Лекция 6

Векторные расслоения. — Сечения векторных расслоений. — Морфизмы векторных расслоений. — Комплексные и кватернионные структуры на вещественном векторном расслоении. — Примеры векторных расслоений. — Расслоения ассоциированные с главными $GL(n; \mathbb{K})$-расслоениями. — Склеивающие коциклы векторных расслоений. — Векторные расслоения и классы когомологий матричных коциклов.

Пусть $\mathbb{K}$ — либо поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел, либо поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

[Читатель может — и должен! — проверить, что все содержание этой и следующей лекций по существу дословно сохраняется — несмотря на некоммутативность кватернионного умножения — и в случае, когда $\mathbb{K}$ является телом кватернионов $\mathbb{H}$ (о кватернионах см. лекцию II.24, а также ниже лекцию 9); следует лишь все множители у векторов писать справа, т. е. рассматривать над $\mathbb{H}$ *правые линеалы*. (Для коммутативных полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ различение левых и правых линеалов принципиального значения не имеет, но для некоммутативного тела $\mathbb{H}$ это уже не так.) На этом основании мы в дальнейшем позволим себе иногда рассматривать и случай $\mathbb{K}=\mathbb{H}$. Кроме того, когда это удобно, мы будем писать у векторов числовые множители справа и при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.]

Определение 1. Тройка $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, состоящая из топологических пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ и непрерывного отображения

$$\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}, \tag{1}$$

называется *векторным расслоением ранга n над* $\mathbb{K}$ (при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ — ***вещественным***, при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ — ***комплексным***, а при $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ — ***кватернионным*** или ***симплектическим***), если

а) для любой точки $b\in\mathscr{B}$ множество

$$\mathscr{F}_b=\pi^{-1}(b)$$

является линейным (векторным) пространством над $\mathbb{K}$;

б) (условие локальной тривиальности) существуют такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathscr{B}$ и такие гомеоморфизмы $\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathbb{R}^n\to\mathscr{E}_{U_\alpha}$, где $\mathscr{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}U_\alpha$, что б$_1$) для любой точки $(b, x) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ имеет место включение $\varphi_\alpha(b, x) \in \mathcal{F}_b$ (иными словами, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times R^n \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr] & & \mathcal{E}_{U_\alpha} \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd} \tag{2}$$

в которой левая наклонная стрелка является естественной проекцией $(b, x) \mapsto b$ прямого произведения $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ на его первый множитель U_α, а правая — ограничением на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ отображения (1));

б$_2$) для каждой точки $b \in \mathcal{B}$ отображение

$$\varphi_{\alpha, b}\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}_b,$$

определенное формулой

$$\varphi_{\alpha, b}(x) = \varphi_\alpha(b, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

является изоморфизмом линейных пространств.

В соответствии с общей терминологией лекции 1 пространство $\mathcal{B}$ (обозначаемое также символами $\mathcal{B}^\xi$ или $\mathcal{B}(\xi)$) называется *базой* векторного расслоения ξ, пространство $\mathcal{E}$ (обозначаемое также символами $\mathcal{E}^\xi$ или $\mathcal{E}(\xi)$) — его *тотальным пространством*, а отображение π — (обозначаемое также символами π^ξ или $\pi(\xi)$) — *проекцией*. Очень часто ξ и π не различаются.

Линейное пространство $\mathcal{F}_b$ (обозначаемое также символами $\mathcal{F}_b^\xi$ или $\mathcal{F}_b(\xi)$) называется *слоем* расслоения ξ (проекции π) над точкой $b \in \mathcal{B}$.

Ранг n векторного расслоения ξ называется также *размерностью* этого расслоения и обозначается символом $\dim \xi$ (или $\dim_{\mathbb{K}} \xi$).

Гомеоморфизм φ_α из диаграммы (2) называется *тривиализацией* расслоения ξ над открытым множеством U_α, а открытое множество U_α — *тривиализирующей окрестностью*. Иногда *тривиализацией* называется также пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Покрытие $\{U_\alpha\}$, состоящее из тривиализирующих окрестностей, называется *тривиализирующим покрытием*. Семейство $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ тривиализаций $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ называется *тривиализирующим атласом*.

Непрерывное отображение $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$, удовлетворяющее соотношению $\pi \circ s = \mathrm{id}$, называется *сечением* расслоения ξ. Отображение $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ тогда и только тогда является сечением, когда $s(b) \in \mathscr{F}_b$ для любой точки $b \in \mathscr{B}$, т. е. когда оно выбирает в каждом слое $\mathscr{F}_b$ вектор $s(b)$. На этом основании сечения расслоения ξ называются также *ξ-векторными полями* на $\mathscr{B}$.

Задача 1. Докажите, что

а) для любых сечений s, s_1, s_2 и любого элемента $\lambda \in \mathbb{K}$ формулы

$$\begin{aligned}(s_1 + s_2)(b) &= s_1(b) + s_2(b), \\ (\lambda s)(b) &= \lambda s(b),\end{aligned} \qquad b \in \mathscr{B},$$

определяют сечения $s_1 + s_2$, λs расслоения ξ и относительно операций $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$, $(\lambda, s) \mapsto \lambda s$ *множество* $\Gamma\xi$ *всех сечений векторного расслоения* ξ *является линейным пространством над полем* $\mathbb{K}$, нулем которого служит нулевое сечение 0, сопоставляющее каждой точке $b \in \mathscr{B}$ нуль линеала $\mathscr{F}_b$;

б) для любой непрерывной $\mathbb{K}$-значной функции f на $\mathscr{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma\xi$ формула

$$(fs)(b) = f(b)\, s(b), \qquad b \in \mathscr{B},$$

определяет сечение $fs \in \Gamma\xi$, и относительно операции $(f, s) \mapsto fs$ *линеал* $\Gamma\xi$ *является модулем над алгеброй* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$ *всех непрерывных* $\mathbb{K}$*-значных функций на* $\mathscr{B}$.

Для каждого подпространства $U \subset \mathscr{B}$ тройка $(\mathscr{E}_U, \pi_U, U)$, где $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$ и $\pi_U = \pi|_U$, является, очевидно, векторным расслоением. Оно называется *частью* расслоения ξ над U и обозначается символом $\xi|_U$.

