Лекция 7

Векторные $\mathscr{G}$-расслоения.— Линейные $\mathscr{G}$-пространства.— Кватернионы.— Группа $U^{\mathbb{H}}(n)$.— Векторные расслоения типа $\mathscr{G}$.— Их связь с главными $\mathscr{G}$-расслоениями.— Условие редуцируемости.— Ориентируемые векторные расслоения.— Метризуемые векторные расслоения.

Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — векторное расслоение ранга n над полем $\mathbb{K}$ и пусть $\mathscr{G}$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$.

Определение 1. Говорят, что векторное расслоение ξ *редуцируется к группе* $\mathscr{G}$, если для него существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что для любых α и β и любой точки $b\in U_\alpha\cap U_\beta$ матрица $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ принадлежит группе $\mathscr{G}$ (отвечающий этому атласу склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ является коциклом над группой $\mathscr{G}$). Атласы, обладающие этим свойством, мы будем называть *$\mathscr{G}$-атласами.* Два $\mathscr{G}$-атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также является $\mathscr{G}$-атласом. Векторное расслоение, для которого задан класс эквивалентных $\mathscr{G}$-атласов, называется *векторным $\mathscr{G}$-расслоением.*

Таким образом, *векторное расслоение тогда и только тогда редуцируется к группе $\mathscr{G}$, когда в него можно ввести структуру векторного $\mathscr{G}$-расслоения.*

Вообще говоря, эта структура не единственна.

Пример 1. Легко видеть, что *векторное расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к единичной подгруппе $\{E\}$, когда оно тривиально.* Действительно, если $\varphi_{\beta\alpha}(b)=E$ для всех α, β и всех $b\in U_\alpha\cap U_\beta$, то формула

$$\varphi(b, \boldsymbol{x})=\varphi_\alpha(b, \boldsymbol{x}), \qquad \text{если } b\in U_\alpha,$$

корректно определяет отображение $\varphi\colon \mathscr{B}\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{B}$, являющееся изоморфизмом над $\mathscr{B}$. $\square$

Пример 2. Для любых векторных расслоений $\xi=(\mathscr{E}^\xi, \pi^\xi, \mathscr{B})$ и $\eta=(\mathscr{E}^\eta, \pi^\eta, \mathscr{B})$ над $\mathscr{B}$ рангов n и m соответственно рассмотрим в прямом произведении $\mathscr{E}^\xi\times\mathscr{E}^\eta$ их тотальных пространств подпространство $\mathscr{E}$, состоящее из таких пар $(p, q)\in\mathscr{E}^\xi\times\mathscr{E}^\eta$, что $\pi^\xi(p)=\pi^\eta(q)$. [На языке теории категорий пространство $\mathscr{E}$ является не чем иным, как коамальгамой диаграммы $\mathscr{E}^\xi\xrightarrow{\pi^\xi}\mathscr{B}\xleftarrow{\pi^\eta}\mathscr{E}^\eta$.] Пусть

$$\zeta=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B}),$$

где π — отображение $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$, определенное формулой $\pi(p, q) = \pi^{\xi}(p)$ (или, что равносильно, формулой $\pi(p, q) = \pi^{\eta}(q)$). Для любой точки $b \in \mathscr{B}$ слой $\pi^{-1}(b)$ расслоения $\mathscr{B}$ состоит из пар (p, q), где $p \in \mathscr{F}_b^{\xi}$, $q \in \mathscr{F}_b^{\eta}$, т. е. является прямой суммой $\mathscr{F}_b^{\xi} \oplus \mathscr{F}_b^{\eta}$ линейных пространств $\mathscr{F}_b^{\xi}$ и $\mathscr{F}_b^{\eta}$ (и значит сам является линейным пространством). При этом для любых тривиализирующих атласов $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha^{\xi})\}$ и $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha^{\eta})\}$ расслоений ξ и η (с одними и теми же тривиализирующими окрестностями U_α) отображения

$$\varphi_\alpha\colon\ U_\alpha \times \mathbb{K}^{n+m} \to \mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1} U_\alpha,$$

определенные формулами

$$\varphi_\alpha(b, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\varphi_\alpha^{\xi}(b, \boldsymbol{x}), \varphi_\alpha^{\eta}(b, \boldsymbol{y})), \qquad b \in U_\alpha, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^m,$$

будут, как легко видеть, удовлетворять условиям **б$_1$** и **б$_2$** определения 1 лекции 6. Значит, расслоение ζ является векторным расслоением ранга $n+m$ (а отображения φ_α — его тривиализациями над U_α). Это расслоение называется *суммой Уитни* расслоений ξ и η и обозначается символом $\xi \oplus \eta$. Его тотальное пространство $\mathscr{E}$ обозначается символом $\mathscr{E}^{\eta} \oplus \mathscr{E}^{\xi}$.

