Лекция 8

Квазикомплексные многообразия.— Многообразие кососимметрических ортогональных матриц.— Условие квазикомплексифицируемости. — Квазикомплексифицируемые сферы.— Алгебра октав.— Квазикомплексифицируемость сферы $\mathbb{S}^6$.— Квазикомплексифицируемые многообразия размерности 6.— Параллелизуемость квазигрупп.— Вещественные алгебры с делением.

Расслоения типа $\mathcal{G}$ для подгруппы $\mathcal{G}$ группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, $n=2m$, из примера 10 лекции 7 — это в точности вещественные расслоения, являющиеся овеществлениями комплексных расслоений.

Определение 1. Гладкое n-мерное ($n=2m$) многообразие $\mathscr{X}$ называется *квазикомплексифицируемым*, если его касательное расслоение $\tau_{\mathscr{X}}$ редуцируется к группе $\mathcal{G}$ из примера 10 лекции 7, т. е. если над $\mathscr{X}$ существует такое комплексное расслоение τ ранга m, что

$$\tau_{\mathscr{X}} = \tau^{\mathbb{R}}.$$

Каждое такое расслоение τ называется *квазикомплексной структурой* на $\mathscr{X}$, а многообразие $\mathscr{X}$ с заданным на нем квазикомплексной структурой τ называется *квазикомплексным многообразием.*

Конечно, *каждое квазикомплексифицируемое многообразие ориентируемо* (см. задачу 15 лекции 7).

Очевидным примером квазикомплексного многообразия является (см. лекцию III.11) овеществление $\mathscr{Z}^{\mathbb{R}}$ произвольного комплексно-аналитического многообразия $\mathscr{Z}$ (если $\mathscr{X}=\mathscr{Z}^{\mathbb{R}}$, то $\tau_{\mathscr{X}}=\tau_{\mathscr{Z}}^{\mathbb{R}}$). Поэтому квазикомплексифицируемость многообразия $\mathscr{X}$ представляет собой необходимое (но, вообще говоря, недостаточное!) условие его *комплексифицируемости,* т. е. существования такого комплексно-аналитического многообразия $\mathscr{Z}$, что $\mathscr{Z}^{\mathbb{R}}=\mathscr{X}$.

Как мы знаем (см. лекцию 6), квазикомплексные структуры на многообразии $\mathscr{X}$ находятся в естественном биективном соответствии с автоморфизмами

$$I\colon \tau_{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}, \tag{1}$$

удовлетворяющими соотношению $I^2=-\mathrm{id}$.

На этом основании автоморфизмы (1), удовлетворяющие соотношению $I^2=-\mathrm{id}$, или — что равносильно — гладкие поля $p \mapsto I_p$, $p \in \mathscr{X}$, операторов I_p: $\mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_p\mathscr{X}$, удовлетворяющих соотношению $I_p^2 = -\mathrm{id}$, также называются *квазикомплексными структурами* на $\mathscr{X}$.

Согласно следствию из предложения 3 лекции 7, если квазикомплексное многообразие $\mathscr{X}$ паракомпактно, то расслоение τ обладает эрмитовой метрикой. Вещественная часть этой метрики будет евклидовой метрикой на $\tau_{\mathscr{X}}$, а мнимая часть — симплектической (ср. лекцию II.25). Поэтому *гладкое паракомпактное многообразие тогда и только тогда квазикомплексифицируемо, когда расслоение $\tau_{\mathscr{X}}$ редуцируется к подгруппе* $\mathrm{Sp}(m) = \mathrm{SO}(2m) \cap \mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$ *группы* $\mathrm{SO}(n)$, $n = 2m$ (являющейся образом группы $\mathrm{U}(m)$ при вложении $\mathrm{GL}(m; \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$). Следовательно (см. в лекции 8 предложение 2 и утверждения задач 10 и 11), вопрос о квазикомплексифицируемости паракомпактного многообразия $\mathscr{X}$ сводится к вопросу о существовании сечения у расслоения со слоем $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$, ассоциированного с векторным расслоением $\tau_{\mathscr{X}}$. Изучим поэтому подробнее факторпространство $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$.

Задача 1. Покажите, что пространство $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$ обладает структурой гладкого многообразия, по отношению к которой каноническое отображение π: $\mathrm{SO}(2m) \to \mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$ является субмерсией (и, значит, смежные классы группы $\mathrm{SO}(2m)$ по подгруппе $\mathrm{Sp}(m)$ — вложенными подмногообразиями). [Указание. В окрестности единицы группы $\mathrm{SO}(2m)$ существует подмногообразие, трансверсальное к $\mathrm{Sp}(m)$, на котором отображение π является гомеоморфизмом на открытое подмножество пространства $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$. Ср. задачу 20 лекции 13.]

Пусть W_m — подмножество группы $\mathrm{SO}(2m)$, состоящее из кососимметрических матриц. Поскольку — см. лекцию II.10 — определитель любой кососимметрической матрицы неотрицателен, *матрица A порядка $2m$ тогда и только тогда принадлежит W_m, когда эта матрица ортогональна и кососимметрична.*

Задача 2. Покажите, что W_m *является связным гладким многообразием размерности* $m^2 - m$.

Задача 3. Рассмотрите следующие три условия на матрицу A:

а. Матрица A кососимметрична.

б. Матрица A ортогональна.

в. Матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 = -E. \tag{2}$$

Докажите, что любые два из этих условий влекут за собой третье.

Таким образом, в частности, *любая матрица* $A \in W_m$ *обладает свойством* (2).

