Лекция 10

Прообраз векторного расслоения.— Гладкие векторные расслоения.— Поля горизонтальных подпространств.— Связности и их формы.— Прообраз связности.— Связности на комплексном расслоении и на его овеществлении.— Диагонализация связности.

Вернемся к векторным расслоениям (над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Напомним (см. определение 2 лекции 6), что *морфизмом* $\varphi\colon \eta \to \xi$ векторного расслоения η в векторное расслоение ξ называется послойное непрерывное отображение $\mathscr{E}^\eta \to \mathscr{E}^\xi$, линейное на каждом слое. Каждый морфизм $\varphi\colon \eta \to \xi$ индуцирует непрерывное отображение $\hat{\varphi}\colon \mathscr{B}^\eta \to \mathscr{B}^\xi$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}^\eta & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E}^\xi \\ {\scriptstyle \pi^\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^\xi} \\ \mathscr{B}^\eta & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathscr{B}^\xi, \end{array}$$

и для любой точки $b \in \mathscr{B}^\eta$ — линейное отображение

$$\varphi_b\colon \mathscr{F}_b^\eta \to \mathscr{F}_{\hat{\varphi}(b)}^\xi$$

слоя $\mathscr{F}_b^\eta$ расслоения η на слой $\mathscr{F}_{\hat{\varphi}(b)}^\xi$ расслоения ξ.

Особое значение имеют морфизмы $\varphi\colon \eta \to \xi$, для которых все отображения φ_b, $b \in \mathscr{B}^\eta$, являются изоморфизмами. К сожалению, хорошего общепринятого названия такие морфизмы не имеют. За отсутствием лучшего термина мы будем называть их *регулярными морфизмами*.

Согласно утверждению задачи 4 лекции 6 изоморфизмы векторных расслоений над $\mathscr{B}$ — это в точности регулярные морфизмы, являющиеся одновременно морфизмами над $\mathscr{B}$.

Отображения $\hat{\varphi}\colon \mathscr{B}^\eta \to \mathscr{B}^\xi$, индуцированные регулярными морфизмами, не подчинены, вообще говоря, никаким условиям.

Предложение 1. *Для любого векторного расслоения $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ и любого непрерывного отображения $f\colon \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ существует векторное расслоение $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ над $\mathscr{B}'$ и регулярный морфизм $\varphi\colon \xi' \to \xi$, индуцирующий отображение f:*

(1)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E} \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathscr{B}' & \xrightarrow{f} & \mathscr{B} \end{array}$$

С точностью до изоморфизма расслоение ξ' определено единственным образом.

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}'$ — подпространство произведения $\mathscr{E}\times\mathscr{B}'$, состоящее из таких точек (p, b'), $p\in\mathscr{E}$, $b'\in\mathscr{B}'$, что $\pi(p)=f(b')$, и пусть $\pi'(p, b')=b'$, $\varphi(p, b')=p$. Ясно, что отображения π' и φ непрерывны, а диаграмма (1) коммутативна (и, значит, φ является морфизмом расслоения $\xi'=(\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ в расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, индуцирующим данное отображение f).

Далее, для любой точки $b'\in\mathscr{B}'$ слой $(\pi')^{-1}(b')=\mathscr{F}'_{b'}$ расслоения ξ' над b' состоит из всех точек вида (p, b'), где p — произвольная точка слоя $\mathscr{F}_b=\pi^{-1}(b)$, $b=f(b')$, расслоения ξ над точкой b, и отображение $\varphi_{b'}\colon \mathscr{F}'_{b'}\to\mathscr{F}_b$ представляет собой биективное отображение $(p, b')\mapsto p$. Перенеся с помощью $\varphi_{b'}$ структуру линейного пространства из $\mathscr{F}_b$ в $\mathscr{F}'_{b'}$, мы превратим слои $\mathscr{F}'_{b'}$ в линейные пространства, отображения $\varphi_{b'}$ — в изоморфизмы, и, следовательно, морфизм φ — в регулярный морфизм.

