Лекция 9

Геометрии Клейна.—Расслоения типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$.—Сравнение $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоений с расслоениями $\xi[\mathcal{F}]$.—Редукция $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоений.—Редукция главных расслоений.—Двулистное накрытие неориентируемого многообразия.

В этой лекции мы рассмотрим понятие редуцированности для произвольных локально тривиальных расслоений со структурной группой. Для этого нам будет удобно заново определить эти расслоения без апелляции к главным расслоениям. Поэтому в материале лекции 1 мы пока нуждаться не будем.

В первую очередь нам нужно перенести на общий случай понятие линейного $\mathcal{G}$-пространства.

Пусть группа $\mathcal{G}$ действует слева на множестве $\mathcal{F}$.

Определение 1. Множество $\mathcal{X}$ называется *пространством типа* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, если задано такое множество $\operatorname{Coor}\mathcal{X}$ биективных отображений

$$p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{F},$$

что

а) если $p \in \operatorname{Coor}\mathcal{X}$, то $L_a \circ p \in \operatorname{Coor}\mathcal{X}$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$;

б) если $p, q \in \operatorname{Coor}\mathcal{X}$, то существует такой элемент $a \in \mathcal{G}$, что $q = L_a \circ p$.

Если группа $\mathcal{G}$ действует на множестве $\mathcal{F}$ эффективно, т. е.— см. лекцию 1—если $L_a = \mathrm{id}$ только при $a = e$, то элемент a единственен.

Пространства типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ называются также $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*пространствами*. Если множество $\mathcal{X}$ является $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-пространством, то говорят, что в нем определена $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*структура* или что оно несет $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*геометрию*.

Пример 1. Так как для любого линейного пространства $\mathcal{V}$ линейные изоморфизмы $\mathcal{V} \to \mathbb{K}^n$ находятся в естественном биективном соответствии с базисами в $\mathcal{V}$, то для каждой подгруппы $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ линейные $\mathcal{G}$-пространства—это в точности пространства типа $(\mathcal{G}, \mathbb{K}^n)$.

В частности, пространства типа $(\mathrm{GL}(n; \mathbb{K}), \mathbb{K}^n)$—это n-мерные линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Пример 2. Аналогично, если $\mathrm{Aff}(n; \mathbb{K})$—группа всех аффинных (неоднородных линейных) преобразований пространства $\mathbb{K}^n$, то $(\mathrm{Aff}(n; \mathbb{K}), \mathbb{K}^n)$-пространства—это в точности n-мерные аффинные пространства над полем $\mathbb{K}^n$.

Пример 3. Пространства типа $(\mathrm{Proj}(n; \mathbb{K}), \mathbb{K}P^n)$, где $\mathrm{Proj}(n; \mathbb{K})$ — группа всех проективных преобразований $\mathbb{K}P^n \to \mathbb{K}P^n$, — это n-мерные проективные пространства над полем $\mathbb{K}^n$.

Эти три примера мы уже подробно рассматривали в лекции I.30. В каждом из них отображения из $\mathrm{Coor}\,\mathscr{X}$ — это в точности координатные изоморфизмы. На этом основании и в общем случае произвольного $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-пространства $\mathscr{X}$ отображения из $\mathrm{Coor}\,\mathscr{X}$ называются *координатными изоморфизмами*.

Пример 4. Само пространство $\mathscr{F}$ будет пространством типа $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$, если мы примем за $\mathrm{Coor}\,\mathscr{F}$ множество всех отображений $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ вида L_a, $a \in \mathscr{G}$.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два пространства типа $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$. Биективное отображение

$$f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$$

называется $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-*изоморфизмом* (или просто *изоморфизмом*), если его можно включить в коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{X} & \xrightarrow{f} & \mathscr{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathscr{F} & \xrightarrow{L_a} & \mathscr{F}, \end{array} \tag{1}$$

где $p \in \mathrm{Coor}\,\mathscr{X}$, $q \in \mathrm{Coor}\,\mathscr{Y}$ и $a \in \mathscr{G}$. Если $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ эффективно, то при данных p и q элемент a определяется единственным образом.

Задача 1. Покажите, что в диаграмме (1) координатные изоморфизмы p и q можно задать произвольно: если для данного отображения f элемент $a \in \mathscr{G}$ существует при одном выборе этих изоморфизмов, то он существует и при любом другом их выборе (но, конечно, будет другим).

Изоморфизмы $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-пространства $\mathscr{X}$ на себя называются его *автоморфизмами*. Они составляют группу $\mathrm{Aut}\,\mathscr{X}$. В случае, когда группа $\mathscr{G}$ эффективно действует на $\mathscr{F}$, эта группа изоморфна группе $\mathscr{G}$.

Замечание 1. Идея характеризовать геометрию группой ее автоморфизмов принадлежит Клейну. (Она была высказана им в так называемой «Эрлангенской программе».) На этом основании $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-геометрии называются также *геометриями Клейна*.

Если $\mathscr{F}$ является топологическим пространством (гладким многообразием), а $\mathscr{G}$ — топологической (гладкой) группой, непрерывно (гладко) действующей на $\mathscr{F}$, то мы можем ввести в каждое $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-пространство $\mathcal{X}$ топологию (гладкость), перенеся ее в $\mathcal{X}$ посредством произвольного координатного изоморфизма $p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{F}$. (Очевидно, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора p.)