Для каждой матрицы $A \in SO(2m)$ матрица $AJA^\top$, где

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix},$$

ортогональна и кососимметрична. Поэтому формула

$$\varphi(A) = AJA^\top$$

определяет некоторое — очевидно, гладкое — отображение

$$\varphi\colon SO(2m) \to W_m. \tag{3}$$

По определению (см. лекцию III.11) матрица $A \in SO(2m)$ тогда и только тогда принадлежит подгруппе $Sp(m)$, когда $A^\top JA = J$, т. е., поскольку

$$AJA^\top = -((A^{-1})^\top JA^{-1})^{-1},$$

когда $\varphi(A) = J$. Так как

$$\varphi(AB) = A\varphi(B)A^\top \tag{4}$$

для любых матриц A, $B \in SO(2m)$, отсюда непосредственно вытекает, что $\varphi(A) = \varphi(B)$ тогда и только тогда, когда $A^{-1}B \in Sp(m)$. Следовательно, формула

$$\bar{\varphi}[A] = \varphi(A),$$
$$A \in SO(2m), \quad [A] = A\,Sp(m) \in SO(2m)/Sp(m),$$

корректно определяет некоторое — также гладкое! — отображение

$$\bar{\varphi}\colon SO(2m)/Sp(m) \to W_m.$$

Это отображение инъективно, а так как многообразие $SO(2m)/Sp(m)$ компактно, то и монеоморфно (является гомеоморфизмом на свой образ).

Задача 4. Покажите, что касательное пространство $\mathbf{T}_E SO(n)$ группы $SO(n)$ в точке E (касательное пространство $\mathbf{T}_E Sp(m)$ группы $Sp(m)$) естественным образом отождествляется с линеалом $\mathfrak{so}(n)$ (линеалом $\mathfrak{sp}(m)$), состоящим из всех кососимметрических матриц порядка n (из всех кососимметрических матриц порядка $2m$, перестановочных с матрицей J), т. е. с алгеброй Ли этой группы в смысле лекции III.11. [Указание. Каждая матрица из некоторой окрестности точки E в группе $\mathrm{SO}(n)$ имеет вид e^{tA}, где $A \in \mathfrak{so}(n)$, причем $e^{tA} \in \mathrm{Sp}(m)$, $n=2m$, тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{sp}(m)$.]

Аналогичным образом касательное пространство $\mathrm{T}_J W_m$ многообразия W_m в точке J отождествляется с подпространством пространства $\mathfrak{so}(n)$, состоящим из кососимметрических матриц A, для которых $AJ+JA=0$.

Поэтому дифференциал $(d\varphi)_E$ отображения φ в точке E мы можем считать отображением

$$(d\varphi)_E\colon \mathfrak{so}(n) \to \mathrm{T}_J W_m \subset \mathfrak{so}(n).$$

Поскольку для любой матрицы $A \in \mathfrak{so}(n)$ имеет место равенство

$$\frac{e^{tA}J\,(e^{tA})^{\mathsf T}-J}{t}=\frac{(E+t\,(A+\ldots))\,J\,(E+t\,(A^{\mathsf T}+\ldots))-J}{t}=$$
$$=AJ-JA+\ldots,$$

где многоточия обозначают члены порядка $\geqslant 1$ по t (напомним, что $A^{\mathsf T}=-A$), отображение $(d\varphi)_E$ действует по формуле

$$(d\varphi)_E A = AJ-JA.$$

Следовательно, его ядром является подпространство $\mathfrak{sp}(m)$, откуда непосредственно вытекает, что отображение $\bar\varphi$ представляет собой погружение (в точке $[E]$, а потому — как непосредственно вытекает из формулы (4) — и в любой точке из $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$). Значит, его образ $\bar\varphi(\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m))$ представляет собой компактное (и, следовательно, замкнутое) подмногообразие многообразия W_m. При этом размерность этого подмногообразия равна размерности m^2-m многообразия W_m (см. задачу 14).

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{Y}$ — замкнутое подмногообразие многообразия $\mathscr{X}$. Если $\dim\mathscr{Y}=\dim\mathscr{X}$ и многообразие $\mathscr{X}$ связно, то $\mathscr{Y}=\mathscr{X}$.*

Доказательство. Так как $\dim\mathscr{Y}=\dim\mathscr{X}$, то вложение $\iota\colon \mathscr{Y}\to\mathscr{X}$ является этальным отображением (локальным диффеоморфизмом). Поэтому для любой точки $p\in\mathscr{Y}$ существует в $\mathscr{Y}$ такая окрестность V, что ее образ $\iota(V)=V$ является в $\mathscr{X}$ окрестностью точки $\iota(p)=p$. Это означает, что $\mathscr{Y}$ открыто в $\mathscr{X}$. Так как $\mathscr{X}$ связно, а $\mathscr{Y}$ замкнуто, то это возможно только при $\mathscr{Y}=\mathscr{X}$. $\square$

В силу этой леммы подмногообразие $\overline{\varphi}(\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m))$ совпадает с многообразием W_m, т. е. *отображение $\overline{\varphi}$ является диффеоморфизмом.*

В дальнейшем мы будем отождествлять многообразия W_m и $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$ посредством диффеоморфизма $\overline{\varphi}$.

Заметим, что в силу этого отождествления левые сдвиги $[B]\mapsto[AB]$ пространства $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$ на элементы $A\in\mathrm{SO}(2m)$ переходят в сопряжения $C\mapsto ACA^{-1}$, $C\in W_m$.