Если U является тривиализирующей окрестностью, то каждая тривиализация $\varphi: U \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_U$ определяет в $\Gamma(\xi|_U)$ сечения

$$s_1, \ \ldots, \ s_n, \tag{3}$$

действующие по формулам

$$s_1(b) = \varphi(b, e_1), \ \ldots, \ s_n(b) = \varphi(b, e_n),$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{K}^n$. Так как для любой точки $b \in U$ векторы $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ составляют базис линейного пространства $\mathscr{F}_b$, то каждое сечение $s: U \to \mathscr{E}_U$ задает на U функции $s^1, \ldots, s^n$: $U \to \mathbb{K}$, удовлетворяющие для любой точки $b \in \mathscr{B}$ соотношению

$$s(b) = s^1(b) s_1 + \ldots + s^n(b) s_n,$$

которое эти функции однозначно определяет.

Задача 2. Покажите, что *функции* $s^1, \ldots, s^n$ *непрерывны* (принадлежат алгебре $\mathsf{F}_\mathbb{K}(U)$).

Поэтому в $\mathsf{F}_\mathbb{K}(U)$-модуле $\Gamma(\xi|_U)$ имеет место равенство

$$s = s^1 s_1 + \ldots + s^n s_n, \qquad s^1, \ldots, s^n \in \mathsf{F}_\mathbb{K}(U).$$

По определению это означает, что $\mathsf{F}_\mathbb{K}(U)$-*модуль* $\Gamma(\xi|_U)$ *является свободным модулем ранга* n *с базисом* (3).

Обратно, пусть U — такое открытое подмножество пространства $\mathscr{B}$, что модуль $\Gamma(\xi|_U)$ является свободным модулем ранга n, и пусть (3) — его произвольный базис. Определим отображение $\varphi: U \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{E}_U$ формулой

$$\varphi(b, \boldsymbol{x}) = x^i s_i(b), \qquad b \in U, \quad \boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Автоматическая проверка (проведите ее!) показывает, что отображение φ является тривиализацией расслоения ξ над U.

Этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Открытое множество $U \subset \mathscr{B}$ тогда и только тогда является тривиализирующей расслоение ξ окрестностью, когда $\mathsf{F}_\mathbb{K}(U)$-модуль $\Gamma(\xi|_U)$ является свободным модулем ранга n. При этом базисы* (3) *этого модуля находятся в естественном биективном соответствии с тривиализациями φ расслоения ξ над U.* $\square$.

На основании этого предложения базисы (3) модуля $\Gamma(\xi|_U)$ мы также будем называть тривиализациями расслоения ξ над U.

Соглашение. В дальнейшем тривиализации (3) мы будем также называть *базисами модуля* $\Gamma\xi$ *над* U. Эта сокращенная терминология часто бывает удобна.

Пусть $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ и $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ — два векторных расслоения. Непрерывное отображение $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ называется *послойным*, если из того, что точки $p_1, p_2 \in \mathscr{E}$ принадлежат одному слою (т. е. $\pi(p_1) = \pi(p_2)$), следует, что точки $p_1' = \varphi(p_1)$, $p_2' = \varphi(p_2)$ также принадлежат одному слою (т. е. $\pi'(p_1') = \pi'(p_2')$).

Задача 3. Докажите, что для каждого послойного отображения $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ формула

$$\hat{\varphi}(b) = \pi'(\varphi(p)), \qquad p \in \pi^{-1}(b),$$

корректно определяет непрерывное отображение

$$\hat{\varphi}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}',$$

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E}' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ \mathscr{B} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathscr{B}', \end{array}$$

и для любой точки $b \in \mathscr{B}$ отображение

$$\varphi_b\colon \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_{b'}, \qquad b' = \hat{\varphi}(b),$$

индуцированное отображением φ, непрерывно.

Определение 2. Послойное отображение φ, для которого все отображения φ_b, $b \in \mathscr{B}$, линейны, называется *морфизмом* векторного расслоения ξ в векторное расслоение ξ'. В записи: $\varphi\colon \xi \to \xi'$. При $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ морфизм φ, для которого $\hat{\varphi} = \mathrm{id}$, называется *морфизмом над* $\mathscr{B}$. Морфизм над $\mathscr{B}$, являющийся гомеоморфизмом, называется *изоморфизмом*. (Для такого морфизма φ обратный гомеоморфизм $\varphi^{-1}\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ также является морфизмом над $\mathscr{B}$ — и, значит, изоморфизмом.) Расслоения ξ и ξ' над $\mathscr{B}$, для которых существует хотя бы один изоморфизм $\xi \to \xi'$, называются *изоморфными*.

Изоморфизмы вида $\xi \to \xi$ называются *автоморфизмами*.

Задача 4. Докажите, что морфизм расслоений $\varphi\colon \xi \to \xi'$ над $\mathscr{B}$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда для любой точки $b \in \mathscr{B}$ линейное отображение $\varphi_b\colon \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}'_b$ является изоморфизмом линейных пространств.

Множество всех морфизмов $\xi \to \xi'$ над $\mathscr{B}$ мы будем обозначать символом $\mathrm{Mor}(\xi, \xi')$. Оно является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$ (даже при $\mathbb{K} = \mathbb{H}$) и модулем над алгеброй $\mathsf{F}\mathscr{B}$ относительно очевидным образом определяемых операций.

Каждый морфизм $\varphi\colon \xi \to \xi'$ векторных расслоений над $\mathscr{B}$ определяет по формуле

$$s \mapsto \varphi \circ s, \qquad s \in \Gamma\xi,$$

линейное отображение

$$\varphi\circ\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi'$$

линейных пространств сечений.

Так как для любой функции $f \in \mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$

$$(\varphi\circ fs)(b) = \varphi_b(f(b)\,s(b)) = f(b)\,\varphi_b(s(b)) = f(\varphi\circ s)(b),$$

то *отображение* $\varphi\circ$ *является* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-*линейным отображением.*

Аналогично проверяется, что соответствие $\varphi \mapsto \varphi\circ$ определяет $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-линейное отображение $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-модуля $\operatorname{Mor}(\xi, \xi')$ в $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-модуль $\operatorname{Hom}_{\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi')$ всех $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-линейных отображений $\Gamma\xi \to \Gamma\xi'$.

