_0 состоит, по определению, из гомотопических классов $[u]$ петель $u \in \Omega\mathscr{B}$, обладающих тем свойством, что накрывающий их в $\mathscr{E}_\Gamma$ путь с началом в точке Γp_0 является петлей, т. е. тем свойством, что накрывающий их в $\mathscr{E}$ путь v с началом в точке p_0 кончается в точке орбиты Γp_0. Поскольку такие пути v — это в точности пути в $\mathscr{E}$, соединяющие точку p_0 с точками вида $\alpha(p_0)$, где $\alpha \in \Gamma$, мы видим, что

$$\mathrm{GR}_{\Gamma p_0}(\xi_\Gamma) = j\Gamma.$$

В силу следствия 1 предложения 2 этим доказана следующая теорема классификации накрытий, которая и была нашей основной целью.

Теорема 2. *Для любого связного, локально линейно связного, полулокально односвязного* (= *односвязно накры-*

ваемого) хаусдорфова пространства $\mathscr{B}$ имеет место биективное соответствие

$$[\xi] \Leftrightarrow \mathrm{GR}(\xi) \tag{12}$$

между классами изоморфных (над $\mathscr{B}$) накрытий ξ пространства $\mathscr{B}$ и классами сопряженных подгрупп фундаментальной группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$. □

Следствие 1. *Связное, локально линейно связное, полулокально односвязное и хаусдорфово пространство тогда и только тогда ненакрываемо (каждое его накрытие тривиально), когда оно односвязно.* □

Следствие 2. *Любое односвязно накрываемое хаусдорфово пространство $\mathscr{B}$ гомеоморфно пространству орбит $\mathscr{E}/\Gamma$, где $\mathscr{E}$ — односвязное накрывающее $\mathscr{B}$ пространство, а Γ — группа автоморфизмов накрытия $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$.*

Замечание 3. Теореме 2 можно придать большее формальное совершенство, введя в рассмотрение *пунктированные накрытия*, т. е. пары (ξ, p_0), состоящие из накрытия $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ и произвольной точки $p_0 \in \mathscr{E}$. Пунктированные накрытия (ξ, p_0) и (ξ', p_0') считаются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon \xi \to \xi'$, для которого $\varphi(p_0) = p_0'$ (для этого, конечно, необходимо, чтобы точки p_0 и p_0' лежали над одной и той же точкой $b_0 \in \mathscr{B}$). Тогда классы изоморфных пунктированных накрытий будут в биективном соответствии

$$[(\xi_0, p_0)] \Leftrightarrow \mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \tag{13}$$

с подгруппами группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.

В этой форме теорема 2 аналогична основной теореме теории Галуа полей. На этом основании соответствие (13) (а также соответствие (12)) иногда называют соответствием Галуа. [Аналогия с теорией Галуа здесь отнюдь не формальна и в рамках современной абстрактной алгебраической геометрии теория накрытий и теория Галуа выступают как специализации одной единой теории.]

Аналог изоморфизма (10) существует и для произвольных накрытий $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$.

Задача 11. Как мы знаем (см. лекцию 4), группа $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ транзитивно действует справа на каждом слое $\mathscr{F}_{b_0}$, $b_0 \in \mathscr{B}$, произвольного накрытия $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$. Докажите, что *это действие перестановочно с левым действием группы* $\mathrm{Aut}\,\xi$, т. е. для любого автоморфизма $\alpha\colon \xi \to \xi'$, любого элемента $\gamma \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ и любой точки $p \in \mathscr{F}_{b_0}$ имеет место равенство

$$\alpha(p\gamma) = \alpha(p)\gamma.$$

[Указание. Если $\gamma = [u]$, где $u \in \Omega\mathscr{B}$, то $p\gamma = s(p, u)(1)$, где s—связность для ξ.]

На языке теории представлений утверждение задачи 11 означает, что соответствие

$$\alpha \mapsto \alpha|_{\mathscr{F}_{b_0}} \tag{14}$$

определяет гомоморфизм группы $\operatorname{Aut}\xi$ в группу $\operatorname{Aut}\mathscr{F}_{b_0}$ $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$-*автоморфизмов* правого $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$-пространства $\mathscr{F}_{b_0}$ (эквивариантных биективных отображений $\mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_0}$).

Задача 12. Докажите, что *гомоморфизм* (14) *является изоморфизмом группы* $\operatorname{Aut}\xi$ *на группу* $\operatorname{Aut}\mathscr{F}_{b_0}$. [Указание. Мономорфность обеспечивается утверждением о единственности из предложения 2, а для доказательства эпиморфности надо выбрать точку $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$, построить с помощью предложения 2 для любого автоморфизма $\beta\colon \mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_0}$ автоморфизм $\alpha\colon \xi \to \xi$, удовлетворяющий соотношению $\alpha(p_0) = \beta(p_0)$, и воспользоваться транзитивностью действия группы $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.]