По определению *расслоение* $\xi \oplus \eta$ *является векторным* $\mathrm{GL}(n, m; \mathbb{K})$*-расслоением*, где $\mathrm{GL}(n, m; \mathbb{K}) \approx \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(m; \mathbb{K})$ — группа всех матриц порядка $n+m$, имеющих вид

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}, \qquad \begin{matrix} A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}), \\ B \in \mathrm{GL}(m; \mathbb{K}). \end{matrix}$$

Задача 1. Покажите, что *векторное расслоение ранга $n+m$ тогда и только тогда редуцируется к группе* $\mathrm{GL}(n, m; \mathbb{K})$, *когда оно является суммой Уитни векторных расслоений рангов n и m соответственно.*

Чтобы лучше освоить понятие векторного $\mathcal{G}$-расслоения, нам понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры.

Пусть по-прежнему $\mathcal{G}$ — произвольная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$.

Определение 2. Линейное n-мерное пространство $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{K}$ называется *линейным $\mathcal{G}$-пространством*, если в нем задан такой класс базисов $\mathrm{Coor}\,\mathscr{V}$, что

а) если базис $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ связан с базисом $\boldsymbol{e} =$

$=(e_1, \ldots, e_n)$ из $\operatorname{Coor}\mathscr{V}$ матрицей перехода $A\in\mathscr{G}$, то $f\in\operatorname{Coor}\mathscr{V}$;

б) для любых базисов из $\operatorname{Coor}\mathscr{V}$ связывающая их матрица перехода принадлежит подгруппе $\mathscr{G}$.

Пример 3. Приняв за $\operatorname{Coor}\mathbb{K}^n$ все базисы в $\mathbb{K}^n$, связанные со стандартным базисом $e_1, \ldots, e_n$ матрицей перехода из группы $\mathscr{G}$, мы внесем в $\mathbb{K}^n$ структуру линейного $\mathscr{G}$-пространства. Эта структура называется *стандартной*.

Линейное отображение $\varphi\colon \mathscr{V}\to\mathscr{V}_1$ линейных $\mathscr{G}$-пространств называется *$\mathscr{G}$-изоморфизмом*, если каждый базис из $\operatorname{Coor}\mathscr{V}$ оно переводит в базис из $\operatorname{Coor}\mathscr{V}'$ (и потому, в частности, является линейным изоморфизмом).

Пример 4. Линейный изоморфизм $\mathscr{V}\to\mathbb{K}^n$ тогда и только тогда является $\mathscr{G}$-изоморфизмом (по отношению к стандартной структуре $\mathscr{G}$-пространства $\mathbb{K}^n$), когда он является координатным изоморфизмом, отвечающим базису из $\operatorname{Coor}\mathscr{V}$.

Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Пример 5. Если $\mathrm{GL}^+(n;\mathbb{R})$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, состоящая из матриц с положительным определителем, то линейные $\mathrm{GL}^+(n;\mathbb{R})$-пространства — это в точности ориентированные линейные пространства, а $\mathrm{GL}^+(n;\mathbb{R})$-изоморфизмы — это линейные изоморфизмы, сохраняющие ориентацию.

Пример 6. Линейные $\mathrm{O}(n)$-пространства — это евклидовы линейные пространства (пространства с положительно определенным скалярным умножением), а $\mathrm{O}(n)$-изоморфизмы — это их изометрии.

Пример 7. Линейные $\mathrm{SO}(n)$-пространства — это ориентированные евклидовы линейные пространства, а $\mathrm{SO}(n)$-изоморфизмы — это их изометрии, сохраняющие ориентацию.

Пример 8. Аналогично линейные $\mathrm{O}(p, q)$-пространства — это (см. лекцию II.12б) псевдоевклидовы пространства типа (p, q), а $\mathrm{O}(p, q)$-изоморфизмы — это их изометрии.

Пример 9. Линейные $\mathrm{Sp}(m;\mathbb{R})$-пространства — это (см. лекцию II.10) симплектические пространства размерности $n=2m$, а $\mathrm{Sp}(m;\mathbb{R})$-изоморфизмы — это их симплектические изоморфизмы.

Пример 10. Напомним (см. лекцию II.25), что *комплексной структурой* на вещественном линейном пространстве $\mathscr{V}$ размерности $n=2m$ называется произвольный линейный оператор $\boldsymbol{I}\colon \mathscr{V}\to\mathscr{V}$, для которого $\boldsymbol{I}^2=-\boldsymbol{E}$.

Согласно результатам лекции II.25 вещественные пространства с комплексной структурой — это в точности линейные $\mathscr{G}$-пространства, где $\mathscr{G}$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ (и даже группы $\mathrm{GL}^+(n;\ \mathbb{R})$), состоящая из всех матриц вида

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ -B & A \end{Vmatrix}.$$

[Эта подгруппа изоморфна группе $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{C})$, а пространства с комплексной структурой — это в точности овеществления комплексных линейных пространств; см. лекцию II.25.]