Задача 5. Докажите, что любое $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-линейное отображение $\Gamma\xi \to \Gamma\xi'$ имеет вид $\varphi\circ$ для некоторого однозначно определенного морфизма $\varphi\colon \xi \to \xi'$. [Указание. См. ниже предложение 3 лекции 11.]

Это означает, что *модули* $\operatorname{Mor}(\xi, \xi')$ *и* $\operatorname{Hom}_{\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi')$ *естественно изоморфны* и потому могут быть отождествлены:

$$\operatorname{Mor}(\xi, \xi') = \operatorname{Hom}_{\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi').$$

Подчеркнем, что это верно и при $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

Если в вещественном векторном расслоении ξ комплексифицировать все слои $\mathcal{F}_b$, то, очевидно, получится комплексное векторное расслоение того же ранга, которое обозначается символом $\xi^{\mathbb{C}}$ и называется *комплексификацией* расслоения ξ.

Аналогично, если в комплексном векторном расслоении ξ овеществить все слои $\mathcal{F}_b$, т. е. в силу вложения $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ считать их вещественными линеалами (см. лекцию II.25), то получится вещественное расслоение вдвое большего ранга. Это расслоение называется *овеществлением* расслоения ξ и обозначается символом $\xi_{\mathbb{R}}$. Операция умножения на i определяет на $\xi_{\mathbb{R}}$ автоморфизм $I\colon \xi_{\mathbb{R}} \to \xi_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющий соотношению

$$I^2 = -\mathrm{id}. \tag{4}$$

Обратно, задание на вещественном расслоении η ранга $2n$ автоморфизма $I\colon \eta \to \eta$, удовлетворяющего соотношению (4), определяет на каждом слое этого расслоения структуру комплексного линеала, по отношению к которой η оказывается (проверьте!) комплексным векторным расслоением ξ (для которого $\xi_{\mathbb{R}} = \eta$). Таким образом, *комплексные векторные расслоения — это в точности вещественные расслоения, для которых задан автоморфизм I, удовлетворяющий соотношению* (4). (Ср. лекцию II.25.)

На этом основании автоморфизмы I, удовлетворяющие соотношению (4), называются *комплексными структурами.*

Аналогично *кватернионные расслоения — это вещественные расслоения, на которых заданы два автоморфизма I и J, удовлетворяющие соотношениям*

$$I^2 = -\mathrm{id}, \quad J^2 = -\mathrm{id}, \quad IJ = -JI.$$

(Третий автоморфизм K — отвечающий кватернионной единице k — вводить не нужно, так как он выражается через автоморфизмы I и J.)

Примеры векторных расслоений

Пример 1. Для любого топологического пространства $\mathscr{B}$ и любого линейного пространства $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{K}$ тройка $(\mathscr{B}\times\mathscr{V}, \pi, \mathscr{B})$, где $\pi\colon \mathscr{B}\times\mathscr{V}\to\mathscr{B}$ — проекция прямого произведения на первый множитель, является векторным расслоением. Тривиализирующее покрытие $\{U_\alpha\}$ состоит для этого расслоения из одного элемента $U=\mathscr{B}$, а тривиализация $\varphi\colon \mathscr{B}\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{B}\times\mathscr{V}$ определяется выбором в $\mathscr{V}$ базиса $e_1, \ldots, e_n$ и задается формулой

$$\varphi(b, x) = (b, \alpha^{-1}(x)), \qquad b\in\mathscr{B},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

где $\alpha\colon \mathscr{V}\to\mathbb{K}^n$ — координатный изоморфизм, отвечающий базису $e_1, \ldots, e_n$.

Это векторное расслоение обозначается символом $\theta^n_{\mathscr{B}}$. Оно — и каждое векторное расслоение, ему изоморфное, — называется *тривиальным векторным расслоением ранга n.*

Согласно предложению 1 *векторное расслоение ξ тогда и только тогда тривиально, когда $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}(\mathscr{B})$-модуль $\Gamma(\xi)$ свободен и его ранг равен рангу n расслоения ξ.*

Тривиализации φ векторного расслоения ξ над открытым множеством $U\subset\mathscr{B}$ являются не чем иным, как изоморфизмами расслоения θ^n_U на расслоение $\xi|_U$, а утверждение, что U является тривиализирующей окрестностью, означает, что расслоение $\xi|_U$ тривиально.

Пример 2. Пусть $\mathscr{X}$ — гладкое n-мерное многообразие, $\mathsf{T}\mathscr{X}$ — многообразие касательных векторов на $\mathscr{X}$ (см. определение 3 лекции III.15) и π: $\mathbf{T}\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — естественная проекция, сопоставляющая каждому вектору $A \in \mathbf{T}\mathscr{X}$ точку $p \in \mathscr{X}$ его приложения (т. е. такую, что $A \in \mathbf{T}_p\mathscr{X}$). По определению слоем $\pi^{-1}(p)$, $p \in \mathscr{X}$, проекции π является касательное пространство $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ и каждая карта (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ определяет карту $(\mathbf{T}U, \mathbf{T}h)$ многообразия $\mathbf{T}\mathscr{X}$, для которой

$$\mathbf{T}U = \bigsqcup_{p \in U} \mathbf{T}_p\mathscr{X} = \pi^{-1}U,$$

и отображение $\mathbf{T}h$: $\mathbf{T}U \to \mathbb{R}^{2n}$ задается формулой

$$(\mathbf{T}h)(A) = (x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^n), \qquad A \in \mathbf{T}U,$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки $p = \pi(A)$ в карте (U, h), а $a^1, \ldots, a^n$ — координаты вектора A в базисе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$. Сейчас нам удобно заменить отображение $\mathbf{T}h$ отображением $(h^{-1} \times \mathrm{id}) \circ \mathbf{T}h$: $\mathbf{T}U \to U \times \mathbb{R}^n$, действующим по формуле

$$A \mapsto (p, \boldsymbol{a}), \quad p = \pi(A), \quad \boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n).$$

Пусть

$$\varphi_h\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{T}U$$

— обратное отображение:

$$\varphi_h(p, \boldsymbol{a}) = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \qquad p \in U, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Отображение φ_h является гомеоморфизмом, замыкающим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\varphi_h"] \arrow[dr] & & \mathbf{T}U \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

т. е. является тривиализацией расслоения $(\mathbf{T}\mathscr{X}, \pi, \mathscr{X})$ над окрестностью U.