Вернемся теперь к n-мерному ($n=2m$) многообразию $\mathscr{X}$. Предполагая, что многообразие $\mathscr{X}$ паракомпактно, введем на его касательном расслоении $\tau_{\mathscr{X}}$ произвольную евклидову метрику. Как мы знаем, это равносильно редукции расслоения $\tau_{\mathscr{X}}$ к группе $\mathrm{O}(n)$. Если многообразие $\mathscr{X}$ ориентируемо, то расслоение $\tau_{\mathscr{X}}$ можно редуцировать даже к группе $\mathrm{SO}(n)$. Пусть $\tau_{\mathscr{X}}$ — ассоциированное главное $\mathrm{SO}(n)$-расслоение.

Так как при $n=2m$ группа $\mathrm{SO}(n)$ действует слева на многообразии W_m, то определено расслоение $\tau_{\mathscr{X}}[W_m]$ с типичным слоем W_m.

С другой стороны, так как все касательные пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ ориентированы и евклидовы, то над многообразием $\mathscr{X}$ определено расслоение $\sigma_{\mathscr{X}}$, слоем которого над каждой точкой $p\in\mathscr{X}$ является пространство всех ортогональных и кососимметрических операторов $\mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, т. е. — ср. задачу 16 — всех унимодулярных и ортогональных операторов $I_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, для которых $I_p^2=-\mathrm{id}$ (ортогональных комплексных структур на $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$).

Задача 5. Покажите, что *расслоения $\tau_{\mathscr{X}}[W_m]$ и $\sigma_{\mathscr{X}}$ изоморфны.*

Поскольку сечения расслоения $\sigma_{\mathscr{X}}$ — это в точности поля $p\mapsto I_p$ ортогональных комплексных структур $I_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Ориентируемое $2m$-мерное паракомпактное многообразие $\mathscr{X}$ (для которого на расслоении $\tau_{\mathscr{X}}$ задана евклидова метрика) тогда и только тогда квазикомплексифицируемо, когда на нем существует поле $p\mapsto I_p$ ортогональных комплексных структур (ортогональных и кососимметрических операторов $I_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_p\mathscr{X}$) или, иначе говоря, комплексная структура*

$$I\colon \tau_{\mathscr{X}}\to\tau_{\mathscr{X}}, \tag{5}$$

являющаяся одновременно изометрией (в каждом слое расслоения $\tau_{\mathscr{X}}$). □

Замечание 1. На первый взгляд кажется, что это предложение может быть доказано значительно проще, поскольку если τ—квазикомплексная структура на $\mathscr{X}$, то соответствующий автоморфизм (2) будет, очевидно, изометрией относительно евклидовой метрики, отвечающей произвольной эрмитовой метрике на τ (см. выше). Однако суть дела здесь в том, что существует автоморфизм (2), являющийся изометрией относительно произвольной наперед заданной евклидовой метрики на $\tau_{\mathscr{X}}$, не получающейся, вообще говоря, ни из какой эрмитовой метрики на τ.

При $n=2$ группа $\mathrm{Sp}(1)$ совпадает, как легко видеть, с группой $\mathrm{SO}(2)$. Поэтому *двумерное паракомпактное многообразие (поверхность) тогда и только тогда квазикомплексифицируемо, когда оно ориентируемо.*

В своем месте мы покажем, что на самом деле любая ориентируемая поверхность даже комплексифицируема.

При $n>2$ ориентируемость квазикомплексифицируемости уже не обеспечивает. Например, для сфер $\mathbb{S}^n$, $n\geqslant 2$, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Среди всех сфер $\mathbb{S}^n$, $n\geqslant 2$, квазикомплексифицируемы лишь сферы $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^6$.*

Доказательство этой теоремы мы должны начать довольно издалека.

Координаты точек пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ нам будет теперь удобно нумеровать нижними индексами от 0 до n, а его координатные орты обозначать символами $e_0, \ldots, e_n$. Кроме того, пространство $\mathbb{R}^n$ мы будем отождествлять с подпространством пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящим из векторов $x=(x_0, \ldots, x_n)$ с $x_n=0$. В соответствии с этим столбцы и строки матриц из $\mathrm{SO}(n+1)$ мы будем нумеровать числами от 0 до n и каждую матрицу A из $\mathrm{SO}(n)$ будем отождествлять с матрицей

$$A\oplus\|1\|=\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

из $\mathrm{SO}(n+1)$.

Введем теперь в рассмотрение отображение

$$p\colon \mathrm{SO}(n+2)\to\mathbb{S}^{n+1}, \tag{6}$$

сопоставляющее каждой матрице $A\in\mathrm{SO}(n+2)$ ее последний столбец, т. е. точку Ae_{n+1} сферы $\mathbb{S}^{n+1}$. [Это отображение является не чем иным, как проекцией π главного $\mathscr{G}$-расслоения $(\Gamma, \pi, \Gamma/\mathscr{G})$ из примера 2 лекции 1 при $\Gamma = \mathrm{SO}(n+2)$ и $\mathscr{G} = \mathrm{SO}(n+1)$; по традиции π заменяется здесь на p.]