Именно этим способом мы и вводили гладкость в вещественные линейные и аффинные пространства; см. лекцию III.11.

Вернемся теперь к расслоениям.

Пусть $\mathcal{G}$ — топологическая группа, непрерывно действующая на топологическом пространстве $\mathcal{F}$.

Определение 2. (Ср. с определением 3 лекции 7.) Расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ называется *расслоением типа* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, если

а) слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ над любой точкой $b \in \mathcal{B}$ является пространством типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$;

б) существуют такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ и такие послойные гомеоморфизмы

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times \mathcal{F} \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha \arrow[dl, "\pi|U_\alpha"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

что для каждой точки $b \in U_\alpha$ отображение

$$\varphi_{\alpha, b}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}_b, \quad x \mapsto \varphi_\alpha(b, x), \qquad x \in \mathcal{F}, \tag{2}$$

является $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-изоморфизмом (т. е. — что равносильно — если обратное отображение $\varphi_{\alpha, b}^{-1}\colon \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}$ является координатным изоморфизмом из $\operatorname{Coor} \mathcal{F}_b$).

Расслоения типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ называются также $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*расслоениями*.

Гомеоморфизм φ_α называется *тривиализацией* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоения ξ *над* U_α. Иногда *тривиализацией* называется пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Множества U_α называются *тривиализирующими окрестностями*, а семейство $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ тривиализаций $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — *тривиализирующим атласом* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоения ξ.

Векторные $\mathcal{G}$-расслоения являются частным случаем $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоений, получающимся при $\mathcal{F} = \mathbb{K}^n$ и $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$.

Другие частные случаи — у нас еще не встречавшиеся — это *аффинные и проективные расслоения*. Для аффинных расслоений $\mathcal{F} = \mathbb{K}^n$ и $\mathcal{G} = \mathrm{Aff}(n; \mathbb{K})$, а для проективных — $\mathcal{F} = \mathbb{K}P^n$ и $\mathcal{G} = \mathrm{Proj}(n; \mathbb{K})$.

Задача 2. Докажите, что *для любого $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоения проекция $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ является открытым отображением.*

Пусть $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ и $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B})$ — два $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоения над пространством $\mathscr{B}$.

Определение 3. Послойный гомеоморфизм

$$f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$$

над $\mathscr{B}$ называется $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*изоморфизмом*, если для любой точки $b \in \mathscr{B}$ индуцированное им отображение

$$f_b\colon \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}'_b$$

слоев является $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-изоморфизмом $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-пространств.

Замечание 2. Мы вынуждены ограничиться здесь (в отличие от специального случая векторных расслоений; см. определение 2 лекции 6) лишь изоморфизмами потому, что общее понятие морфизма $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-пространств у нас не определено.

Задача 3. Дайте — по возможности наиболее общее — определение морфизмов аффинных и проективных расслоений.

Если тривиализации $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) из тривиализирующего атласа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-расслоения $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ обладают тем свойством, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, то для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ определен $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-автоморфизм

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \varphi_{\beta,b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,b}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

пространства $\mathcal{F}$. Если действие группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{F}$ эффективно, то этот автоморфизм единственным образом представляется в виде L_a, где $a \in \mathcal{G}$. Мы будем отождествлять a с $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ и тем самым считать $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ элементом группы $\mathcal{G}$. В силу этого соглашения формула

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon b \mapsto \varphi_{\beta\alpha}(b), \qquad b \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

будет задавать некоторое отображение

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathcal{G}.$$

Для любого топологического пространства U и любого непрерывного отображения $\varphi\colon U \to \mathcal{G}$ отображение

$$\hat{\varphi}\colon U \times \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

определенное формулой

$$\hat{\varphi}(b, x) = \varphi(b)x, \qquad b \in U,\ x \in \mathcal{F},$$

очевидным образом непрерывно (оно является композицией непрерывного отображения

$$\varphi \times \mathrm{id}\colon U \times \mathscr{F} \to \mathscr{G} \times \mathscr{F}, \ (b, x) \mapsto (\varphi(b), x),$$

и действия $\mathscr{G} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$).

Определение 4. Действие группы $\mathscr{G}$ на пространстве $\mathscr{F}$ (а также само $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$) называется *топологически эффективным*, если отображение вида $\varphi\colon U \to \mathscr{G}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $\hat{\varphi}\colon U \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$.

Задача 4. Докажите, что *любое топологически эффективное действие непрерывно и эффективно.*

Пример 5. Согласно лемме 1 лекции 6 действие группы $GL(n; \mathbb{K})$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ топологически эффективно.

Задача 5. Покажите, что действия группы $\mathrm{Aff}(n; \mathbb{K})$ на $\mathbb{K}^n$ и группы $\mathrm{Proj}(n; \mathbb{K})$ на $\mathbb{K}P^n$ топологически эффективны.

При $U = U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$ отображение $\hat{\varphi}$ является не чем иным, как композицией $\mathrm{pr} \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ гомеоморфизма $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\colon U \times \mathscr{F} \to U \times \mathscr{F}$ и проекции $U \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ и потому непрерывно. Следовательно, *если $\mathscr{G}$ действует на $\mathscr{F}$ топологически эффективно, то отображение $\varphi_{\beta\alpha}$ непрерывно.*

Задача 6. Покажите, что

а. *Отображения $\varphi_{\beta\alpha}$ составляют коцикл φ тривиализирующего покрытия $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}\}$ над группой $\mathscr{G}$* (см. определение 3 лекции 6).