Мы видим, таким образом, что *тройка* $\tau_{\mathscr{X}} = (\mathbf{T}\mathscr{X}, \pi, \mathscr{X})$ *является векторным расслоением ранга* n.

Расслоение $\tau_{\mathscr{X}}$ обозначается также символом $\tau\mathscr{X}$ (или $\tau(\mathscr{X})$).

Это расслоение называется *касательным расслоением над многообразием* $\mathscr{X}$. (Напрашивающийся термин «касательное расслоение многообразия $\mathscr{X}$», к сожалению, мало приемлем, так как по-русски «расслоение многообразия $\mathscr{X}$» означает, что расслаивается само $\mathscr{X}$.)

Подчеркнем, что *слоями* $\pi^{-1}(p)$ *касательного расслоения* $\tau_{\mathscr{X}}$ *являются касательные пространства* $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$ *многообразия* $\mathscr{X}$.

Расслоение $\tau_{\mathscr{X}}$ является для нас руководящим примером, с которым мы будем соотносить все общие конструкции теории векторных расслоений.

Многообразие $\mathscr{X}$, для которого расслоение $\tau\mathscr{X}$ тривиально, называется *параллелизуемым* (ср. лекцию III.16).

Для комплексно-аналитического многообразия $\mathscr{X}$ расслоение $\tau_{\mathscr{X}}$ является, конечно, расслоением над $\mathbb{C}$, причем

$$(\tau_{\mathscr{X}})_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathscr{X}_{\mathbb{R}}},$$

где $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$ — многообразие $\mathscr{X}$, рассматриваемое в силу отождествления $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ как вещественно-аналитическое многообразие (овеществление многообразия $\mathscr{X}$; см. лекцию III.11).

Пример 3. (В этом примере предполагается, что читатель знаком с лекцией 1.) Матричное умножение

$$(A, x) \mapsto Ax$$

квадратных матриц A порядка n на столбцы x высоты n определяет — при условии, что векторы пространства $\mathbb{K}^n$ мы записываем в виде столбцов — действие полной линейной группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ на линейном пространстве $\mathbb{K}^n$, являющееся *линейным действием* (в другой терминологии — *представлением*). Это означает, что для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ отображение L_A: $x \mapsto Ax$ является линейным оператором (чтобы это действие было линейно при $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ и нужно считать $\mathbb{K}^n$ правым линеалом). Поэтому для любого главного $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$-расслоения $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ определено $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$-расслоение $\xi = \xi[\mathbb{K}^n]$ с типичным слоем $\mathbb{K}^n$ и (см. формулу (12) лекции 1) для любой точки $b \in \mathscr{B}$ (являющейся, по определению, орбитой правого действия группы $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ на тотальном пространстве $\mathscr{E}$ расслоения ξ) и любой точки p этой орбиты формула

$$j_p(x) = [p, x]_{\mathscr{G}}, \qquad x \in \mathbb{K}^n,$$

определяет гомеоморфизм $j = j_p\colon \mathbb{K}^n \to \mathcal{F}_b$ пространства $\mathbb{K}^n$ на слой $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ над точкой b. Если q — другая точка орбиты b и если $p = qA$, где $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$, то

$$(j_q^{-1} \circ j_p)(x) = j_q^{-1}[p, x] = j_q^{-1}[q, Ax] = Ax,$$

т. е. $j_q^{-1} \circ j_p = L_A$, $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$. Поэтому в силу линейности действия группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ на $\mathbb{K}^n$ структура линейного пространства в $\mathcal{F}_b$, перенесенная из $\mathbb{K}^n$ посредством отображения j_p, т. е. задаваемая формулами

$$[p, x] + [p, y] = [p, x + y], \qquad x, y \in \mathbb{K}^n,$$
$$\lambda[p, x] = [p, \lambda x], \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \in \mathbb{K}^n,$$

не зависит от выбора точки p. Таким образом, *в каждом слое $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ имеется естественная структура n-мерного линейного пространства над $\mathbb{K}$.*

Пусть теперь главное расслоение ξ локально тривиально, т. е. пусть некоторое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ обладает тем свойством, что для любого α существует эквивариантный гомеоморфизм

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}) \to \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U$$

главных $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$-пространств. Тогда, как показывает автоматическая проверка (проведите ее!), формула

$$\varphi_\alpha(b, x) = [\varphi(b, E), x]_\xi, \qquad b \in U_\alpha, \ x \in \mathbb{K}^n,$$

(где, как всегда, E — единичная матрица) определяет тривиализацию

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$$

над U_α расслоения ξ.

Этим доказано, что *для любого локально тривиального главного $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$-расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi = \xi[\mathbb{K}^n]$ является векторным расслоением.*

Верно и обратное утверждение.

Предложение 2. *Для любого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ существует такое локальное тривиальное главное $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$-расслоение ξ, что*

$$\xi = \xi[\mathbb{K}^n].$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ — подпространство прямого произведения

$$\underbrace{\mathcal{E} \times \ldots \times \mathcal{E}}_{n \text{ раз}},$$

состоящее из точек $p=(p_1, \ldots, p_n)$, все компоненты $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{E}$ которых принадлежат одному слою расслоения ξ (т. е. удовлетворяют соотношениям $\pi(p_1)= \ldots$ $\ldots =\pi(p_n)$) и составляют в этом слое базис. Положив $\pi(p)=\pi(p_1)$, мы получим — очевидно, непрерывное и надъективное — отображение

$$\pi\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathscr{B}.$$

(Соответствующая тройка $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathscr{B})$ называется *расслоением реперов* векторного расслоения ξ.)