Заметим, что *любое пространство с комплексной структурой автоматически ориентировано.*

Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Пример 11. Линейные $\mathrm{U}(n)$-пространства — это унитарные пространства (см. лекцию II.20), а $\mathrm{U}(n)$-изоморфизмы — это их изометрии.

Задача 2. (Ср. задачу 4 лекции III.11.) Покажите, что операция овеществления $\mathscr{V}\mapsto\mathscr{V}_{\mathbb{R}}$ (см. лекцию II.25) устанавливает биективное соответствие между унитарными m-мерными пространствами и евклидовыми $2m$-мерными пространствами, являющимися одновременно симплектическими пространствами. [Указание. Вещественная часть эрмитова скалярного произведения является евклидовым скалярным произведением, а мнимая — симплектическим. См. лекцию II.25.]

Пример 12. Линейные $\mathrm{Sp}(m)$-пространства, где $\mathrm{Sp}(m)$ — унитарная симплектическая группа (см. лекцию III.11), — это унитарные и одновременно симплектические (комплексные) пространства размерности $2m$.

Последний пример может быть элегантно интерпретирован также с точки зрения кватернионных линейных пространств, но для этого мы должны глубже познакомиться с кватернионами.

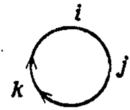
По определению (см. лекцию II.24) каждый кватернион ξ имеет вид

$$\xi=a_0+a_1i+a_2j+a_3k, \tag{1}$$

где i, j, k — *кватернионные единицы* с таблицей умножения

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1.

(Очень удобно изображать эту таблицу схемой



Произведение любых двух единиц, следующих друг за другом в направлении, указанном стрелкой, равно третьей единице. При умножении единиц в другом порядке произведение приобретает множитель -1.)

Складываются кватернионы покомпонентно (и, следовательно, составляют линейное пространство с базисом 1, i, j, k).

Кватернионы вида a_0+a_1i отождествляются с комплексными числами. Это позволяет каждый кватернион (1) записать в виде

$$\xi = a + bj, \qquad \text{где} \quad a, b \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

и тем самым отождествить линейное пространство $\mathbb{H}$ всех кватернионов с линейным пространством $\mathbb{C}^2$ пар (a, b) комплексных чисел. Кватернионы, записанные в виде (2), умножаются по обычным правилам алгебры с дополнительными соотношениями

$$j^2 = -1 \quad \text{и} \quad aj = j\bar{a}, \qquad a \in \mathbb{C}.$$

Это означает, что умножение кватернионов задается формулой

$$(a+bj)(x+yj) = (ax - b\bar{y}) + (ay + b\bar{x})j. \tag{3}$$

Задача 3. Проверьте прямым вычислением, что задаваемое формулой (3) умножение ассоциативно и билинейно, т. е. что *линеал* $\mathbb{H}$ *является ассоциативной алгеброй.*

Число a_0 называется *вещественной* (или *скалярной*) *частью* кватерниона (1) и обозначается символом $\operatorname{Re}\xi$. Таким образом, если $\xi = a + bj$, $a, b \in \mathbb{C}$, то $\operatorname{Re}\xi = \operatorname{Re} a$.

Если $\xi = \operatorname{Re}\xi$, то кватернион называется ***вещественным***. Такой кватернион отождествляется с вещественным числом $\operatorname{Re}\xi = a_0$.

Если $\operatorname{Re}\xi = 0$, то кватернион ξ называется ***мнимым***. Все мнимые кватернионы образуют трехмерный линеал $\mathbb{H}'$ с базисом i, j, k.

Задача 4. Покажите, что кватернион тогда и только тогда перестановочен с любым кватернионом $\xi \in \mathbb{H}$ (принадлежит центру алгебры $\mathbb{H}$), когда он вещественен.

Мы введем в линейное пространство $\mathbb{H}$ евклидову метрику, считая базис 1, i, j, k ортонормированным. Длина в этой метрике кватерниона ξ обозначается символом $|\xi|$ и называется его *нормой*. По определению

$$|\xi|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |a|^2 + |b|^2. \tag{4}$$

В частности, $|\xi| = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Кватернион $a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ называется *сопряженным* с кватернионом (1) и обозначается символом $\bar{\xi}$. Ясно, что $\bar{\xi} = \xi$ тогда и только тогда, когда кватернион ξ веществен, а $\bar{\xi} = -\xi$ тогда и только тогда, когда кватернион ξ мним.