б. *Класс когомологий $[\varphi] \in H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ этого коцикла не зависит от выбора тривиализаций φ_α.*

в. *Формула $\xi \Leftrightarrow [\varphi]$ устанавливает биективное соответствие между множеством классов изоморфных $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоений над $\mathscr{B}$ с данным тривиализирующим покрытием $\mathfrak{U}$ и множеством $H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$.* (Ср. теорему 1 лекции 6.)

Заметим, что построение $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоения ξ по коциклу $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ может быть осуществлено даже для неэффективных $\mathscr{G}$-пространств $\mathscr{F}$. Однако в этом случае некогомологичные коциклы могут давать изоморфные расслоения (и, конечно, не любое $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоение будет задаваться коциклом).

Сравнение задачи 6 с замечанием 2 лекции 6—а также пример 3 лекции 6—подсказывает, что $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоения по существу совпадают с расслоениями вида $\xi[\mathscr{F}]$, где ξ—произвольное локально тривиальное главное $\mathscr{G}$-расслоение (и, значит, дают прямое описание локально тривиальных расслоений вида $\xi[\mathscr{F}]$, не апеллирующее к главным расслоениям).

Разберем этот вопрос подробнее (ср. пример 3 лекции 6). Конечно, знакомство с лекцией 1 теперь предполагается.

Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — произвольное главное $\mathscr{G}$-расслоение и пусть $\xi=\xi[\mathscr{F}]$, где $\mathscr{F}$ — пока произвольное левое $\mathscr{G}$-пространство. Как мы знаем (см. формулу (12) лекции 1), для любой точки $p\in\mathscr{E}$ формула

$$j_p(x)=[p, x]_{\mathscr{G}}, \qquad x\in\mathscr{F},$$

определяет гомеоморфизм $j_p\colon \mathscr{F}\to\mathscr{F}_b$ пространства $\mathscr{F}$ на слой $\mathscr{F}_b$ расслоения ξ над точкой $b=\pi(p)$ (являющейся орбитой $p\mathscr{G}$ точки p). Если q — другая точка орбиты b и если $p=qa$, где $a\in\mathscr{G}$, то для любой точки $x\in\mathscr{F}$

$$(j_q^{-1}\circ j_p)(x)=j_q^{-1}[p, x]=j_q^{-1}[q, ax]=ax,$$

т. е. $j_q^{-1}\circ j_p=L_a$. Это показывает, что множество всех отображений вида j_p^{-1} удовлетворяет условиям **а** и **б** определения 1. Приняв это множество за $\operatorname{Coor}\mathscr{F}_b$, мы тем самым введем в $\mathscr{F}_b$ некоторую ($\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$)-структуру.

Пусть главное расслоение ξ локально тривиально, т.е. пусть некоторое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathscr{B}$ обладает тем свойством, что для любого α существует эквивариантный гомеоморфизм

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathscr{G}\to\mathscr{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}U_\alpha$$

главных $\mathscr{G}$-пространств. Рассмотрим отображение

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathscr{F}\to\mathscr{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}U_\alpha,$$

определенное формулой

$$\varphi_\alpha(b, x)=[\varphi_\alpha(b, e), x]_{\mathscr{G}}, \qquad b\in U_\alpha,\ x\in\mathscr{F},$$

где, как всегда, e — единица группы $\mathscr{G}$. Легко видеть, что это отображение является послойным гомеоморфизмом (обратный гомеоморфизм задается формулой

$$[p, x]_{\mathscr{G}}\mapsto(b, ax), \qquad p\in\mathscr{E},\quad x\in\mathscr{F},$$

где $b=\pi(p)$ и $a=\tau(\varphi_\alpha(b, e), p)$ — такой элемент группы $\mathscr{G}$, что $\varphi_\alpha(b, e)a=p$). При этом для любой точки $b\in U_\alpha$ отображение $\varphi_{\alpha, b}\colon x\mapsto\varphi_\alpha(b, x)$ из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{F}_b$ будет не чем иным, как отображением j_p при $p=\varphi_\alpha(b, e)$, и значит будет изоморфизмом ($\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$)-пространств.

Тем самым доказано, что *для любого локально тривиального главного $\mathscr{G}$-расслоения ξ расслоение $\xi = \xi[F]$ является $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоением.*

Обратное утверждение верно только в предположении, что группа $\mathscr{G}$ действует на пространстве $\mathscr{F}$ топологически эффективно.

Пусть $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$—произвольное $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоение. Рассмотрим множество

$$\mathbf{\mathcal{E}} = \bigsqcup_{b \in \mathscr{B}} \operatorname{Corr} \mathscr{F}_b$$

и отображение

$$\pi\colon \mathbf{\mathcal{E}} \to \mathscr{B},$$

определенное формулой

$$\pi(p) = b, \qquad \text{если} \quad p \in \operatorname{Corr} \mathscr{F}_b.$$

Пусть $\{U_\alpha\}$—тривиализирующее покрытие расслоения ξ. По условию для тривиализации $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ расслоения ξ над U_α и любой точки $b \in U_\alpha$ отображенне $\varphi_{\alpha, b}^{-1}\colon \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}$ принадлежит множеству $\operatorname{Coor} \mathscr{F}_b$. Поэтому, положив

$$\varphi_\alpha(b, a) = L_a^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^{-1}, \qquad b \in U_\alpha, \quad a \in \mathscr{G},$$

мы получим некоторое—очевидно, послойное и биективное—отображение

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathscr{G} \to \mathbf{\mathcal{E}}_{U_\alpha} = \bigsqcup_{b \in U_\alpha} \operatorname{Coor} \mathscr{F}_b.$$

Введем в множество $\mathbf{\mathcal{E}}_{U_\alpha}$ топологию, считая это отображение гомеоморфизмом (т. е. объявляя множество $O \subset \mathbf{\mathcal{E}}_{U_\alpha}$ открытым в том и только в том случае, когда множество $\varphi_\alpha^{-1} O$ открыто в $U_\alpha \times \mathscr{G}$).