Задача 1. Докажите, что

а. *Для любого тривиализирующего атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ расслоения ξ пары $(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)$, где $U'_\alpha=f^{-1}U_\alpha$ и $\varphi'_\alpha(b', x)=(\varphi_\alpha(f(b'), x), x)$, $b'\in U'_\alpha$, $x\in\mathbb{K}^n$, составляют тривиализирующий атлас расслоения ξ'.*

б. *Склеивающий коцикл*

$$\{\varphi'_{\beta\alpha}\colon U'_\alpha\cap U'_\beta\to \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})\}$$

атласа $\{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ связан со склеивающим коциклом

$$\{\varphi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})\}$$

атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ соотношением

$$\varphi'_{\beta\alpha}=\varphi_{\beta\alpha}\circ f \tag{2}$$

(которое должно иметь место для любых α и β; или, точнее, соотношением $\varphi'_{\beta\alpha}=\varphi_{\beta\alpha}\circ f_{\beta\alpha}$, где $f_{\beta\alpha}$ — ограничение на $U'_\alpha\cap U'_\beta$ отображения f, рассматриваемое как отображение в $U_\alpha\cap U_\beta$).

В силу утверждения а задачи 1 расслоение ξ' локально тривиально и потому является векторным расслоением.

Наконец, если $\psi\colon \eta\to\xi$ — произвольный морфизм векторных расслоений, индуцирующий отображение f, то формула

$$\chi(q)=(\pi^\eta(q),\ \psi(q)),\qquad q\in\mathscr{E}^\eta$$

будет, очевидно, определять морфизм $\chi\colon \eta \to \xi'$ над $\mathcal{B}'$, удовлетворяющий соотношению $\psi = \varphi \circ \chi$ и потому регулярный (т. е. являющийся изоморфизмом), когда регулярен морфизм ψ. Следовательно, с точностью до изоморфизма расслоение ξ' единственно. $\square$

Определение 1. Построенное расслоение ξ' называется *прообразом* расслоения ξ при отображении f и обозначается символом $f^*\xi$. Морфизм $\varphi\colon \xi' \to \xi$ обозначается символом $f^!$.

[Согласно доказанному для любого морфизма $\psi\colon \eta \to \xi$ векторных расслоений, индуцирующего отображение f, существует единственный морфизм $\chi\colon \eta \to f^*\xi$ над $\mathcal{B}'$, удовлетворяющий соотношению

$$\psi = f^! \circ \chi.$$

На языке теории категорий это означает, что коммутативный квадрат (1) является *универсальным квадратом* или — в другой терминологии — что расслоение $f^*\xi$ представляет собой *коамальгаму* диаграммы $\mathcal{B}' \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xleftarrow{\pi} \mathcal{E}$. (В литературе на русском языке можно встретить для $f^*\xi$ название «расслоенное произведение». Эта калька английского термина — уже не употребляющаяся и в английском языке — не очень удачна даже в рамках теории расслоений и уж совсем не годится для произвольных категорий.)]

Задача 2. Докажите, что *для любых отображений $g\colon \mathcal{B}'' \to \mathcal{B}'$ и $f\colon \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ расслоение $(f \circ g)^* \xi$ естественно изоморфно расслоению $g^*(f^*\xi)$* (и потому может быть с ним отождествлено).

Пусть $\mathcal{B}$ — гладкое m-мерное многообразие.