Для кватерниона (2) кватернион $\bar{\xi}$ выражается формулой

$$\bar{\xi} = \bar{a} - bj.$$

В силу формул (3) и (4) отсюда немедленно следует, что

$$\xi\bar{\xi} = \bar{\xi}\xi = |\xi|^2.$$

Поэтому при $\xi \neq 0$ для кватерниона $\xi^{-1} = |\xi|^{-2}\bar{\xi}$ имеют место равенства

$$\xi\xi^{-1} = \xi^{-1}\xi = 1.$$

(Например, $\xi\xi^{-1} = \xi|\xi|^{-2}\bar{\xi} = |\xi|^{-2}\xi\bar{\xi} = 1$.) По определению это означает, что *алгебра* $\mathbb{H}$ *является телом.*

Непосредственное вычисление показывает, что для любых кватернионов ξ, $\eta \in \mathbb{H}$ имеют место равенства

$$\overline{\xi + \eta} = \bar{\xi} + \bar{\eta}, \qquad \overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}$$

(отображение $\xi \mapsto \bar{\xi}$ является **антиавтоморфизмом** алгебры $\mathbb{H}$). Поэтому, в частности, $|\xi\eta|^2 = \xi\eta\overline{\xi\eta} = \xi\eta\bar{\eta}\bar{\xi} = \xi|\eta|^2\bar{\xi} = \xi\bar{\xi}|\eta|^2 = |\xi|^2|\eta|^2$, и значит

$$|\xi\eta| = |\xi||\eta|. \tag{5}$$

Для произвольного кватерниона $\xi = a + bj$ мы положим

$$A_\xi = \begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Задача 5. Покажите, что *соответствие* $\xi \mapsto A_\xi$ *представляет собой гомоморфизм алгебры* $\mathbb{H}$ *в алгебру* $\mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ *комплексных квадратных матриц второго порядка, являющийся изоморфизмом на подалгебру всех матриц вида* (6).

Поэтому все свойства кватернионов можно интерпретировать как свойства матриц. Например, квадрат нормы $|\xi|^2=a\bar{a}+b\bar{b}$ кватернионов ξ является не чем иным, как определителем $\det A_\xi$ матрицы A_ξ (что, кстати сказать, еще раз доказывает формулу (5)), а $\operatorname{Re}\xi=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A_\xi$. При желании можно отождествлять кватернион ξ с матрицей A_ξ.

Заметим, что это отождествление отличается от отождествления, описанного в лекции II.24; одно получается из другого преобразованием базиса $i\mapsto -k$, $j\mapsto j$, $k\mapsto -i$.

Скалярным умножением на кватернионном правом линейном пространстве $\mathcal{V}$ называется такое отображение $\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{H}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\mapsto \boldsymbol{ab}$, что

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{ab}_1+\boldsymbol{ab}_2$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2\in\mathcal{V}$;

$$(\boldsymbol{a}\lambda)\boldsymbol{b}=\bar{\lambda}(\boldsymbol{ab}), \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\lambda)=(\boldsymbol{ab})\lambda$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\mathcal{V}$ и любого кватерниона $\lambda\in\mathbb{H}$;

$$\boldsymbol{ba}=\overline{\boldsymbol{ab}}$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in\mathcal{V}$.

Кватернионное пространство $\mathcal{V}$ с заданным скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\mapsto\boldsymbol{ab}$ называется *кватернионным евклидовым пространством*. (Употребляется также термин *симплектическое пространство*, у нас занятый для пространств с невырожденным кососимметрическим произведением.) Базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ кватернионного евклидова пространства называется *ортонормированным*, если $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$ для любых $i, j=1, \ldots, n$. Линейное отображение $\mathcal{V}\to\mathcal{V}_1$ кватернионных евклидовых пространств, сохраняющее скалярные произведения, называется *изоморфизмом* (или *изометрией*).

Примером n-мерного кватернионного евклидова пространства является пространство $\mathbb{H}^n$ со скалярным умножением

$$\boldsymbol{ab}=\bar{a}^1b^1+\ldots+\bar{a}^nb^n,$$

где $\boldsymbol{a}=(a^1, \ldots, a^n)\in\mathbb{H}^n$ и $\boldsymbol{b}=(b^1, \ldots, b^n)\in\mathbb{H}^n$. [Мы записываем элементы пространства $\mathbb{H}^n$ в виде строк, хотя на самом деле их надо считать столбцами.]

[Обратим внимание, что при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ аналогичное определение—см. лекцию II.20—отличается на комплексное сопряжение (что, конечно, никакого значения не имеет).]

Задача 6. Покажите, что базис $e_1, \ldots, e_n$ кватернионного евклидова пространства $\mathscr{V}$ тогда и только тогда ортонормирован, когда соответствующий ему координатный изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathbb{H}^n$ (переводящий вектор $a=e_ia^i$ пространства $\mathscr{V}$ в вектор $(a^1, \ldots, a^n)$ пространства $\mathbb{H}^n$) является изометрией.