В теории представлений доказывается, что *если группа G транзитивно действует на множестве $\mathscr{F}$, то группа $\operatorname{Aut}\mathscr{F}$ всех G-автоморфизмов этого множества изоморфна факторгруппе* $N\Gamma/\Gamma$, где Γ—*стабилизатор* (*стационарная подгруппа*) произвольной точки $p_0 \in \mathscr{F}$, состоящая из всех элементов $\gamma \in G$, для которых $p_0\gamma = p$, а $N\Gamma$—*нормализатор* подгруппы Γ (наибольшая подгруппа, в которой Γ является нормальным делителем).

Действительно, в силу транзитивности действия группы G для любого автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut}\mathscr{F}$ существует такой элемент $g \in G$, что $\alpha(p_0) = p_0 g$. Так как из $p_0 g_1 = p_0 g_2$ следует, что $p_0 g_1 g_2^{-1} = p_0$, т. е. $g_1 g_2^{-1} \in \Gamma$, то левый смежный класс Γg элемента g по подгруппе Γ не зависит от выбора этого элемента. Кроме того, если $\gamma \in \Gamma$, то]

$$p_0 g\gamma = \alpha(p_0)\gamma = \alpha(p_0\gamma) = \alpha(p_0) = p_0 g,$$

и обратно, если $p_0 g\gamma = p_0 g$, то $\alpha(p_0\gamma) = \alpha(p_0)\gamma = (p_0 g)\gamma = p_0 g = \alpha(p_0)$, и значит $p_0\gamma = p_0$, т. е. $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, $\gamma \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $p_0 g\gamma = p_0 g$, т. е. когда $g\gamma g_0^{-1} \in \Gamma$. Это означает, что $\Gamma = g^{-1}\Gamma g$, т. е. что $g \in N\Gamma$. Следовательно, формула

$$\alpha \mapsto \Gamma g \tag{15}$$

корректно определяет некоторое отображение $\operatorname{Aut}\mathscr{F} \to N\Gamma/\Gamma$. Если $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut}\mathscr{F}$ и $\alpha(p_0) = p_0 g$, $\beta(p_0) = p_0 h$, то $(\alpha\circ\beta)(p_0) = \alpha(p_0 h) =$

$=\alpha(p_0)h=(p_0g)h=p_0(gh)$. Это означает, что отображение (15) является гомоморфизмом. Если $\Gamma g=\Gamma$, т. е. $g\in\Gamma$, то $\alpha(p_0)=p_0$, и значит $\alpha(p_0g_1)=\alpha(p_0)g_1=p_0g_1$ для любого элемента $g_1\in G$. Поскольку группа G действует транзитивно, это означает, что $\alpha=\mathrm{id}$. Таким образом, отображение (15) является мономорфизмом. Наконец, если $p_0g=p_0h$, где $g, h\in G$, т. е. если $gh^{-1}\in\Gamma$, то $(\gamma g)(\gamma h)^{-1}\in\Gamma$, и значит $p_0\gamma g=p_0\gamma h$ для любого элемента $\gamma\in N\Gamma$. Поэтому формула

$$\alpha(p)=p_0\gamma g,\qquad p\in\mathcal{F},$$

где g — такой элемент группы G, что $p_0g=p$, корректно определяет некоторое — очевидно, биективное и эквивариантное, т. е. являющееся автоморфизмом G-пространства $\mathcal{F}$ — отображение $\alpha\colon \mathcal{F}\to\mathcal{F}$. Так как по построению $\alpha(p_0)=p_0\gamma$, то мономорфизм (15) является, следовательно, изоморфизмом.

Для подгруппы $\Gamma=\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$ группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ фактор-группа $N\Gamma/\Gamma$ называется *группой Вейля* накрытия ξ в точке $p_0\in\mathcal{F}_{b_0}$ и обозначается символом $\mathrm{Weyl}_{p_0}(\xi)$. Таким образом, мы видим, что *для любого накрытия* $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ *связного, локально линейно связного и хаусдорфова пространства* $\mathcal{B}$ *группа* $\mathrm{Aut}\,\xi$ *изоморфна группе Вейля* $\mathrm{Weyl}_{p_0}(\xi)$ *накрытия* ξ *в произвольной точке* $p_0\in\mathcal{F}_{b_0}$.

В этом изоморфизме автоморфизму $\alpha\colon \xi\to\xi$ отвечает смежный класс по подгруппе $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$ элемента $\gamma\in\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$, $b_0=\pi(p_0)$, являющегося гомотопическим классом петли $\pi\circ v$, где v — произвольный путь в $\mathcal{E}$, соединяющий точку p_0 с точкой $\alpha(p_0)$.