Лемма 1. *Пусть множество $\mathscr{X}$ является объединением множеств $\mathscr{X}_\alpha$, в каждое из которых введена топология $\mathbb{T}_\alpha$. Если для любых α и β пересечение $\mathscr{X}_\alpha \cap \mathscr{X}_\beta$ открыто в $\mathscr{X}_\alpha$ (а значит по симметрии—и в $\mathscr{X}_\beta$) и если топологии, индуцированные на $\mathscr{X}_\alpha \cap \mathscr{X}_\beta$ топологиями $\mathbb{T}_\alpha$ и $\mathbb{T}_\beta$, совпадают, то на $\mathscr{X}$ существует единственная топология $\mathbb{T}$, по отношению к которой все множества $\mathscr{X}_\alpha$ открыты и на каждом из них топология $\mathbb{T}$ индуцирует топологию $\mathbb{T}_\alpha$.*

Доказательство. Единственность. Если топология $\mathbb{T}$ существует, то множество $O \subset \mathscr{X}$ тогда и только тогда открыто в $\mathscr{X}$, когда для любого α пересечение $O \cap \mathscr{X}_\alpha$ открыто в $\mathscr{X}_\alpha$. Следовательно, топология $\mathbb{T}$ единственна.

Существование. Назовем множество $O \subset \mathscr{X}$ открытым, если для любого α пересечение $O \cap \mathscr{X}_\alpha$ открыто в $\mathscr{X}_\alpha$. Ясно, что все такие множества составляют топологию $\mathbb{T}$ в $\mathscr{X}$. При этом — в силу условия, наложенного на T_α, — если $O \subset \mathscr{X}_\alpha$, то O тогда и только тогда открыто в $\mathscr{X}$, когда O открыто в $\mathscr{X}_\alpha$. Следовательно, $\mathscr{X}_\alpha$ открыто в $\mathscr{X}$ и топология $\mathbb{T}$ индуцирует на $\mathscr{X}_\alpha$ топологию $\mathbb{T}_\alpha$. $\square$

[Заметим, что топология в гладкое многообразие $\mathscr{X}$ вводится — см. лекцию III.7 — фактически на основе этой леммы (с координатными окрестностями U_α в роли подпространств $\mathscr{X}_\alpha$).]

Чтобы применить лемму 1 к множеству $\mathscr{X} = \mathscr{E}$ и топологическим пространствам $\mathscr{X}_\alpha = \mathscr{E}_{U_\alpha}$, мы должны доказать, что для любых α и β пересечение $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta}$ открыто в $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ и топологии пространств $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ и $\mathscr{E}_{U_\beta}$ индуцируют на нем одну и ту же топологию. Поскольку

$$\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta} = \mathscr{E}_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

а $\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{E}_{U_\alpha \cap U_\beta}) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathscr{G}$, первое утверждение следует из того, что пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$ открыто в U_α. Что же касается второго утверждения, то оно равносильно утверждению, что отображение

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathscr{G} \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathscr{G}$$

непрерывно (и значит — по симметрии — является гомеоморфизмом).

Но так как для любых элементов $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $a \in \mathscr{G}$

$$\varphi_\alpha(b, a) = L_a^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^{-1} = L_a^{-1} \circ \varphi_{\beta\alpha}(b)^{-1} \circ \varphi_{\beta, b}^{-1} = L_{\varphi_{\beta\alpha}(b)\, a}^{-1} \circ \varphi_{\beta, b}^{-1},$$

то это отображение действует по формуле

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(b, a) = (b, \varphi_{\beta\alpha}(b)\, a), \qquad b \in U_\alpha \cap U_\beta,\ a \in \mathscr{G},$$

и, следовательно, непрерывно (напомним, что $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ мы предполагаем топологически эффективным). Поэтому для множества $\mathscr{E}$ и подпространств $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ все условия леммы 1 выполнены, и значит в $\mathscr{E}$ существует единственная топология, по отношению к которой все пространства $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ являются открытыми подпространствами.

Поскольку каждое из отображений φ_α представляет собой по отношению к этой топологии послойный гомеоморфизм, отображение π непрерывно и открыто (на каждом $\mathcal{E}_{U_\alpha}$, а потому и на всем $\mathcal{E}$).