Все изометрии $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ пространства $\mathbb{H}^n$ на себя составляют группу, обозначаемую символом $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$. Отождествив каждую изометрию $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ с матрицей, столбцы которой являются образами векторов стандартного базиса, мы можем считать элементами группы $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ кватернионные матрицы.

Задача 7. Покажите, что кватернионная матрица A тогда и только тогда принадлежит группе $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$, когда

$$\overline{A}^{\top}A=E,$$

где $\overline{A}^{\top}$—матрица, получающаяся из матрицы A транспонированием и заменой всех элементов на кватернионно сопряженные. (Ср. предложение 1 лекции II.22.)

Задача 8. Покажите, что группа $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ является матричной группой Ли (см. лекцию III.11), алгеброй Ли которой служит пространство $\mathfrak{u}^{\mathbb{H}}(n)$ кватернионных матриц B, удовлетворяющих соотношению

$$B+\overline{B}^{\top}=0.$$

Задача 9. Покажите, что $A \in \mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ тогда и только тогда, когда A является матрицей перехода, связывающей два ортонормированных базиса пространства $\mathbb{H}^n$.

Это немедленно дает

Пример 13. Кватернионные $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$-пространства $\mathscr{V}$—это в точности кватернионные евклидовы пространства (с классом всех ортонормированных базисов в качестве $\operatorname{Coor}\mathscr{V}$).

В силу отождествления $\mathbb{H}$ с $\mathbb{C}^2$ и, значит, $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$ скалярное произведение на $\mathbb{H}^n$ определяет по формуле

$$ab=S(a, b)+j\Omega(a, b)$$

два функционала S и Ω на $\mathbb{C}^{2n}$. (Ср. лекцию II.25.)

Задача 10. Покажите, что S является на $\mathbb{C}^{2n}$ эрмитовым скалярным умножением, а Ω—симплектическим. Пользуясь этим, покажите, что n-мерные кватернионные евклидовы пространства — это в точности комплексные $2n$-мерные пространства, одновременно унитарные и симплектические. (Ср. выше задачу 2.)

Отсюда, в частности, следует, что *группа* $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ *изоморфна симплектической группе* $\mathrm{Sp}(n)$.

Задача 11. Постройте изоморфизм $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n) \longrightarrow \mathrm{Sp}(n)$ в явиом виде (ср. задачу 4 лекции III.11).

На основании этого изоморфизма группы $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ обычно отождествляются. [В частности, группа $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ также называется *симплектической группой* и обозначается символом $\mathrm{Sp}(n)$.]

Вернемся теперь к векторным расслоениям.

Пусть по-прежнему $\mathscr{G}$ — произвольная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{K})$.

Определение 3. Векторное расслоение $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ ранга n над полем $\mathbb{K}$ называется *расслоением типа* $\mathscr{G}$, если

а) каждый слой $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathscr{B}$, расслоения ξ является линейным $\mathscr{G}$-пространством;

б) существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ расслоения ξ

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times K^n \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr] & & \mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

что для любого α и любого $b \in U_\alpha$ отображение

(7) $$\varphi_{\alpha, b}\colon \mathbb{K}^n \to \mathscr{F}_b, \quad x \mapsto \varphi_\alpha(b, x), \qquad x \in \mathbb{K}^n,$$

является $\mathscr{G}$-изоморфизмом.

В частности, мы имеем

1) *ориентированные векторные расслоения* (для которых слои $\mathscr{F}_b$ ориентированы, а изоморфизмы (7) сохраняют ориентации),

2) *евклидовы векторные расслоения* (для которых в слоях $\mathscr{F}_b$ задана евклидова метрика, а изоморфизмы (7) являются изометриями),

3) *псевдоевклидовы векторные расслоения*,

4) *симплектические векторные расслоения*,

5) *унитарные векторные расслоения*,

6) *кватернионные евклидовы векторные расслоения* и т. д. и т. п.

Здесь $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ для расслоений классов 1), 2) и 3); $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ для расслоений класса 4); $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ для расслоений класса 5) и $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ для расслоений класса 6). При этом расслоения класса 5) можно отождествлять с вещественными ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) расслоениями, одновременно евклидовыми и симплектическими, а расслоения класса 6) — с комплексными ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) расслоениями, одновременно унитарными и симплектическими.

Связь векторных расслоений типа $\mathcal{G}$ с расслоениями, редуцирующимися к группе $\mathcal{G}$, описывается следующим предложением:

Предложение 1. *Векторное расслоение тогда и только тогда редуцируется к группе $\mathcal{G}$, когда в него можно ввести структуру расслоения типа $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Пусть векторное расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ является расслоением типа $\mathcal{G}$ и пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — тривиализирующий атлас, предусмотренный условием б определения 3.