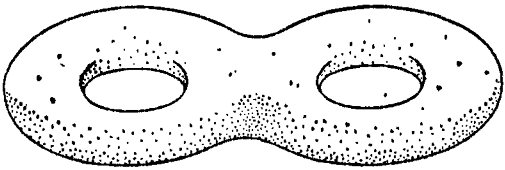
Для односвязного (= универсального) накрытия ξ это снова дает уже известный нам изоморфизм (9).

В теории Галуа особую роль играют так называемые нормальные поля, которым отвечают инвариантные подгруппы. В теории накрытий им соответствуют накрытия ξ, для которых $\mathrm{GR}(\xi)$ является инвариантной подгруппой. Такие накрытия называются *регулярными*. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\xi$ регулярного накрытия изоморфна, очевидно, факторгруппе $\pi_1(\mathcal{B}, b_1)/\mathrm{GR}(\xi)$.

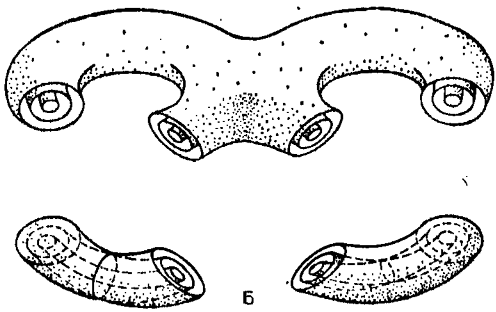
Задача 13. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\xi$ произвольного накрытия $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, очевидно, действует слева на каждом слое $\mathcal{F}_{b_0}$, $b_0\in\mathcal{B}$. Покажите — в обычных предположениях на пространство $\mathcal{B}$ — что *накрытие* ξ *тогда и только тогда регулярно, когда это действие транзитивно* (для любых точек p_0, $p_1\in\mathcal{F}_{b_0}$ существует такой автоморфизм $\alpha\colon \xi\to\xi'$, что $\alpha(p_0)=p_1$). Выведите отсюда, что *каждое регулярное накрытие является главным расслоением* (см. лекцию 1) *с группой* $\mathrm{Aut}\,\xi$.

Задача 14. Докажите, что *накрытие* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *тогда и только тогда регулярно, когда для любых точек* $p_0, p_1 \in \mathscr{F}_{b_0}$ *и любой петли* v *пространства* $\mathscr{E}$ *в точке* p_0 *путь, накрывающий петлю* $\pi \circ v$ *и начинающийся в точке* p_1, *также является петлей.*

Пример 5. Пусть $\mathscr{B}$ — крендель (ориентируемая поверхность с двумя ручками; см. рис. А), а $\mathscr{E}$ — поверхность (см. рис. Б), получающаяся из трех кренделей с рассеченными ручками при склеивании слева первого

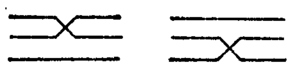


А



Б

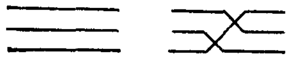
и второго экземпляров кренделя, а справа — второго и третьего; условно это склеивание может быть изображено схемой



Ясно, что $\mathscr{E}$ линейно связно, и значит тройка $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, где $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ — естественная проекция, является накрытием. При этом путь, накрывающий петлю в $\mathscr{B}$, однократно обегающую параллель левой ручки, будет петлей только тогда, когда он начинается на третьем листе. Следовательно, это накрытие не регулярно.

Задача 15. Докажите, что группа автоморфизмов построенного накрытия тривиальна, т. е. что единственным автоморфизмом этого накрытия является тождественное отображение.

Пример 6 и задача 16. Вычислите группу автоморфизмов накрытия кренделя, аналогичным образом получающегося склеиванием по схеме



и, в частности, покажите, что она транзитивно действует на слоях (и, значит, это накрытие регулярно).

Пример 7. Как мы знаем (см. пример 5 лекции 2), для каждого дискретного действия группы Γ на пространстве $\mathscr{E}$ тройка $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B}=\mathscr{E}/\Gamma$ — пространство орбит, а $\pi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}$ — естественная проекция $p\mapsto\Gamma p$, является накрытием. Для каждого элемента $\gamma\in\Gamma$ отображение $L_\gamma\colon p\mapsto\gamma p$ является, очевидно, автоморфизмом накрытия ξ. Поскольку группа Γ транзитивно действует на каждой орбите, это доказывает, что *накрытие ξ регулярно.*

Задача 17. Докажите, что *соответствие $\gamma\mapsto\Gamma_\gamma$ является изоморфизмом группы Γ на группу* $\operatorname{Aut}\xi$. [Указание. Пусть $p_0\in\mathscr{E}$. Для любого автоморфизма $\varphi\in\operatorname{Aut}\xi$ имеет место равенство вида $\varphi(p_0)=\gamma p_0$, где $\gamma\in\Gamma$. Так как $\varphi(p_0)=L_\gamma(p_0)$, то $\varphi(p)=L_\gamma(p)$ для любой точки $p\in\mathscr{E}$.] Докажите также, что эквивариантные отображения $\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ (являющиеся, конечно, автоморфизмами накрытия ξ) соответствуют в этом изоморфизме элементам центра группы Γ.