Предложение 2. *Если сфера $\mathbb{S}^n$, $n=2m$, квазикомплексифицируема, то расслоение p: $\mathrm{SO}(n+2) \to \mathbb{S}^{n+1}$ обладает сечением*

$$s\colon \mathbb{S}^{n+1} \to \mathrm{SO}(n+2). \tag{7}$$

Доказательство. Каждый вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n+1}$ единственным образом представляется в виде

$$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{y} + be_{n+1}, \tag{8}$$

где $a^2 + b^2 = 1$, $a \geqslant 0$ и $\boldsymbol{y} \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. С другой стороны, если сфера $\mathbb{S}^n$ квазикомплексифицируема, то согласно предложению 1 на ней существует поле $\boldsymbol{y} \mapsto I_y$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{S}^n$, ортогональных кососимметрических операторов $I_y\colon \mathbf{T}_y\mathbb{S}^n \to \mathbf{T}_y\mathbb{S}^n$ (относительно метрики в $\mathbf{T}_y\mathbb{S}^n$, индуцированной вложением $\mathbf{T}_y\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+2}$ ортогональное дополнение $(\mathbf{T}_y\mathbb{S}^n)^\perp$ подпространства $\mathbf{T}_y\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Ясно, что это дополнение порождается векторами $\boldsymbol{y}$ и e_{n+1}. Мы распространим I_y до оператора A_y: $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$, считая, что на $\mathbf{T}_y\mathbb{S}^n$ оператор A_y совпадает с оператором I_y, а на $(\mathbf{T}_y\mathbb{S}^n)^\perp$ действует по формуле

$$A_y(-\alpha\boldsymbol{y} + \beta e_{n+1}) = \beta\boldsymbol{y} - \alpha e_{n+1}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что каждый оператор A_y кососимметричен и ортогонален.

Отождествив оператор A_y с его матрицей, мы для любого вектора (8) положим

$$s(\boldsymbol{x}) = aA_y + bE,$$

где E — единичная матрица порядка $n=2$. Так как

$$\begin{aligned} s(\boldsymbol{x})^\top s(\boldsymbol{x}) &= (aA_y^\top + bE)(aA_y + bE) = \\ &= a^2A_y^\top A_y + ab(A_y^\top + A_y) + b^2E = \\ &= (a^2 + b^2)E = E, \end{aligned}$$

то матрица $s(\boldsymbol{x})$ ортогональна, и значит отображение s: $\boldsymbol{x} \mapsto s(\boldsymbol{x})$ представляет собой отображение s: $\mathbb{S}^{n+1} \to \mathrm{SO}(n+2)$. Кроме того, так как

$$(p \circ s)(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{x})e_{n+1} = aA_ye_{n+1} + be_{n+1} = a\boldsymbol{y} + be_{n+1} = \boldsymbol{x},$$

то отображение s является сечением отображения p. □

Предложение 2 известно как теорема Кирхгофа.

Преимущество перехода от расслоения $\tau_{\mathbb{S}^n}(W_m)$ к расслоению $(\mathrm{SO}(n+2), p, \mathbb{S}^{n+1})$ состоит в том, что, поскольку последнее расслоение главное, существование сечения (7) равносильно тривиальности этого расслоения (см. лекцию 1).

Задача 6. Докажите, что *с расслоением* $(\mathrm{SO}(n+2), p, \mathbb{S}^{n+1})$ *ассоциировано касательное расслоение* $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$ *сферы* $\mathbb{S}^{n+1}$ (т. е. в введенных в лекции 7 обозначениях это расслоение является главным расслоением $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$). [Указание. Для любой точки $x \in \mathbb{S}^{n+1}$ и любого ортонормированного базиса $a_0, \ldots, a_n$ пространства $\mathrm{T}_x\mathbb{S}^{n+1}$ семейство $(a_0, \ldots, a_n, x)$ является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^{n+2}$ и любой ортонормированный базис последнего пространства может быть так получен.]

Отсюда следует, что условие существования сечения (7) равносильно тривиальности расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$, т. е. параллелизуемости сферы $\mathbb{S}^{n+1}$. Таким образом, *если сфера* $\mathbb{S}^n$ *квазикомплексифицируема, то сфера* $\mathbb{S}^{n+1}$ *параллелизуема.*

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что

А. *Сферы* $\mathbb{S}^2$ *и* $\mathbb{S}^6$ *квазикомплексифицируемы.*

Б. *Если* $n \neq 1, 3, 7$, *то сфера* $\mathbb{S}^n$ *непараллелизуема.*

[Окружность $\mathbb{S}^1$ параллелизуема очевидным образом, а параллелизуемость сфер $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^7$ вытекает в силу теоремы Кирхгофа из квазикомплексифицируемости сфер $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^6$. Параллелизуемость сфер $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^7$ легко, впрочем, доказывается и непосредственно (см. ниже). Заметим, что, таким образом, *сфера* $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 2$, *квазикомплексифицируема тогда и только тогда, когда параллелизуема сфера* $\mathbb{S}^{n+1}$. Прямого доказательства этого утверждения, по-видимому, не существует.]

Доказательство утверждения **Б** требует топологических конструкций, по существу выходящих за рамки нашего изложения. Мы обсудим их в лекциях 24—27, а пока займемся утверждением А.

В отношении сферы $\mathbb{S}^2$ никакой проблемы нет: мы знаем, что эта сфера диффеоморфна комплексной проективной прямой (сфере Римана) и потому является не только квазикомплексным, но даже и комплексным многообразием. Для построения же квазикомплексной структуры на сфере $\mathbb{S}^6$ нам понадобятся некоторые сведения из алгебры, имеющие и самостоятельный интерес.

Пусть $\mathbb{C}a$ — пространство $\mathbb{H}^2$ пар (ξ, η) кватернионов (являющееся естественным образом линеалом над $\mathbb{R}$), в которое введено умножение по формуле

$$(\xi, \eta)(x, y) = (\xi x - \bar{y}\eta, \eta\bar{x} + y\xi), \quad \xi, \eta, x, y \in \mathbb{H}. \tag{9}$$

[Это в точности тот же прием, по которому комплексные числа строятся из вещественных, а кватернионы — из комплексных чисел.]