С другой стороны, матричное умножение

$$(p, A) \mapsto pA, \quad p=(p_1, \ldots, p_n), \; A=\|a_i^j\|, \tag{5}$$

где pA — строка $(q_1, \ldots, q_n)$, состоящая из векторов $q_i=p_j a_i^j$ (заметим, что здесь мы пишем числовые множители справа от векторов; при $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ это существенно), определяет, очевидно, свободное правое действие группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ на пространстве $\mathcal{E}$, орбитами которого являются как раз слои расслоения ξ. Поэтому, если действие (5)

а) непрерывно;

б) является главным (т. е. соответствующее отображение сдвига непрерывно),

то тройка $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathscr{B})$ будет главным расслоением. При этом для ассоциированного векторного расслоения $\xi[\mathbb{K}^n]$ формула

$$[p, x] \mapsto px=p_i x^i, \tag{6}$$
$$p=(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{E}, \; x=(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{K}^n,$$

будет, очевидно корректно, определять некоторый морфизм $\xi[\mathbb{K}^n] \to \xi$. Поэтому для завершения доказательства остается лишь доказать — кроме утверждений **а** и **б**, — что

в) морфизм (6) является изоморфизмом;

г) главное расслоение ξ локально тривиально.

Имея все это в виду, мы в первую очередь заметим, что для любой тривиализирующей расслоение ξ окрестности U каждый базис (3) модуля $\Gamma(\xi|_U)$ (тривиализация φ расслоения ξ над U) определяет по формуле

$$s(b)=(s_1(b), \ldots, s_n(b)), \qquad b \in U,$$

некоторое сечение расслоения ξ над U. (Обратим внимание, что тем самым тривиализации над U расслоения ξ отождествляются с сечениями над U расслоения ξ.) Мы определим отображение

$$\varphi\colon U \times \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}) \to \mathcal{E}U=\pi^{-1}U,$$

положив
$$\varphi(b, A) = \boldsymbol{s}(b) A, \qquad b \in U, \ A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}).$$
Это отображение, очевидно, непрерывно и обладает непрерывным обратным отображением
$$\boldsymbol{p} \mapsto (b, A), \quad \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathscr{E}_U,$$
где $b = \pi(\boldsymbol{p})$, а A — матрица, столбцы которой состоят из координат в базисе $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ линеала $\mathscr{F}_b$ векторов $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{F}_b$. (Контрольный вопрос: почему последнее отображение непрерывно?) Кроме того, по отношению к естественному правому действию

(7) $$(b, A) B = (b, AB), \qquad b \in U, \quad A, B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}),$$

группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ на произведении $U \times \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ (см. пример 1 лекции 1) отображение φ эквивариантно (т. е.
$$\varphi(b, A) B = \varphi(b, AB)$$
для любой точки $b \in U$ и любых матриц $A, B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$); заметим, что подпространство $\mathscr{E}_U$ инвариантно относительно действия группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ на пространстве $\mathscr{E}$ и потому само является $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$-пространством. Таким образом, φ *является эквивариантным гомеоморфизмом.*

Поскольку действие (7) непрерывно, отсюда следует, что действие (5) также непрерывно (на каждом подпространстве $\mathscr{E}_U$, а потому — поскольку окрестности U покрывают $\mathscr{B}$ — и всюду). По аналогичным соображениям, непрерывно и отображение сдвига для действия (5). Следовательно, ξ является главным расслоением. При этом отображение φ будет, очевидно, его тривиализацией над U. Следовательно, главное расслоение ξ локально тривиально.

Этим утверждения **а**, **б** и **г** доказаны. Что же касается утверждения **в**, то для его доказательства достаточно заметить, что для любой тривиализации (U, φ) расслоения ξ отображение
$$\varphi^{-1}\colon \mathscr{E}_U \to U \times \mathbb{K}^n$$
переводит каждую точку $p \in \mathscr{E}_U$ в точку $(b, \boldsymbol{x})$, где $b = \pi(p)$, а $\boldsymbol{x}$ — столбец координат вектора $p \in \mathscr{F}_b$ в базисе $s_1(b) = \varphi(b, e_1), \ldots, s_n(b) = \varphi(b, e_n)$. Потому φ^{-1} индуцирует отображение
$$\xi|_U \to \xi[\mathbb{K}^n]|_U,$$
обратное к ограничению отображения (6) над U.

Следовательно, отображение (6) является изоморфизмом над U, а потому и всюду. □

Замечание 1. Таким образом, введение в рассмотрение векторных расслоений доставляет нам для случая, когда $\mathcal{F}=\mathbb{K}^n$ и $\mathcal{G}=\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$, прямое определение локально тривиальных $\mathcal{G}$-расслоений $\xi=\xi[\mathcal{F}]$, не апеллирующее к главным расслоениям ξ. Аналогичное описание расслоений $\xi[\mathcal{F}]$ возможно всегда, когда пространство $\mathcal{F}$ наделено некоторой структурой, а группа $\mathcal{G}$ является группой всех автоморфизмов пространства $\mathcal{F}$, сохраняющих эту структуру (при условии, что в $\mathcal{G}$ можно ввести достаточно хорошую топологию, обеспечивающую непрерывность всех необходимых отображений). Мы вернемся к этому вопросу — с чуть-чуть иных позиций — в лекции 7.

По определению для любого векторного расслоения $\xi=(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathcal{B})$ существует открытое покрытие $\mathfrak{U}$ пространства $\mathcal{B}$, состоящее из тривиализирующих окрестностей. Пусть U_α и U_β — два пересекающихся элемента этого покрытия. Тогда для любой точки $b\in U_\alpha\cap U_\beta$ определено отображение

$$\varphi_{\beta\alpha}(b)=\varphi_{\beta,b}^{-1}\circ\varphi_{\alpha,b}\colon\ \mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}^n,$$

где $\varphi_{\alpha,b}$ и $\varphi_{\beta,b}$ — отображения $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathcal{F}_b$, индуцированные тривиализациями $\varphi_\alpha\colon\ U_\alpha\times\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathcal{E}_{U_\alpha}$ и $\varphi_\beta\colon\ U_\beta\times\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathcal{E}_{U_\beta}$ (см. пункт 6 определения 1). Это отображение линейно и обратимо, т. е. является элементом группы $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$. Поэтому формула

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon\ b\longmapsto\varphi_{\beta\alpha}(b)$$

задает некоторое отображение

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon\ U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K}),\tag{8}$$

называемое *отображением* (или *функцией*) *перехода* (подразумевается — от φ_α к φ_β).