В своем месте нам понадобится следующее предложение (ср. утверждение задачи 5 лекции 2):

Предложение 3. *Если для накрытия $\pi\colon\mathscr{E}\to\mathscr{B}$ пространство $\mathscr{E}$ является гладким хаусдорфовым многообразием и если*

а) *накрытие регулярно;*

б) *его группа автоморфизмов состоит из диффеоморфизмов, то на $\mathscr{B}$ существует единственная гладкость* A, *по отношению к которой накрытие $\pi\colon\mathscr{E}\to\mathscr{B}$ гладко.*

Доказательство. Как всегда, сначала докажем утверждение о единственности.

Пусть гладкость A существует. Рассмотрим произвольную ровно накрытую связную карту (U, h) в $\mathscr{B}$. Тогда, если V — компонента прообраза $\pi^{-1}U$, то

$$U=\pi V \quad\text{и}\quad h=k\circ\sigma, \tag{16}$$

где $k=h\circ\pi$, а $\sigma\colon U\to V$ — диффеоморфизм, обратный к диффеоморфизму $\pi\colon V\to U$ (сечение накрытия π над U).

Это означает, что атлас на $\mathscr{B}$, состоящий из карт вида (U, h), однозначно восстанавливается по атласу на $\mathscr{E}$, состоящему из карт вида (V, k). Поэтому гладкость А единственна.

Чтобы доказать ее существование, мы примем формулы (16) за определение карт (U, h), т. е., точнее, на любом связном ровно накрытом множестве $U \subset \mathscr{B}$, обладающим тем свойством, что среди компонент V его прообраза $\pi^{-1}U$ существуют координатные окрестности многообразия $\mathscr{E}$, мы определим карту (U, h) формулой $h = k \circ \sigma$, где k — координатное отображение на V. Предложение 3 будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что любые две карты вида (U, h) согласованы. При этом ясно, что согласованность достаточно доказать лишь для карт (U, h) с одним и тем же U.

Другими словами, нам надо доказать, что если карты (V, k) и (V_1, k_1) в $\mathscr{E}$ обладают тем свойством, что

1) имеет место равенство $\pi V = \pi V_1$;

2) множество $U = \pi V = \pi V_1$ связно, ровно накрыто отображением π и множества V и V_1 являются компонентами его прообраза $\pi^{-1}U$ (и, следовательно, отображение π на V и V_1 обладает обратными отображениями σ: $U \to V$ и σ_1: $U \to V_1$),

то для отображений h: $U \to \mathbb{R}^n$ и h_1: $U \to \mathbb{R}^n$, определенных формулами

$$h = k \circ \sigma, \quad h_1 = k_1 \circ \sigma_1,$$

композиция

$$h_1 \circ h^{-1} = h_1 \circ \sigma_1 \circ \pi \circ k^{-1}\colon kV \to k_1 V_1$$

является диффеоморфизмом. Ясно, что для этого достаточно доказать, что диффеоморфизмом является отображение

$$\sigma_1 \circ \pi\colon V \to V_1.$$

С этой целью мы заметим, что в силу регулярности накрытия π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ существует его автоморфизм φ: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$, переводящий компоненту V в компоненту V_1. При этом отображение $\varphi \circ \sigma$ будет сечением накрытия π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ над U, переводящим V в V_1, и потому в силу свойства единственности сечений (см. следствие предложения 3 лекции 4) будет совпадать с отображением σ_1. Следовательно,

$$\sigma_1 \circ \pi = \varphi|_V.$$

Для завершения доказательства остается вспомнить, что автоморфизм φ является, по условию, диффеоморфизмом. $\square$

Задача 18. Докажите, что *группа автоморфизмов произвольного гладкого накрытия состоит из диффеоморфизмов.*

Предложение 3 применимо, в частности (см. пример 7), к накрытию вида $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\Gamma$, где Γ — произвольная группа диффеоморфизмов многообразия $\mathscr{E}$, дискретно действующая на Γ.

Следствие. *Для любой группы Γ диффеоморфизмов гладкого связного хаусдорфова многообразия $\mathscr{E}$, дискретно действующей на $\mathscr{E}$, пространство орбит $\mathscr{E}/\Gamma$ обладает естественной структурой гладкого многообразия, по отношению к которой отображение факторизации*

$$\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\Gamma$$

является гладким накрытием. $\square$