Мы определим на $\mathcal{E}$ действие справа группы $\mathscr{G}$ формулой

$$pa = L_a^{-1} \circ p, \qquad p \in \mathcal{E}, \quad a \in \mathscr{G}$$

(напомним, что $p \in \operatorname{Coor} \mathscr{F}_b$ для некоторого $b \in \mathscr{B}$, и потому композиция $L_a^{-1} \circ p$ определена и принадлежит $\operatorname{Coor} \mathscr{F}_b$). Так как по отношению к этому действию (и стандартному действию группы $\mathscr{G}$ на $U_\alpha \times \mathscr{G}$) отображения φ_α, очевидно, эквивариантны, то это действие непрерывно, свободно и отображение сдвига для него непрерывно (на каждом $\mathcal{E}_{U_\alpha}$, а значит и на всем $\mathcal{E}$). Таким образом, *расслоение*

$$\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathscr{B})$$

является главным $\mathscr{G}$-расслоением.

Задача 7. Покажите, что формула

$$[p, x]_{\mathscr{G}} \mapsto p^{-1}(x), \qquad p \in \mathcal{E}, \quad x \in \mathscr{F},$$

корректно определяет изоморфизм $\xi[\mathscr{F}] \to \xi$ ассоциированного расслоения $\xi[\mathscr{F}] = (\mathcal{E} \times_{\mathscr{G}} \mathscr{F}, \pi, \mathscr{B})$ на расслоение ξ.

Таким образом, *если $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ топологически эффективно, то с точностью до изоморфизма ($\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$)-расслоения — это локально тривиальные расслоения со структурной группой $\mathscr{G}$ и слоем $\mathscr{F}$.*

Рассмотрим теперь редуцирование ($\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$)-расслоений к подгруппе $\mathscr{H}$ группы $\mathscr{G}$.

Снабженная индуцированной топологией подгруппа $\mathscr{H}$ является топологической группой, непрерывно действующей на $\mathscr{G}$-пространстве $\mathscr{F}$ (так что каждое $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ автоматически является и $\mathscr{H}$-пространством). При этом ясно, что если группа $\mathscr{G}$ действует на $\mathscr{F}$ эффективно (или топологически эффективно), то подгруппа $\mathscr{H}$ также действует эффективно (или соответственно топологически эффективно).

Любое ($\mathscr{H}$, $\mathscr{F}$)-пространство $\mathscr{Y}$ мы можем единственным образом превратить в ($\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$)-пространство с тем же множеством точек, объявив координатными изоморфизмами все отображения вида $L_a \circ q$, где $q \in \operatorname{Coor} \mathscr{Y}$, $a \in \mathscr{G}$. (Подчеркнем, что $\mathscr{F}$ здесь с самого начала предполагается $\mathscr{G}$-пространством.) При этом каждый ($\mathscr{H}$, $\mathscr{F}$)-изоморфизм ($\mathscr{H}$, $\mathscr{F}$)-пространств будет, очевидно, и ($\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$)-изоморфизмом соответствующих ($\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$)-пространств. Поэтому если в некотором $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-расслоении мы указанным образом превратим все слои в $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-пространства, то в результате получится $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоение (с теми же самыми тривиализациями $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$).

В этом смысле *каждое* $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$*-расслоение является также и* $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$*-расслоением.*

Обратно, каждое $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-пространство $\mathscr{X}$ мы можем превратить в $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-пространство $\mathscr{X}_{\mathscr{H}}$ с тем же множеством точек, выбрав произвольный координатный изоморфизм $p_0 \in \operatorname{Coor} \mathscr{X}$ и ограничившись лишь координатными изоморфизмами вида $L_a \circ p_0$, где $a \in \mathscr{H}$. Однако, в отличие от предыдущего случая, *эта процедура не однозначна* и зависит от выбора изоморфизма p_0, а $(\mathscr{G}, \mathscr{H})$-изоморфизмы отнюдь не будут автоматически $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-изоморфизмами.

Задача 8. Покажите, что выбор изоморфизмов p_0, $p_1 \in \operatorname{Coor} \mathscr{X}$ тогда и только тогда приводит к одному и тому же $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-пространству $\mathscr{X}_{\mathscr{H}}$, когда элемент $a \in \mathscr{G}$, удовлетворяющий соотношению $p_1 = L_a \circ p_0$, принадлежит подгруппе $\mathscr{H}$.

[Таким образом, различные $(\mathscr{H}; \mathscr{F})$-структуры на $\mathscr{X}$, получающиеся из одной и той же $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-структуры, находятся в биективном соответствии с точками пространства $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ левых смежных классов группы $\mathscr{G}$ по подгруппе $\mathscr{H}$.]

Если мы теперь хотим превратить данное $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоение $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ в $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-расслоение, то нам нужно ввести $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-структуры во все слои $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, одновременно и притом так, чтобы хотя бы для одного тривиализующего атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ расслоения ξ все отображения (2) оказались $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-изоморфизмами. Как показывает пример векторных расслоений, это удается сделать не всегда.

Определение 5. Мы будем говорить, что $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоение *редуцируется к подгруппе* $\mathscr{H}$ (или к $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-расслоению η), если существует $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-расслоение η, которое после введения в его слои $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-структуры превращается в расслоение ξ. Расслоение η мы будем называть $\mathscr{H}$*-редукцией* расслоения ξ, а расслоение ξ соответственно $\mathscr{G}$*-расширением* расслоения η.

Подчеркнем, что $\mathscr{G}$-расширение всегда существует (когда в $\mathscr{F}$ задана структура $\mathscr{G}$-пространства) и определено единственным образом, тогда как $\mathscr{H}$-редукция существует не всегда, а когда существует, то, вообще говоря, не единственна.