Тогда каждое отображение $\varphi_{\beta\alpha}(b)\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, являясь композицией $\mathcal{G}$-изоморфизмов, будет $\mathcal{G}$-изоморфизмом, т. е. его матрица будет принадлежать группе $\mathcal{G}$. Это доказывает, что любое векторное расслоение типа $\mathcal{G}$ редуцируется к группе $\mathcal{G}$ (и, значит, является $\mathcal{G}$-расслоением).

Обратно, пусть векторное расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ редуцируется к группе $\mathcal{G}$ и пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произвольный $\mathcal{G}$-атлас этого расслоения. Каждая тривиализация φ_α задает в линейном пространстве $\mathscr{F}_b$, $b\in U_\alpha$, базис

$$\varphi_\alpha(b, e_1), \ \ldots, \ \varphi_\alpha(b, e_n), \tag{8}$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{K}^n$ (см. лекцию 6) и для каждой точки $b\in U_\alpha\cap U_\beta$ базисы (8), отвечающие тривиализациям φ_α и φ_β, связаны матрицей перехода $\varphi_{\beta\alpha}(b)\in\mathcal{G}$. Поэтому структура $\mathcal{G}$-пространства, задаваемая в линеале $\mathscr{F}_b$ базисом (8) (т. е. такая, что $\operatorname{Coor}\mathscr{F}_b$ состоит из всех базисов, связанных с базисом (8) матрицами перехода из $\mathcal{G}$), не зависит от выбора окрестности U_α, содержащей точку b. Так как по отношению к этой структуре отображение $\varphi_{\alpha,b}$ будет, конечно, $\mathcal{G}$-изоморфизмом, то мы получаем, тем самым, в ξ структуру векторного расслоения типа $\mathcal{G}$. □

Таким образом, *на любом векторном расслоении ξ структуры векторного $\mathcal{G}$-расслоения и расслоения типа $\mathcal{G}$*

взаимно однозначно друг другу соответствуют. В дальнейшем мы их различать не будем и термин «векторное $\mathcal{G}$-расслоение» будем считать синонимом термина «расслоение типа $\mathcal{G}$».

Векторные $\mathcal{G}$-расслоения легко характеризуются в терминах главных $\mathcal{G}$-расслоений.

Действительно, ясно (ср. пример 3 лекции 5), что *для любого локально тривиального главного $\mathcal{G}$-расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi[\mathbb{K}^n]$ является векторным $\mathcal{G}$-расслоением* (здесь $\mathbb{K}^n$ рассматривается как левое $\mathcal{G}$-пространство). Оказывается, что обратное тоже верно, т. е. *каждое векторное $\mathcal{G}$-расслоение ξ имеет вид $\xi[\mathbb{K}^n]$, где ξ—некоторое локально тривиальное главное $\mathcal{G}$-расслоение.* Доказательство по существу повторяет доказательство предложения 1 лекции 5.

Задача 12. Докажите последнее утверждение.

Это позволяет указать легко проверяемое необходимое и достаточное условие редуцируемости данного векторного расслоения к группе $\mathcal{G}$ (или, более общо, данного векторного $\mathcal{G}$-расслоения к подгруппе $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$).

Предполагая подгруппу $\mathcal{H}$ замкнутой, мы введем в рассмотрение пространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ левых смежных классов $a\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$ по подгруппе $\mathcal{H}$ (ср. пример 2 лекции 1). Группа $\mathcal{G}$ действует (вообще говоря, не эффективно!) на этом пространстве по формуле

$$g(a\mathcal{H})=(ga)\mathcal{H}, \qquad g,\ a\in\mathcal{G},$$

и значит, для любого главного $\mathcal{G}$-расслоения ξ определено ассоциированное расслоение $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$.

Пусть расслоение ξ (а значит, и расслоение $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$) локально тривиально.

Предложение 2. *Если векторное $\mathcal{G}$-расслоение $\xi=\xi[\mathbb{K}^n]$ редуцируется к подгруппе $\mathcal{H}$, то расслоение $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ обладает сечением.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$—тривиализирующий $\mathcal{H}$-атлас расслоения ξ, а $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$—соответствующий склеивающий коцикл. Не теряя общности, мы можем считать, что над окрестностями U_α расслоение $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ (а потому и расслоение $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$) также тривиально. Пусть

$$\psi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathcal{G}\to\mathcal{E}_{U_\alpha}$$

— соответствующие тривиализации, а $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ — отвечающий этим тривиализациям склеивающий коцикл над группой $\mathcal{G}$. По условию этот коцикл когомологичен коциклу $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ (рассматриваемому как коцикл над $\mathcal{G}$), т. е. существуют такие отображения $h_\alpha\colon U_\alpha \to \mathcal{G}$, что

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = h_\beta^{-1}(b)\,\psi_{\beta\alpha}(b)\,h_\alpha(b)$$