Лемма 1. Отображение

$$\varphi\colon\ U\longrightarrow\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$$

топологического пространства U в группу $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$ *тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывно отображение*

$$\hat{\varphi}\colon\ U\times\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}^n,$$

задаваемое формулой

$$\hat{\varphi}(b,\ x)=\varphi(b)\,x,\qquad b\in U,\quad x\in\mathbb{K}^n.$$

Доказательство. Ясно, что если отображение φ непрерывно, то отображение $\hat{\varphi}$ также непрерывно (докажите!). Обратно, пусть отображение $\hat{\varphi}$ непрерывно. Тогда непрерывны все отображения $U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ вида

$$\varphi_i\colon b \longmapsto \varphi(b)\, e_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где, как всегда, $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{K}^n$. Значит, непрерывны и все отображения $U \longrightarrow \mathbb{K}$ вида

$$\varphi_i^j\colon b \longmapsto \varphi_i^j(b), \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $\varphi_i^j(b)$ — компоненты вектора $\varphi(b)\, e_i$. Для завершения доказательства остается заметить, что числа $\varphi_i^j(b)$ как раз и составляют матрицу $\varphi(b) \in \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$. □

При $U = U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$ отображение $\hat{\varphi}$ является не чем иным, как композицией $\mathrm{pr} \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ гомеоморфизма $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\colon U \times \mathbb{K}^n \longrightarrow U \times \mathbb{K}^n$ и проекции $\mathrm{pr}\colon U \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Поэтому это отображение непрерывно. Следовательно, согласно лемме 1 непрерывно и отображение $\varphi_{\beta\alpha}$.

Таким образом, мы видим, что *все отображения перехода* $\varphi_{\beta\alpha}$ *являются непрерывными отображениями.*

Для любого множества U и любой группы G множество всех отображений $U \longrightarrow G$ является группой относительно операций

$$\varphi \longmapsto \varphi^{-1}, \quad (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi\psi,$$

определенных формулами

$$\varphi^{-1}(b) = \varphi(b)^{-1}, \quad (\varphi\psi)(b) = \varphi(b)\, \psi(b), \qquad b \in U.$$

(Не путать φ^{-1} с обратным отображением, а $\varphi\psi$ — с композицией отображений!) При этом если U является топологическим пространством, G — топологической группой, а отображения φ и ψ непрерывны, то отображения φ^{-1} и $\varphi\psi$ также непрерывны (докажите!).

В частности, для отображения $\varphi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$ определено отображение $\varphi_{\beta\alpha}^{-1}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$, а для отображений $\varphi_{\beta\alpha}$ и $\varphi_{\gamma\beta}$ — в случае, когда $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$ — определено отображение

$$(\varphi_{\gamma\beta}|_U)(\varphi_{\beta\alpha}|_U)\colon U \longrightarrow \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K}),$$

где $U = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, которое ради сокращения формул будем обозначать просто через $\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha}$. При этом из определения отображений $\varphi_{\beta\alpha}$ непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned}&\varphi_{\beta\alpha}^{-1}=\varphi_{\alpha\beta} \quad \text{на} \quad U_\alpha\cap U_\beta,\\ &\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha}=\varphi_{\gamma\alpha} \quad \text{на} \quad U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\end{aligned} \tag{9}$$

для любых индексов α, β, γ (для которых соответственно $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ и $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\varnothing$).

Определение 3. Пусть $\mathscr{B}$ — топологическое пространство, $\mathscr{G}$ — топологическая группа и $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства $\mathscr{B}$. Семейство $\varphi=\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ непрерывных отображений

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to\mathscr{G},$$

определенных для любых индексов α, β, для которых $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, называется *коциклом над группой $\mathscr{G}$ покрытия* $\mathfrak{U}$ (на самом деле — нерва покрытия $\mathfrak{U}$; см. лекцию III.21), если оно удовлетворяет состношениям (9). Коциклы над группой $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ называются также *матричными коциклами*.

Таким образом, мы видим, что *каждое векторное расслоение $\xi=(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$ определяет для любого тривиализирующего покрытия $\mathfrak{U}$ пространства $\mathscr{B}$ некоторый матричный коцикл $\varphi=\{\varphi_{\beta\alpha}\}$.*

Мы будем называть этот коцикл *склеивающим коциклом расслоения* ξ и будем обозначать его символом φ_ξ.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{B}$ — топологическое пространство, $\mathfrak{U}$ — его открытое покрытие и $\varphi=\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ — произвольный матричный коцикл над группой $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ покрытия $\mathfrak{U}$. Тогда существует — с точностью до изоморфизма единственное — векторное расслоение ξ ранга n с базой $\mathscr{B}$, тривиализирующим покрытием $\mathfrak{U}$ и склеивающим коциклом φ.*

Доказательство. Единственность. Утверждение о том, что векторные расслоения $\xi=(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$ и $\xi'=(\mathscr{E}',\pi',\mathscr{B})$ с тривиализирующим покрытием $\mathfrak{U}$ имеют один и тот же склеивающий коцикл φ, означает, что для этих расслоений существуют такие тривиализации

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{E}_{U_\alpha},\quad \varphi'_\alpha\colon U_\alpha\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{E}'_{U_\alpha},$$

что для любых α и β с $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ имеет место равенство

$$\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha=\varphi_\beta'^{-1}\circ\varphi'_\alpha\colon (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{K}^n\to(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{K}^n,$$

а значит, и равенство

$$\varphi'_\beta\circ\varphi_\beta^{-1}=\varphi'_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon \mathscr{E}_{U_\alpha\cap U_\beta}\to\mathscr{E}'_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

Поэтому формула

$$f(p)=(\varphi'_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})(p),\qquad \text{если } p\in\mathscr{E}_{U_\alpha}\ (\text{т. е. } \pi(p)\in U_\alpha),$$

корректно определяет некоторое отображение $f\colon \mathscr{E}\to\mathscr{E}'$, являющееся — как показывает очевидная проверка — изоморфизмом $\xi\to\xi'$.