Подчеркнем также, что тотальные пространства, базы и проекции расслоений ξ и η совпадают, т. е. эти расслоения отличаются лишь $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-структурами.

Легко видеть (ср. предложение 1 лекции 7), что *если $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ топологически эффективно, то $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к подгруппе $\mathscr{H}$, когда для него существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что соответствующий склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ принимает значения в подгруппе $\mathscr{H}$.* Действительно, если $\mathscr{H}$-редукция η существует, то любой тривиализирующий атлас расслоения η будет обладать этим свойством. Обратно, если такой атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ существует, то $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-расслоение η, построенное по коциклу $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$, рассматриваемому как коцикл над группой $\mathscr{H}$, будет $\mathscr{H}$-редукцией расслоения ξ. $\square$

Здесь удобно перейти к соответствующим главным расслоениям ξ и η.

Определение 6. Говорят, что локально тривиальное главное $\mathscr{G}$-расслоение ξ *редуцируется к подгруппе $\mathscr{H}$*, если для него существует такой тривиализующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что соответствующий склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ принимает значения в подгруппе $\mathscr{H}$. В этом случае коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ определяет локально тривиальное главное $\mathscr{H}$-расслоение η, которое называется *$\mathscr{H}$-редукцией* расслоения ξ.

Поскольку склеивающие коциклы расслоений ξ и η одинаковы, мы видим, что *если $\mathscr{G}$-пространство $\mathscr{F}$ топологически эффективно, то $(\mathscr{H}, \mathscr{F})$-расслоение $\eta = \eta[\mathscr{F}]$ тогда и только тогда является $\mathscr{H}$-редукцией $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоения $\xi = \xi[\mathscr{F}]$, когда главное $\mathscr{G}$-расслоение η является $\mathscr{H}$-редукцией главного $\mathscr{G}$-расслоения ξ.*

Поэтому достаточно рассматривать лишь редукции главных расслоений.

З а м е ч а н и е 3. Обратим внимание, что в отличие от случая $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$-расслоений *тотальные пространства расслоений ξ и η различны* (при $\mathscr{H} \neq \mathscr{G}$). Действительно, так как $\xi = \xi[\mathscr{G}]$ (см. пример 6 лекции 1), то тотальное пространство $\mathscr{E}^\xi$ расслоения ξ то же, что и тотальное пространство расслоения $\eta[\mathscr{G}]$ (где $\mathscr{G}$ рассматривается как левое $\mathscr{H}$-пространство), и потому заведомо отлично от тотального пространства $\mathscr{E}^\eta$ расслоения $\eta = \eta[\mathscr{H}]$.

По определению пространство $\mathscr{E}^\xi = \mathscr{E}^{\xi[\varphi]} = \mathscr{E}^{\eta[\varphi]}$ является факторпространством пространства $E = \coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathscr{G})$, а пространство $\mathscr{E}^\eta = \mathscr{E}^{\eta[\mathscr{H}]}$ — факторпространством его подпространства $H = \coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathscr{H})$. Следовательно, поскольку эти факторизации на подпространстве H очевидным образом совпадают, вложение $H \subset E$ индуцирует послойное отображение

$$\chi\colon \mathscr{E}^\eta \to \mathscr{E}^\xi, \tag{3}$$

которое

а) является гомеоморфизмом на свой образ;

б) эквивариантно по отношению к действию группы $\mathscr{H}$, т. е. обладает тем свойством, что

$$\chi(qh) = \chi(q)h$$

для любой точки $q \in \mathscr{E}^\eta$ и любого элемента $h \in \mathscr{H}$.

Об отображении (3) мы будем говорить, что оно *редуцирует* расслоение ξ к расслоению η. [Заметим, что, вообще говоря, это отображение зависит от выбора склеивающего коцикла $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$.]

Легко видеть, что существование редуцирующего отображения (3) не только необходимо, но и достаточно для редуцируемости расслоения ξ к расслоению η, т. е. *главное $\mathscr{H}$-расслоение η тогда и только тогда является $\mathscr{H}$-редукцией главного $\mathscr{G}$-расслоения ξ, когда существует хотя бы одно редуцирующее отображение* (3). Действительно, легко видеть (докажите!), что для любого редуцирующего отображения (3) формула

$$[q, a]_{\mathscr{H}} \mapsto \chi(q)a, \qquad q \in \mathscr{E}^\eta, \quad a \in \mathscr{G},$$

корректно определяет $\mathscr{G}$-изоморфизм $\eta[\mathscr{G}] \to \xi$. Поэтому склеивающие коциклы расслоений ξ и $\eta[\mathscr{G}]$ можно выбрать одинаковыми. Это все и доказывает, поскольку каждый склеивающий коцикл расслоения $\eta[\mathscr{G}]$ заведомо принимает значения в группе $\mathscr{H}$. $\square$

Теперь мы можем определить $\mathscr{H}$-редукции и для любых — не обязательно локально тривиальных — главных $\mathscr{G}$-расслоений.

Определение 7. Говорят, что главное $\mathscr{H}$-расслоение η является *$\mathscr{H}$-редукцией* главного $\mathscr{G}$-расслоения ξ, если существует хотя бы одно редуцирующее отображение (3).