для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Далее, так как расслоение $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ ассоциировано с расслоением ξ, то по построению оно обладает тривиализирующим атласом $\{(U_\alpha,\ \omega_\alpha)\}$, которому отвечает тот же склеивающий коцикл $\{\psi_{\beta\alpha}\}$. Имея это в виду и обозначая — для сокращения формул — смежный класс $a\mathcal{H}$, $a \in \mathcal{G}$, символом $[a]$, мы произвольной точке $b \in \mathcal{B}$ отнесем точку $s(b)$ тотального пространства $\mathcal{E}$ расслоения $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$, положив

$$s(b) = \omega_\alpha(b,\ [h_\alpha(b)]), \qquad \text{если } b \in U_\alpha.$$

По определению склеивающего коцикла для любых точек $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ и $[a] \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ имеет место равенство

$$\omega_\beta(b,\ \psi_{\beta\alpha}(b)[a]) = \omega_\alpha(b,\ [a]).$$

С другой стороны, так как по условию $[\varphi_{\beta\alpha}(b)] = [e]$, то

$$[h_\beta(b)] = \psi_{\beta\alpha}(b)\,[h_\alpha(b)].$$

Поэтому

$$\omega_\beta(b,\ [h_\beta(b)]) = \omega_\alpha(b,\ [h_\alpha(b)]),$$

и значит, отображение $s\colon \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ определено корректно.

Поскольку s, очевидно, является сечением расслоения $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$, предложение 2 тем самым полностью доказано. □

Обратное утверждение, вообще говоря, верно только при некоторых дополнительных предположениях.

Задача 13. Докажите, что *если каноническое расслоение $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ локально тривиально, то и обратно, из существования для расслоения $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ сечения следует, что расслоение $\xi = \xi[\mathbb{K}^n]$ редуцируется к группе $\mathcal{H}$.*

Задача 14. Покажите, что *если $\mathcal{G}$ является группой Ли, а $\mathcal{H}$ — ее замкнутой подгруппой Ли, то расслоение $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ локально тривиально.* [Указание. Замкнутая подгруппа Ли является вложенным подмногообразием; см. ниже лекцию 13.]

При $\mathcal{G} = \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ и $\mathcal{H} = \mathrm{GL}^+(n;\ \mathbb{R})$ факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ состоит из двух точек. Поэтому для любого главного $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$-расслоения ξ расслоение $\xi[\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})/\mathrm{GL}^+(n;\ \mathbb{R})]$ либо тривиально, либо — в предположении, что база $\mathcal{B}$

расслоения ξ связна — является двулистным накрытием. В первом случае векторное расслоение $\xi = \xi[\mathbb{R}^n]$ редуцируется к группе $\mathrm{GL}^+(n; \mathbb{R})$ (такое расслоение называется *ориентируемым*), а во втором случае — нет.

Задача 15. Покажите, что *касательное расслоение $\tau\mathscr{X}$ над гладким многообразием $\mathscr{X}$ тогда и только тогда ориентируемо, когда ориентируемо многообразие $\mathscr{X}$* (в смысле определения 1 лекции III.25).

Векторное $\mathbb{K}$-расслоение ξ называется *метризуемым*, если в него можно ввести структуру евклидова (при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$), унитарного (при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) или кватернионного евклидова (при $\mathbb{K}=\mathbb{H}$) расслоения, т. е. если оно редуцируется к группам $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n) = \mathrm{Sp}(n)$ соответственно. Каждая такая структура называется *метрикой* на ξ.

Оказывается, что в отличие от свойства ориентируемости свойство метризуемости — при весьма слабых и выполняющихся во всех геометрически интересных случаях предположениях — имеет место для любых векторных расслоеиий. Этот факт удобно доказывать прямо, не пользуясь предложением 2 (или, точнее, — утверждением задачи 13).

Напомним (см. определение 1 лекции III. 22 и замечание 4 лекции III.24), что открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathscr{B}$ называется *нумерируемым*, если существует подчиненное ему *разбиение единицы*, т. е. такое семейство непрерывных неотрицательных функций $\eta_\alpha\colon \mathscr{B} \to \mathbb{R}$, что

1° для любой точки $b \in \mathscr{B}$ найдется окрестность U, в которой только конечное число функций η_α отлично от нуля (свойство локальной конечности);

2° имеет место равенство

$$\sum_\alpha \eta_\alpha = 1$$

(сумма слева определена ввиду свойства 1°);

3° $\eta_\alpha = 0$ вне U_α для любого α (условие подчиненности).

Мы будем называть топологическое пространство $\mathscr{B}$ *паракомпактным*, если каждое его открытое покрытие нумерируемо. (Это определение несколько сильнее общепринятого, но совпадает с ним для хаусдорфовых пространств; см. замечания 1 и 4 лекции III. 24.)

Векторное расслоение ξ называется *нумерируемым*, если для него существует нумерируемое тривиализирующее покрытие. Таким образом, *над паракомпактным пространством $\mathscr{B}$ любое векторное расслоение нумерируемо.*

Предложение 3. *Каждое нумерируемое векторное расслоение метризуемо.*

Доказательству этого предложения мы предпошлем несколько простых замечаний о метриках.