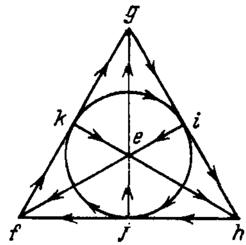
Задача 7. Проверьте, что относительно умножения (9) линеал $\mathbb{C}a$ является (неассоциативной!) алгеброй над полем $\mathbb{R}$ с единицей $(1, 0)$.

Элементы алгебры $\mathbb{C}a$ называются *октавами* или *числами Кэли*. Октавы вида $(\xi, 0)$ отождествляются с кватернионами ξ, что вкладывает $\mathbb{H}$ в $\mathbb{C}a$ в качестве подалгебры. Любая октава (ξ, η) равна $\xi + \eta e$, где $e = (0, 1)$ и *октавные единицы*

$$i, j, k, e, f = ie, \quad g = je, \quad h = ke \tag{10}$$

вместе с единицей 1 образуют базис алгебры $\mathbb{C}a$.

Попарные произведения октавных единиц схематически изображаются диаграммой



Произведение любых двух единиц (10) равняется с точностью до знака единице, расположенной на той же прямой (или окружности), а знак определяется направлением стрелок. Например, $eh = k$ и $fj = -h$.

Квадрат каждой единицы (10) равен -1.

Вещественная часть $\operatorname{Re}\xi$ кватерниона ξ называется *вещественной частью* октавы $u = \xi + \eta e$ и обозначается символом $\operatorname{Re} u$ (употребляется также символ $\operatorname{Sp} u$).

Октава $\bar{\xi} - \eta e$ называется *сопряженной* октаве $u = \xi + \eta e$ и обозначается символом $\bar{u}$. Из формулы (4) непосредственно следует, что число $u\bar{u}$ выражается формулой

$$u\bar{u} = \xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} = |\xi|^2 + |\eta|^2 \tag{11}$$

и, следовательно, вещественно, неотрицательно и равно нулю тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{u}=0$. Арифметический квадратный корень из числа $\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}$ обозначается символом $|\boldsymbol{u}|$ и называется *нормой* (или *модулем*) октавы $\boldsymbol{u}$. Заметим, что $\bar{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}$.

Из формулы (11) следует, что при $\boldsymbol{u}\neq 0$ октава $\boldsymbol{u}^{-1}=\bar{\boldsymbol{u}}/|\boldsymbol{u}|^2$ удовлетворяет соотношению $\boldsymbol{u}^{-1}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-1}=1$. Таким образом, *в алгебре* $\mathbb{C}a$ *любой отличный от нуля элемент* $\boldsymbol{u}$ *обратим.*

Далее, легко видеть, что для любых октав $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ имеет место равенство

$$|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}| \tag{12}$$

(*в алгебре* $\mathbb{C}a$ *норма мультипликативна*). Действительно, если $\boldsymbol{u}=\xi+\eta e$ и $\boldsymbol{v}=x+ye$, то

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}|^2&=|\xi x-\bar{y}\eta|^2+|\eta\bar{x}+y\xi|^2=\\&=(\xi x-\bar{y}\eta)(\bar{x}\bar{\xi}-\bar{\eta}y)+(\eta\bar{x}+y\xi)(x\bar{\eta}+\bar{\xi}\bar{y})\end{aligned}$$

и

$$|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2=(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})(x\bar{x}+y\bar{y}).$$

Поэтому, если $y=\lambda+y'$, где $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\bar{y}'=-y'$, то

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2&=\\&=-(\xi x)(\bar{\eta}y)-(\bar{y}\eta)(\bar{x}\bar{\xi})+(\eta\bar{x})(\bar{\xi}\bar{y})+(y\xi)(x\bar{\eta})=\\&=\lambda(-\xi x\bar{\eta}-\eta\bar{x}\bar{\xi}+\eta\bar{x}\bar{\xi}+\xi x\bar{\eta})-\\&\quad-(\xi x\bar{\eta}+\eta\bar{x}\bar{\xi})y'+y'(\eta\bar{x}\bar{\xi}+\xi x\bar{\eta})=0,\end{aligned}$$

ибо кватернион $\xi x\bar{\eta}+\eta\bar{x}\bar{\xi}$ вещественен и, значит, перестановочен с кватернионом y'. $\square$

Из формулы (12) непосредственно следует, что *алгебра* $\mathbb{C}a$ *не имеет делителей нуля* (т. е. $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\neq 0$ при $\boldsymbol{u}\neq 0$ и $\boldsymbol{v}\neq 0$).

При отождествлении $\mathbb{C}a$ с $\mathbb{R}^8$, определяемым базисом (10), норма в $\mathbb{C}a$ переходит в обычную евклидову норму в $\mathbb{R}^8$, октавы с нормой 1 отождествляются с точками сферы $\mathbb{S}^7$, а мнимые октавы (ортогональные 1) с нормой 1 отождествляются с точками ее экватора $\mathbb{S}^6$. Так как умножение справа на октаву $\boldsymbol{v}\in\mathbb{S}^7$ является ортогональным преобразованием $\mathbb{C}a\to\mathbb{C}a$ (оно линейно над $\mathbb{R}$ и в силу (12) сохраняет длины), то для любой октавы $\boldsymbol{u}\in\mathbb{S}^6$ октава $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ ортогональна октаве $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$. Это означает, что для любой точки $v\in\mathbb{S}^7$ (а потому и для любой точки $v\in\mathbb{C}a$) умножение L_u: $\mathbb{C}a\to\mathbb{C}a$ слева на u (также являющееся ортогональным преобразованием) удовлетворяет соотношению $(L_uv, v)=0$ и, значит, представляет собой кососимметрическое ортогональное преобразование $\mathbb{C}a\to\mathbb{C}a$. Вектор 1 это преобразование переводит в вектор u, а вектор u — в вектор $u^2=-1$. Поэтому оно индуцирует (также кососимметрическое и ортогональное) преобразование I_u касательного пространства $\mathbf{T}_u\mathbb{S}^6$ (являющегося ортогональным дополнением в $\mathbb{C}a$ к векторам 1 и u). Таким образом, мы построили на $\mathbb{S}^6$ поле $u\mapsto I_u$ кососимметрических ортогональных операторов, т. е. квазикомплексную структуру. Это доказывает утверждение **A**.