Согласно доказанному, для локально тривиальных главных расслоений это определение равносильно определению 6. [Однако следует иметь в виду, что локально тривиальное главное $\mathscr{G}$-расслоение может обладать не локально тривиальными $\mathscr{H}$-редукциями, не имея локально тривиальных.]

Задача 9. Покажите, что *для любого (не обязательно локально тривиального) главного $\mathscr{H}$-расслоения η существует главное $\mathscr{G}$-расслоение ξ, для которого расслоение η является $\mathscr{H}$-редукцией и которое локально тривиально, если локально тривиально расслоение η.* [Указание. За тотальное пространство $\mathscr{E}^{\xi}$ расслоения ξ примите тотальное пространство $\mathscr{E}^{\eta} \underset{\mathscr{H}}{\times} \mathscr{G}$ расслоения $\eta[\mathscr{G}]$ (где $\mathscr{G}$ естественным образом рассматривается как левое $\mathscr{H}$-пространство), действие группы $\mathscr{G}$ на $\mathscr{E}$ определите — как легко видеть, корректной — формулой

$$[q, g]_{\mathscr{H}} a = [q, ga]_{\mathscr{H}}, \qquad q \in \mathscr{E}^{\eta}, \ g, a \in \mathscr{G},$$

а редуцирующее отображение (3) — формулой

$$\chi(q) = [q, e]_{\mathscr{H}}, \qquad q \in \mathscr{E}^{\eta},$$

где, как всегда, e — единица группы $\mathscr{G}$.]

Задача 10. Докажите, что *главное $\mathscr{G}$-расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к единичной подгруппе $\{e\}$, когда оно тривиально.* [Указание. При $\mathscr{H} = \{e\}$ отображение (3) является сечением расслоения ξ.]

Так как $\mathscr{H}$ действует на $\mathscr{E} = \mathscr{E}^{\xi}$, то определено факторпространство $\mathscr{E}/\mathscr{H}$. При этом, поскольку каждая $\mathscr{H}$-орбита $p\mathscr{H}$ содержится в единственной $\mathscr{G}$-орбите $p\mathscr{G}$, соответствие $p\mathscr{H} \to p\mathscr{G}$ задает отображение $\pi\colon \mathscr{E}/\mathscr{H} \to \mathscr{B}$, и значит возникает расслоение

$$\xi/\mathscr{H} = (\mathscr{E}/\mathscr{H}, \pi, \mathscr{B}).$$

С другой стороны, так как группа $\mathscr{G}$ естественным образом непрерывно действует слева на факторпространстве $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ (по формуле

$$a(g\mathscr{H}) = (ag)\mathscr{H},$$

где $a, g \in \mathscr{G}$), то определено расслоение

$$\xi[\mathscr{G}/\mathscr{H}] = (\mathscr{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} (\mathscr{G}/\mathscr{H}), \pi, \mathscr{B}).$$

Задача 11. Покажите, что *расслоения $\xi/\mathscr{H}$ и $\xi[\mathscr{G}/\mathscr{H}]$ канонически изоморфны.* [Указание. Изоморфизм $\mathscr{E}/\mathscr{H} \to \mathscr{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} (\mathscr{G}/\mathscr{H})$ определяется формулой

$$p\mathscr{H} \mapsto [p, \mathscr{H}]_{\mathscr{G}},$$

а обратный изоморфизм $\mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}/\mathcal{H})\to\mathcal{E}/\mathcal{H}$ — формулой

$$[p,\ g\mathcal{H}]_{\mathcal{G}}\mapsto(pg)\,\mathcal{H},$$

где $p\in\mathcal{E}$, $g\in\mathcal{G}$.]

При $\mathcal{H}=\{e\}$ это утверждение примера 6 лекции 1.

Задача 12 (обобщение задачи 9). Покажите, что *главное $\mathcal{G}$-расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к подгруппе $\mathcal{H}$, когда расслоение $\xi/\mathcal{H}=\xi\,[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ обладает сечением.*

[Указание. Для любого редуцирующего отображения (3) формула

$$f(p)=\tau(p,\ \chi(q))\,\mathcal{H},\qquad p\in\mathcal{E}=\mathcal{E}^{\xi},$$

где q — такая точка из $\mathcal{E}^{\eta}$, что $\pi(q)=\pi(p)$ (а τ, как всегда, отображение сдвига) корректно определяет отображение $f\colon\mathcal{E}\to\mathcal{G}/\mathcal{H}$, удовлетворяющее соотношению (14) лекции 1. Обратно, для любого такого отображения f подпространство $\mathcal{E}^{\eta}$ пространства $\mathcal{E}$, состоящее из точек $p\in\mathcal{E}$, для которых $f(p)=\mathcal{H}$, является главным $\mathcal{H}$-пространством, а вложение $\mathcal{E}^{\eta}\to\mathcal{E}^{\xi}$ — редуцирующим отображением.]

(Ср. замечание в скобках к задаче 8.)