Существование. Рассмотрим дизъюнктное объединение

$$E=\coprod_\alpha (U_\alpha\times\mathbb{K}^n)$$

пространств $U_\alpha\times\mathbb{K}^n$. Обозначив для любых точек $b\in U_\alpha$ и $x\in\mathbb{K}^n$ точку $(b, x)\in U_\alpha\times\mathbb{K}^n$ пространства E символом $(b, x)_\alpha$, мы введем в E отношение $\sim$, считая, что $(b, x)_\alpha\sim(c, y)_\beta$ для $b\in U_\alpha$, $c\in U_\beta$, x, $y\in\mathbb{K}^n$ тогда и только тогда, когда $c=b$ и $y=\varphi_{\beta\alpha}(b)x$. Из соотношений (9) немедленно вытекает, что это отношение является отношением эквивалентности. Пусть $\mathscr{E}$ — соответствующее факторпространство пространства E (снабженное фактортопологией). Тогда формула

$$\pi[b, x]_\alpha=b,\qquad b\in\mathscr{B},\quad x\in\mathbb{K}^n,$$

где α — такой индекс, что $b\in U_\alpha$, а $[b, x]_\alpha$ — класс эквивалентности точки $(b, x)_\alpha$, будет корректно определять некоторое непрерывное (почему?) надъективное отображение

$$\pi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}.$$

Для любого α формула

$$\varphi_\alpha(b, x)=[b, x]_\alpha,\qquad b\in U_\alpha,\ x\in\mathbb{K}^n,$$

очевидно, определяет непрерывное послойное отображение

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{E}_{U_\alpha},$$

где $\mathscr{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}U_\alpha$ — подпространство пространства $\mathscr{E}$, состоящее из всех точек вида $[b, x]_\alpha$, $b\in U_\alpha$, $x\in\mathbb{K}^n$. Более того, легко видеть, что формула

$$[b, x]_\alpha\mapsto(b, x),\qquad b\in U_\alpha,\ x\in\mathbb{K}^n,$$

корректно определяет непрерывное (почему?) отображение $\mathscr{E}_{U_\alpha}\to U_\alpha\times\mathbb{K}^n$, обратное к отображению φ_α. Следовательно, φ_α является послойным гомеоморфизмом. Это означает, что тройка $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ удовлетворяет условию $б_1$ определения 1.

Чтобы удовлетворить условию а (и условию $б_2$), заметим, что для любой точки $b\in\mathscr{B}$ слой $\mathscr{F}_b$ отображения π состоит из всех точек вида $[b, x]_\alpha$, где α — произвольный индекс, для которого $b\in U_\alpha$. При этом если кроме того $x\in U_\beta$, то $[b, x]_\alpha=[b, y]_\beta$, где $y=\varphi_{\beta\alpha}(b)x$. Поскольку отображение $\varphi_{\beta\alpha}(b)\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ линейно, отсюда следует, что формулы

$$\begin{aligned} [b, x]_\alpha+[b, y]_\alpha&=[b, x+y]_\alpha, \qquad && x, y\in\mathbb{K}^n,\\ \lambda[b, x]_\alpha&=[b, \lambda x]_\alpha, && x\in\mathbb{K}^n, \end{aligned}$$

корректно определяют в $\mathscr{F}_b$ структуру линейного пространства. Это дает условие а и одновременно условие $б_2$.

Таким образом, ξ является векторным расслоением, а отображения φ_α — его тривиализациями. Кроме того

$$(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha)(b, x)=\varphi_\beta^{-1}[b, x]_\alpha=\varphi_\beta^{-1}[b, \varphi_{\beta\alpha}(b)x]_\beta=(b, \varphi_{\beta\alpha}(b)x)$$

для любой точки $(b, x)\in(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{K}^n$, и значит склеивающим коциклом φ_ξ этого расслоения является данный коцикл $\boldsymbol{\varphi}=\{\varphi_{\beta\alpha}\}$. $\square$

Описанная конструкция объясняет, в частности, почему коцикл φ_ξ называется склеивающим. По аналогичным соображениям составляющие этот коцикл отображения $\varphi_{\beta\alpha}$ называются также *склеивающими функциями* или *функциями склейки*.

Предложение 2 еще не полностью сводит векторные расслоения к матричным коциклам, поскольку коцикл φ_ξ зависит от выбора тривиализаций φ_α и при другом их выборе вполне может оказаться другим.

Однако эта неоднозначность легко контролируется.

Пусть $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{E}_{U_\alpha}\}$ и $\{\varphi'_\alpha\colon U_\alpha\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{E}_{U_\alpha}\}$ — две системы тривиализаций векторного расслоения ξ над одним и тем же тривиализирующим покрытием $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$. Тогда для любого α формула

$$\gamma_\alpha(b)=\varphi_{\alpha, b}^{-1}\circ\varphi'_{\alpha, b}\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n, \qquad b\in U_\alpha,$$

определяет некоторое отображение

$$\gamma_\alpha\colon U_\alpha\to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}),$$

связанное с гомеоморфизмом

$$\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi'_\alpha\colon U\times\mathbb{K}^n\to U\times\mathbb{K}^n$$

соотношением

$$(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi'_\alpha)(b, x) = (b, \gamma_\alpha(b) x), \qquad b \in U_\alpha, \ x \in \mathbb{K}^n,$$

и потому в силу леммы 1 непрерывное.

По построению для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\begin{aligned} \varphi'_{\beta\alpha}(b) &= \varphi'^{-1}_{\beta, b} \circ \varphi'_{\alpha, b} = \\ &= \varphi'^{-1}_{\beta, b} \circ \varphi_{\beta, b} \circ \varphi^{-1}_{\beta, b} \circ \varphi_{\alpha, b} \circ \varphi^{-1}_{\alpha, b} \circ \varphi'_{\alpha, b} = \\ &= \gamma_\beta(b)^{-1} \circ \varphi_{\beta\alpha}(b) \circ \gamma_\alpha(b), \end{aligned}$$

т. е.

$$(10) \qquad \varphi'_{\beta\alpha} = \gamma_\beta^{-1} \varphi_{\beta\alpha} \gamma_\alpha$$

в группе всех непрерывных отображений $U_\alpha \cap U_\beta \to \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ (где, конечно, под γ_α и γ_β подразумеваются ограничения этих отображений на $U_\alpha \cap U_\beta$).