Аналогичная конструкция возможна, конечно (с заменой октав кватернионами), и для сферы $\mathbb{S}^2$.

Задача 8. Докажите, что получающаяся на $\mathbb{S}^2$ квазикомплексная структура совпадает с квазикомплексной структурой, возникающей из отождествления $\mathbb{S}^2=\mathbf{C}P^1$.

Вопрос о том, является ли сфера $\mathbb{S}^6$ комплексно-аналитическим многообразием, до сих пор открыт.

Сфера $\mathbb{S}^6$, конечно же, вложена в $\mathbb{R}^8$. Поэтому утверждение о ее квазикомплексифицируемости вытекает также из следующего общего предложения:

Предложение 3. *Любое ориентируемое шестимерное многообразие, вложимое в пространство* $\mathbb{R}^8$, *квазикомплексифицируемо.*

Для доказательства этого предложения нам понадобится более внимательно изучить подпространства алгебры $\mathbb{C}a$.

Для любого двумерного подпространства $\mathcal{P}\subset\mathbb{C}a$ мы введем в рассмотрение множество $Z(\mathcal{P})$ всех октав $u\in\mathbb{C}a$, для которых $\mathcal{P}u\subset\mathcal{P}$. Ясно, что $Z(\mathcal{P})$ *является линейным подпространством алгебры* $\mathbb{C}a$.

Так как для каждой октавы $u\in\mathbb{C}a$ с $|u|=1$ умножение R_u справа на u является ортогональным преобразованием $\mathbb{C}a\to\mathbb{C}a$ евклидова пространства $\mathbb{C}a$, то для любой октавы $u\in\mathbb{C}a$, $u\neq0$, умножение R_u на u будет гомотетией этого пространства. Следовательно, при $u\in Z(\mathcal{P})$ ограничение умножения R_u на $\mathcal{P}$ будет гомотетией двумерного евклидова пространства $\mathcal{P}$. Но, выбрав в $\mathcal{P}$ базис и тем самым отождествив $\mathcal{P}$ с $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$, мы можем каждую гомотетию $\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ реализовать как линейное преобразование вида $z\mapsto ae^{i\varphi}z$. Это задает некоторое—очевидно, линейное над $\mathbb{R}$ — отображение

$$(13)\qquad Z(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto ae^{i\varphi}$$

линеала $Z(\mathcal{P})$ в поле $\mathbb{C}$. Так как алгебра $\mathbb{C}a$ не имеет делителей нуля, то отображение (13) инъективно (является мономорфизмом).

Задача 9. Покажите, что для любых октав u, $v \in \mathbb{C}a$, $u \neq 0$,

1) имеет место равенство

$$u(u^{-1}v) = v;$$

2) существуют такие вещественные числа a и b, что

$$v(u^{-1}v) = au + bv.$$

$\left[\text{Указание. } a = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(\bar{u}v)}{u\bar{u}}, \quad b = -\dfrac{v\bar{v}}{u\bar{u}}.\right]$

Отсюда следует, что для любых октав u, $v \in \mathcal{P}$, $u \neq 0$, имеет место включение

$$(14)\qquad u^{-1}v \in Z(\mathcal{P}).$$

[Действительно, если октавы u и v линейно зависимы, то включение (14) очевидно, а если эти октавы линейно независимы (и, значит, порождают $\mathcal{P}$), то включение (14) имеет место тогда и только тогда, когда $u(u^{-1}v) \in \mathcal{P}$ и $v(u^{-1}v) \in \mathcal{P}$.]

Поэтому $\dim Z(\mathcal{P}) = 2$, и значит *отображение* (13) *является изоморфизмом*. При этом линеал $Z(\mathcal{P})$ порождается элементами 1 и $w = u^{-1}v$, где u, v — произвольный базис пространства $\mathcal{P}$.

Задача 10. Докажите, что для любой октавы $w \in \mathbb{C}a$ имеет место равенство

$$(15)\qquad w^2 - 2\,\mathrm{Re}\,w \cdot w + |w|^2 = 0.$$

[Указание. Аналог равенства (15) справедлив для комплексных чисел и для кватернионов.]

Из равенства (15) непосредственно следует, что *линеал* $Z(\mathcal{P})$ (*с базисом* 1, w) *является подалгеброй алгебры* $\mathbb{C}a$. [Заметим, что из-за неассоциативности умножения в $\mathbb{C}a$, из включений $\mathcal{P}u \subset \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}v \subset \mathcal{P}$ еще нельзя непосредственно заключить, что $\mathcal{P}(uv) \subset \mathcal{P}$.]