Скалярное умножение (метрика) на линейном пространстве $\mathscr{V}$ однозначно восстанавливается по соответствующему положительно определенному квадратичному функционалу Q: $x \mapsto x^2$, $x \in \mathscr{V}$. (При $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ и $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ это известно из семестра II; см. лекции II.11 и II.19. При $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ доказательство проводится точно так же, как при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Заметим, что для сокращения формулировок мы позволяем себе называть функционал Q «квадратичным» при любом $\mathbb{K}$, хотя, строго говоря, это оправдано только при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.)

Обратим внимание, что при любом $\mathbb{K}$ функционал Q принимает значения в поле $\mathbb{R}$.

Задача 16. Покажите, что для любого конечного семейства положительно определенных квадратичных функционалов Q_α и любых неотрицательных чисел η_α, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, функционал

$$Q=\sum \eta_\alpha Q_\alpha$$

также является положительно определенным квадратичным функционалом.

Для каждого метризованного векторного расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ формула

$$Q(p)=p^2, \qquad p \in \mathscr{E}$$

(где p^2—скалярный квадрат вектора p в линеале $\mathscr{F}_b$, $b=\pi(p)$), определяет—очевидно, непрерывную—функцию Q: $\mathscr{E} \to \mathbb{R}$, обладающую тем свойством, что ее ограничение на каждом слое $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, является положительно определенным квадратичным функционалом на линеале $\mathscr{F}_b$.

Ключом к доказательству предложения 3 является следующая лемма:

Лемма 1. *Каждая непрерывная функция Q: $\mathscr{E} \to \mathbb{R}$, ограничение которой на любом слое $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, является положительно определенным квадратичным функционалом, возникает из некоторой метрики на ξ.*

Доказательство. По условию функция Q на каждом слое $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, задает структуру евклидова (при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$), унитарного (при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) и кватернионного евклидова (при $\mathbb{K}=\mathbb{H}$) линейного пространства. Поэтому нужно лишь доказать, что для расслоения ξ существует тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, для которого все отображения (7) являются изометриями.

Пусть $\{(U_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ — произвольный тривиализирующий атлас расслоения ξ. Как мы знаем (см. лекцию 6), каждая тривиализация φ'_α определяет базис $\mathsf{F}U_\alpha$-модуля $\Gamma(\xi|_{U_\alpha})$, состоящий из сечений

$$s'_i\colon b \mapsto \varphi'_\alpha(b, e_i), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Применив к значениям $s'_1(b), \ldots, s'_n(b)$ этих сечений в каждой точке $b\in U_\alpha$ процесс ортогонализации Грама — Шмидта (см. лекцию I.13; этот процесс применим — докажите! — не только при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, но при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$), мы получим — как легко видеть, также непрерывные — сечения $s_1, \ldots, s_n$ расслоения ξ над U_α, составляющие такой базис $\mathsf{F}U_\alpha$-модуля $\Gamma(\xi|_{U_\alpha})$, что для каждой точки $b\in U_\alpha$ векторы $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ образуют ортонормированный базис линеала $\mathcal{F}_b$.

Для завершения доказательства остается заметить, что последнее свойство в точности означает, что для отвечающей базису $s_1, \ldots, s_n$ тривиализации $\varphi_\alpha\colon U\times\mathbb{K}^n \to \mathcal{E}_{U_\alpha}$ все отображения (7) представляют собой изометрии.

Теперь мы уже можем доказать предложение 3.

Доказательство предложения 3. По условию для расслоения $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ существуют тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и разбиение единицы $\{\eta_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$.

Мы определим на $\mathcal{E}$ функцию $Q\colon \mathcal{E}\to\mathbb{R}$, положив

$$Q(p)=\sum_\alpha \eta_\alpha(\pi(p))\,Q_\alpha(p), \qquad p\in\mathcal{E},$$

где Q_α — функция $\mathcal{E}_{U_\alpha}\to\mathbb{R}$, заданная формулой

$$Q_\alpha(p)=x^2, \qquad \text{если } \varphi_\alpha(b, x)=p.$$

Здесь $b=\pi(p)$, а x^2 — скалярный квадрат вектора $x\in\mathbb{K}^n$ в стандартной метрике на $\mathbb{K}^n$.

Легко видеть, что функция Q непрерывна и на каждом слое $\mathcal{F}_b$, $b\in\mathcal{B}$, ее ограничение является — в силу утверждения задачи 10 — положительно определенным квадратичным функционалом. Следовательно, согласно лемме 1 эта функция задает на ξ некоторую метрику. $\square$

Следствие. *Любое векторное расслоение над паракомпактным пространством $\mathcal{B}$ метризуемо.* $\square$