Мы будем говорить, что два коцикла $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ и $\varphi' = = \{\varphi'_{\beta\alpha}\}$ покрытия $\mathfrak{U}$ над группой $\mathcal{G}$ *когомологичны*, если существуют такие непрерывные отображения

$$(11) \qquad \gamma_\alpha \colon U_\alpha \to \mathcal{G},$$

что для любых индексов α, β с $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ выполнены соотношения (10). В этой терминологии доказанное утверждение означает, что *склеивающие коциклы одного и того же векторного расслоения ξ, отвечающие различным тривиализациям φ_α (но одному и тому же тривиализирующему покрытию $\mathfrak{U}$) когомологичны.*

Отношение когомологичности коциклов является, очевидно, отношением эквивалентности. Соответствующие классы называются *классами когомологий* покрытия $\mathfrak{U}$ над группой $\mathcal{G}$. Класс когомологий цикла φ мы будем обозначать символом $[\varphi]$, а множество всех классов когомологий покрытия $\mathfrak{U}$ над группой $\mathcal{G}$ — символом $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{G})$.

[Обратим внимание, что, вообще говоря, множество $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{G})$ не несет никакой естественной групповой структуры.]

В свете всего вышесказанного следующая теорема теперь очевидна:

Теорема 1. *Формула*

$$\xi \mapsto [\varphi_\xi]$$

устанавливает биективное соответствие между множеством классов изоморфных векторных расслоений ξ ранга n над пространством $\mathcal{B}$, имеющих данное тривиализирующее накрытие $\mathfrak{U}$, и множеством $H^1(\mathfrak{U}; \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}))$. □

В качестве полезного дополнения к этой теореме заметим, что *каждый коцикл* $\varphi' = \{\varphi'_{\beta\alpha}\}$, *когомологичный склеивающему коциклу* φ_ξ *векторного расслоения* ξ, *также является склеивающим коциклом этого расслоения* (отвечающим каким-то новым тривиализациям φ'_α: $U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$). Действительно, если коцикл $\varphi = \varphi_\xi$ отвечает тривиализациям φ_α: $U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ и если имеют место равенства вида (10), где γ_α—отображения (11), то, положив

$$\varphi'_\alpha(b, x) = \varphi_\alpha(b, \gamma_\alpha(b)x), \qquad b \in U_\alpha, \ x \in \mathbb{K}^n,$$

мы получим тривиализации φ'_α: $U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$, которым отвечает коцикл φ'. □

Стоит также заметить, что в каждом множестве $H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ имеется отмеченный элемент $[e]$, являющийся классом когомологий коцикла e, состоящего из постоянных отображений $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathscr{G}$, каждое из которых переводит все множество $U_\alpha \cap U_\beta$ в единицу e группы $\mathscr{G}$. При этом легко видеть (докажите!), что *при* $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ *классу* $[e]$ *отвечает тривиальное векторное расслоение* $\theta^n_{\mathscr{B}}$.

Замечание 2. Теорема 1 вместе с конструкцией склеивающих коциклов φ_ξ практически дословно переносится на случай любых $\mathscr{G}$-расслоений вида $\xi = \xi[\mathscr{F}]$, где ξ—произвольное локально тривиальное главное $\mathscr{G}$-расслоение, а группа $\mathscr{G}$ и левое $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ фиксированы. (Следует иметь в виду, что по определению каждая тривиализация расслоения ξ над U индуцируется некоторой тривиализацией главного расслоения ξ.) Подчеркнем, что, таким образом, соответствующие множества $H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$, описывающие все расслоения вида $\xi[\mathscr{F}]$, тривиализирующиеся над элементами покрытия $\mathfrak{U}$, *не зависят от* $\mathscr{F}$. Это устанавливает биективное соответствие между $\mathscr{G}$-расслоениями ξ и ξ', тривиализирующимися над каждым элементом покрытия $\mathfrak{U}$ и отвечающим различным $\mathscr{G}$-пространствам $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$. Эти расслоения соответствуют друг другу, если они определяют один и тот же элемент множества $H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$. Впрочем, это соответствие фактически нам уже известно, поскольку расслоения ξ и ξ' тогда и только тогда соответствуют друг другу в этом смысле, когда они ассоциированы с одним и тем же главным $\mathscr{G}$-расслоением ξ.

[Иначе то же самое можно выразить утверждением, что множество $H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ находится в естественном биективном соответствии с классами изоморфных главных $\mathscr{G}$-расслоений над $\mathcal{B}$, тривиализирующихся над каждым элементом покрытия $\mathfrak{U}$.]

Замечание 3. Если покрытие $\mathfrak{U}'$ вписано в покрытие $\mathfrak{U}$, то операция ограничения отображений определяет инъективное (почему?) отображение $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{G}) \to H^1(\mathfrak{U}'; \mathcal{G})$, которое можно считать вложением. Это понятным образом позволяет ввести в рассмотрение объединение множеств $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{G})$ по всем открытым покрытиям $\mathfrak{U}$ пространства $\mathcal{B}$, которое обозначается символом $H^1(\mathcal{B}; \mathcal{G})$ и находится в естественном биективном соответствии с множеством классов изоморфных локально тривиальных $\mathcal{G}$-расслоений (при $\mathcal{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$—векторных расслоений ранга n) над пространством $\mathcal{B}$.

Замечание 4. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь гладких векторных расслоений $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, для которых (см. лекцию 9) пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ являются гладкими многообразиями, а отображение π — субмерсией. В лекции 16 мы покажем, что в случае, когда многообразие $\mathcal{B}$ паракомпактно (см. определение 1 лекции III. 22), на нем существуют покрытия $\mathfrak{U}$, *универсально тривиализирующие* гладкие векторные расслоения, т. е. такие, что любое гладкое векторное расслоение тривиализируется над $\mathfrak{U}$. Поэтому описанный в замечании 3 предельный переход в этом случае фактически не нужен.