Лемма 1. *Для любых октав* u, $w \in \mathbb{C}a$ *имеет место равенство*

$$(uw)w = u(ww).$$

Доказательство. Пусть $u=\xi+\eta e$ и $w=x+ye$. Тогда

$$uw=(\xi x+\bar{y}\eta)+(\eta\bar{x}+y\xi)e,$$

$$(uw)w=(\xi x-\bar{y}\eta)x-\bar{y}(\eta\bar{x}+y\xi)+$$
$$+[(\eta\bar{x}+y\xi)\bar{x}+y(\xi x-\bar{y}\eta)]e,$$

$$ww=(x^2-\bar{y}y)+(y\bar{x}+yx)e,$$

$$u(ww)=\xi(x^2-\bar{y}y)-\overline{(y\bar{x}+yx)}\eta+$$
$$+[\eta\overline{(x^2-\bar{y}y)}+(y\bar{x}+yx)\xi]e,$$

а так как кватернионы $\bar{y}y$ и $x+\bar{x}$ вещественны и потому перестановочны с любым кватернионом, то

$$\xi(x^2-\bar{y}y)-\overline{(y\bar{x}+yx)}\eta=\xi x^2-\xi\bar{y}y-(x+\bar{x})\bar{y}\eta=$$
$$=\xi x^2-\bar{y}y\xi-\bar{y}\eta(x+\bar{x})=$$
$$=(\xi x-\bar{y}\eta)x-\bar{y}(\eta\bar{x}+y\xi),$$

$$\eta\overline{(x^2-\bar{y}y)}+(y\bar{x}+yx)\xi=\eta\bar{x}^2-\eta\bar{y}y+y(\bar{x}+x)\xi=$$
$$=\eta\bar{x}^2-\bar{y}y\eta+y\xi(\bar{x}+x)=$$
$$=(\eta\bar{x}+y\xi)\bar{x}+y(\xi x-\bar{y}\eta).$$

Следовательно, $(uw)w=u(ww)$. □

Задача 11. Выведите из леммы 1, что *отображение* (13) *является изоморфизмом алгебр.*

Заметим, что этот изоморфизм *зависит* от выбора в подпространстве $\mathcal{P}$ базиса u, v. Впрочем, эта зависимость довольно слабая, поскольку поле $\mathbb{C}$ имеет над $\mathbb{R}$ только два изоморфизма — тождественный и изоморфизм комплексного сопряжения $z\mapsto\bar{z}$, и значит, любые два изоморфизма $Z(\mathcal{P})\to\mathbb{C}$ либо совпадают, либо отличаются на комплексное сопряжение. При этом если два базиса пространства $\mathcal{P}$ непрерывно деформируемы друг в друга (определяют одну и ту же ориентацию этого пространства), то, конечно, должен иметь место первый случай. Следовательно, *для любого ориентированного двумерного подпространства* $\mathcal{P}\subset\mathbb{C}a$ *алгебра* $Z(\mathcal{P})$ *естественно (без какого-либо произвола) изоморфна полю* $\mathbb{C}$.

Непосредственное вычисление показывает, что скалярное произведение в $\mathbb{C}a$, отвечающее норме $|u|$, задается формулой

$$(x, u)=\operatorname{Re}(xu).$$

(Заметим, что по отношению к этому произведению базис (10) ортонормирован.) Поэтому произвольное шестимерное подпространство $Q \subset \mathbb{C}a$ можно задать линейными уравнениями вида

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{xu}) = 0,$$

где $\boldsymbol{u}$ пробегает двумерное подпространство $Q^{\perp}$.

Задача 12. Докажите, что

$$\mathrm{Re}((\boldsymbol{wx})\boldsymbol{u}) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{xu}))$$

для любых октав $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}a$.

Отсюда вытекает, что если $\boldsymbol{x} \in Q$ и $\boldsymbol{w} \in Z(Q^{\perp})$, то $\boldsymbol{wx} \in Q$ и, следовательно, что *подпространство Q является линеалом над полем $Z(\mathcal{P})$*. Поскольку ортогональное дополнение $Q^{\perp}$ ориентированного подпространства Q естественным образом ориентировано (мы считаем, что в $\mathbb{C}a$ введена ориентация, по отношению к которой базис (10) положителен) и, значит, поле $Z(Q^{\perp})$ может быть отождествлено с полем $\mathbb{C}$, этим доказано, что *каждое ориентированное шестимерное подпространство $Q \subset \mathbb{C}a$ обладает естественной комплексной структурой.*

Теперь мы уже можем доказать предложение 3.

Доказательство предложения 3. Не теряя общности, мы можем считать $\mathscr{X}$ ориентированным подмногообразием алгебры $\mathbb{C}a$ и, значит, каждое касательное пространство $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, $p \in \mathscr{X}$,— ориентированным подпространством этой алгебры. Но тогда, согласно только что доказанному утверждению, каждое пространство будет обладать естественной комплексной структурой. Поскольку эти структуры, очевидно, гладко зависят от p, это доказывает предложение 3. □

Множество $\mathscr{G}$ с умножением

$$\mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G} \tag{16}$$

называется *квазигруппой* (точнее, *правой квазигруппой*), если для любых двух элементов a, $b \in \mathscr{G}$ уравнение $ax = b$ однозначно разрешимо, т. е. если для любого элемента $a \in \mathscr{G}$ левый сдвиг

$$L_a x = ax, \qquad x \in \mathscr{G},$$

является биективным отображением $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$. Если $\mathscr{G}$ является топологическим пространством (гладким многообразием), умножение (16) непрерывно (гладко) и все отображения L_a: $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$, $a \in \mathscr{G}$, представляют собой гомеоморфизмы (диффеоморфизмы), то квазигруппа $\mathscr{G}$ называется *топологической квазигруппой* (соответственно *гладкой квазигруппой* или *квазигруппой Ли*).