Задача 13. Пусть главное $\mathcal{G}$-расслоение ξ, а также главное $\mathcal{H}$-расслоение $(\mathcal{G},\ \pi,\ \mathcal{G}/\mathcal{H})$ (см. пример 2 лекции 1) локально тривиальны. Покажите, что *если в этих условиях расслоение $\mathcal{E}/\mathcal{H}$ обладает сечением, то для расслоения ξ существует $\mathcal{H}$-редукция η, являющаяся локально тривиальным главным $\mathcal{H}$-расслоением.*

Задача 14. Докажите, что *если η — редукция расслоения ξ, то для любого левого $\mathcal{G}$-пространства $\mathcal{F}$ расслоения $\eta[\mathcal{F}]$ и $\xi[\mathcal{F}]$ изоморфны как расслоения без структурной группы* (существует послойный гомеоморфизм

$$\varphi\colon\ \mathcal{E}^{\eta}\times_{\mathcal{H}}\mathcal{F}\to\mathcal{E}^{\xi}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{F},$$

никак, вообще говоря, не связанный с действиями групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$). [Указание. Отображение φ определяется формулой

$$\varphi\left([q,\ x]_{\mathcal{H}}\right)=[\chi(q),\ x]_{\mathcal{G}},\qquad q\in\mathcal{E}^{\eta},\ x\in\mathcal{F},$$

где χ — редуцирующее отображение (3). Это отображение очевидным образом непрерывно, биективно и послойно. Поэтому в доказательстве нуждается лишь непрерывность обратного отображения. Для этого достаточно для любой окрестности W произвольной точки $[q_0,\ x_0]_{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{E}^{\eta}\times_{\mathcal{H}}\mathcal{F}$ найти такую окрестность U точки $p_0=\chi(q_0)$ в $\mathcal{E}^{\xi}$ и такую окрестность V точки x_0 в $\mathcal{F}$, что $[p,\ x]_{\mathcal{G}}\in\varphi(W)$ для любых точек $p\in U$ и $x\in V$. Пусть W_1 — такая окрестность точки q_0 в $\mathcal{E}^{\eta}$ и W_2 — такая окрестность точки x_0 в $\mathcal{F}$, что $[q,\ x]_{\mathcal{H}}\in W$ для любых точек $q\in W_1$ и $x\in W_2$. Примите за V окрестность точки x_0, для которой в группе $\mathcal{G}$ существует такая симметричная $(O^{-1}=O)$ окрестность единицы O, что $OV_2\subset W_2$, а за U — окрестность точки p_0, обладающую тем свойством, что $\pi^{\xi}(U)\subset\pi^{\eta}(W_1)$ и $\tau((U\times U)\cap\mathcal{E}^{*})\subset O$, где τ — отображение сдвига для ξ.]

Особое значение имеет случай, когда ξ представляет собой расслоение реперов $\tau_{\mathscr{X}}$, ассоциированное с касательным расслоением $\tau_{\mathscr{X}}$ над паракомпактным хаусдорфовым гладким многообразием $\mathscr{X}$, а $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, $\mathscr{H} = \mathrm{GL}^+(n; \mathbb{R})$ (или, что равносильно, $\mathscr{G} = \mathrm{O}(n)$, $\mathscr{H} = \mathrm{SO}(n)$). В этом случае факторпространство $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ является группой второго порядка C_2, а главное $\mathscr{H}$-расслоение $(\mathscr{G}, \pi, \mathscr{G}/\mathscr{H})$ тривиально (а потому и локально тривиально). Следовательно, согласно утверждениям задач 12 и 13 *расслоение* $\tau_{\mathscr{X}}$ (*а значит и расслоение* $\tau_{\mathscr{X}}$) *тогда и только тогда редуцируется к группе* $\mathrm{SO}(n)$ (*многообразие* $\mathscr{X}$ *ориентируемо*), *когда расслоение* $\tau_{\mathscr{X}}/\mathrm{SO}(n) = \tau_{\mathscr{X}}[C_2]$ *обладает сечением.*

Задача 15. Дайте прямое доказательство последнего утверждения. (Эта задача предназначена для пропустивших задачи 12 и 13.)

Как легко видеть, расслоение $\tau_{\mathscr{X}}[C_2]$ является главным C_2-расслоением. Поэтому это расслоение тогда и только тогда обладает сечением, когда оно тривиально.

Пусть многообразие $\mathscr{X}$ связно.

Задача 16. Покажите, что *C_2-расслоение над связным многообразием $\mathscr{X}$ тогда и только тогда нетривиально, когда его тотальное пространство связно* (и, значит, это расслоение является накрытием).

Таким образом, для любого связного неориентируемого многообразия $\mathscr{X}$ мы сконструировали некоторое вполне определенное двулистное накрытие $\tau_{\mathscr{X}}[C_2] = (\tilde{\mathscr{X}}, \pi, \mathscr{X})$.

Задача 17. Покажите, что тотальное *пространство $\tilde{\mathscr{X}}$ накрытия $\tau_{\mathscr{X}}[C_2]$ является ориентируемым многообразием.*

Подводя итоги, мы видим, что справедливо следующее предложение:

Предложение 1. *Для любого неориентируемого связного многообразия $\mathscr{X}$ существует ориентируемое многообразие $\tilde{\mathscr{X}}$, двулистно накрывающее многообразие $\mathscr{X}$.*

Задача 18. Докажите, что *с точностью до изоморфизма накрытие $(\tilde{\mathscr{X}}, \pi, \mathscr{X})$ единственно.*

Конечно, многообразие $\mathscr{X}$ (безразлично, ориентируемое или неориентируемое) может иметь много различных двулистных накрывающих многообразий. Если многообразие $\mathscr{X}$ ориентируемо, то все они ориентируемы (почему?), а если многообразие $\mathscr{X}$ неориентируемо, то среди них ориентируемо только одно.

Задача 19. Докажите последнее утверждение.