Выбрав и зафиксировав в $\mathscr{G}$ элемент e, мы для каждого элемента $a \in \mathscr{G}$ обозначим через a' такой элемент из $\mathscr{G}$, что $L_{a'}e = a$. Если квазигруппа $\mathscr{G}$ гладкая, то для отображения $L_{a'}$ будет определен его дифференциал $(dL_{a'})_e$ в точке e, являющийся невырожденным линейным отображением

$$\mathbf{T}_e\mathscr{G} \to \mathbf{T}_a\mathscr{G}.$$

Поэтому для любого—раз и навсегда выбранного—базиса пространства $\mathbf{T}_e\mathscr{G}$ его образ при отображении $(dL_{a'})_e$ будет базисом пространства $\mathbf{T}_a\mathscr{G}$. Тем самым, для любой точки $a \in \mathscr{G}$ в пространстве $\mathbf{T}_a\mathscr{G}$ будет определен некоторый базис, гладко зависящий от точки a, т. е. будет построена некоторая тривиализация расслоения $\tau\mathscr{G}$. Это доказывает, что *каждая гладкая квазигруппа является параллелизуемым многообразием.*

Гладкими квазигруппами являются, в частности, сферы $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^7$ (соответственно по отношению к умножению комплексных чисел, кватернионов и октав; при этом квазигруппы $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^3$ являются, конечно, группами). Поэтому *сферы* $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ *и* $\mathbb{S}^7$ *параллелизуемы* (факт, впрочем, нам уже известный; см. выше).

Посмотрим, нельзя ли конструкцию умножения на сферах $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^7$ обобщить на сферы других размерностей.

Алгебра $\mathscr{A}$ над полем $\mathbb{K}$ называется *алгеброй с делением*, если для любых элементов $a, b \in \mathscr{A}^*$, где $\mathscr{A}^* = \mathscr{A} \setminus \{0\}$. уравнение $ax = b$ однозначно разрешимо, т. е. если относительно имеющегося в $\mathscr{A}^*$ умножения множество A^* является квазигруппой.

Задача 13. Докажите, что если алгебра $\mathscr{A}$ конечномерна, то в $\mathscr{A}^*$ уравнение $ax = b$ однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда однозначно разрешимо уравнение $xa = b$. [Указание. Оба условия на алгебру $\mathscr{A}$ равносильны тому, что $\mathscr{A}$ является алгеброй без делителей нуля, т. е. тому, что $ab \neq 0$ при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.]

Две алгебры $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ называются *изотопными*, если существуют такие биективные линейные отображения A,

B, C: $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, что

$$C(xy) = Ax \cdot By$$

для любых элементов x, $y \in \mathcal{A}_1$.

Ясно, что любая алгебра, изотопная алгебре с делением, также является алгеброй с делением.

Задача 14. Покажите, что *любая алгебра с делением $\mathcal{A}$ изотопна алгебре с делением, имеющей единицу.* [Указание. Произвольно выбрав отличный от нуля элемент $e \in \mathcal{A}$, примите за A и B отображения $x \mapsto ex$ и $x \mapsto xe$.]

Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$ и пусть $n+1$ — ее размерность. Произвольным образом введя в алгебру $\mathcal{A}$ евклидову метрику, обозначим через $\mathbb{S}^n$ множество всех ее элементов нормы 1, а через φ — отображение $A^* \to \mathbb{S}^n$, определенное формулой

$$\varphi(a) = \frac{a}{|a|}, \qquad a \in \mathcal{A}^*,$$

где $|a|$ — норма элемента a. Если a, $b \in \mathbb{S}^n$, то $ab \in A^*$, потому определен элемент $\varphi(ab) \in \mathbb{S}^n$. Мы введем в $\mathbb{S}^n$ умножение $*$, положив для любых элементов a, $b \in \mathbb{S}^n$

$$a * b = \varphi(ab).$$

По условию для любых элементов a, $b \in \mathbb{S}^n$ в $\mathcal{A}^*$ существует такой элемент y, что $ay = b$. Пусть $x = \varphi(y)$. Тогда

$$ax = a \cdot \frac{y}{|y|} = \frac{1}{|y|} ay = \frac{b}{|x|}$$

и, значит, $\varphi(ax) = b$, т. е. $a * x = b$. Следовательно, по отношению к умножению $*$ сфера $\mathbb{S}^n$ является квазигруппой и потому параллелизуема.

Таким образом, конструкция умножения на сферах $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ действительно допускает обобщение. Однако она дает не новые параллелизуемые сферы, а в силу утверждения Б — у нас пока не доказанного! — показывает, что *алгебры с делением над полем $\mathbb{R}$ могут существовать лишь в размерностях* 1, 2, 4 и 8. [Примеры алгебр $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{C}a$ показывают, что в этих размерностях алгебры с делением действительно существуют. Конечно, в этих размерностях существуют и другие алгебры с делением — например, алгебры, изотопные алгебрам $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{C}a$.]

Было бы интересно доказать отсутствие над полем $\mathbb{R}$ алгебр с делением размерностей $n \neq 1, 2, 4, 8$ чисто алгебраически (с использованием лишь простейших топологических свойств поля $\mathbb{R}$.) Несмотря на длительные усилия многих математиков, это пока удалось сделать лишь при тех или иных дополнительных ограничениях на алгебру $\mathcal{A}$ (например, в предположении, что эта алгебра является так называемой *алгеброй с ассоциативными степенями*).

Мы вернемся к обсуждению этих вопросов в лекции 24.