Определение 2. Векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ ранга n над многообразием $\mathcal{B}$ называется *гладким*, если существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что отвечающий ему матричный коцикл состоит из гладких отображений

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}), \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{H}.$$

Замечание 1. Можно доказать, что над хаусдорфовым и паракомпактным гладким многообразием *каждое векторное расслоение изоморфно гладкому расслоению.*

Так как каждое открытое покрытие многообразия $\mathcal{B}$, вписанное в покрытие $\{U_\alpha\}$, является — по отношению к соответствующим ограничениям тривиализаций φ_α — тривиализирующим покрытием, для которого функции перехода либо постоянны (тождественно равны единице группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$), либо являются ограничениями функций перехода $\varphi_{\beta\alpha}$, то *без ограничения общности можно предполагать, что покрытие $\{U_\alpha\}$ из определения 2 состоит из координатных окрестностей многообразия $\mathscr{B}$*. Более того, если нужно, то эти координатные окрестности можно считать связными (линейно) или даже диффеоморфными шару $\mathring{\mathbb{B}}^n$.

Согласно формуле (2) *для любого гладкого векторного расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ и любого гладкого отображения $f\colon \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ индуцированное расслоение $f^*\xi$ также гладко.*

В случае, когда пространство $\mathscr{E}$ является гладким многообразием, тривиализацию $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ векторного расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ над открытым множеством $U_\alpha \subset \mathscr{B}$ мы будем называть *гладкой*, если она является диффеоморфизмом гладкого многообразия $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ на гладкое многообразие $\mathscr{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}U_\alpha$ (где, конечно, $\mathbb{K}^n$ рассматривается при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ как вещественное многообразие размерности $2n$ или $4n$ соответственно).

Предложение 2. *Для любого гладкого $\mathbb{K}$-векторного расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ ранга n над гладким m-мерным многообразием $\mathscr{B}$ пространство $\mathscr{E}$ обладает — очевидно, единственной — структурой гладкого $(m+dn)$-мерного многообразия, $d=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$, по отношению к которой все тривиализации*

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$$

предусмотренного определением 2 тривиализирующего атласа являются гладкими тривиализациями.

Обратно, если для векторного расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ пространство $\mathscr{E}$ является гладким многообразием U и существует тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, для которого все тривиализации φ_α гладки, то расслоение ξ гладко.

Таким образом, два возможных подхода к определению гладкого векторного расслоения приводят к одному и тому же результату.

Ключом к доказательству предложения 2 служит следующая лемма (ср. лемму 1 лекции 6):

Лемма 1. *Отображение*

$$\varphi\colon U \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$$

гладкого многообразия U в группу $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ тогда и только тогда гладко, когда гладко отображение

$$\Phi\colon U \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$$

задаваемое формулой

$$\Phi(b, \boldsymbol{x}) = \varphi(b)\boldsymbol{x}, \qquad b \in U, \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n.$$

Доказательство. В силу локального характера свойства гладкости эту лемму достаточно доказать лишь для случая, когда U является координатной окрестностью и, значит, лишь для случая, когда U представляет собой открытое множество пространства $\mathbb{R}^m$. Но в этом случае гладкость отображения φ означает, что элементы $\varphi_i^j(b)$ матрицы $\varphi(b)$, $b \in U$, являются гладкими функциями координат $b^1, \ldots, b^m$ вектора b, а гладкость отображения Φ — что гладкими функциями координат $b^1, \ldots, b^m, x^1, \ldots, x^n$ векторов $b \in U$ и $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ являются координаты $\varphi_i^j(b)x^i$ вектора $\varphi(b)\boldsymbol{x}$. Остается заметить, что эти два условия очевидным образом равносильны. □

При $U = U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$ отображение Φ связано с отображением

(3) $$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n$$

формулой

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(b, \boldsymbol{x}) = (b, \Phi(b, \boldsymbol{x})), \qquad b \in U_\alpha \cap U_\beta, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n,$$

и потому гладко или не гладко одновременно с отображением $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$. Следовательно, *векторное расслоение* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *тогда и только тогда гладко, когда для него существует такой тривиализирующий атлас* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, *что все отображения* (3) *гладки* (*и, значит, являются диффеоморфизмами*).

Доказательство предложения 2. Второе утверждение предложения 2 немедленно вытекает из только что сделанного замечания. Поэтому нам надо доказать лишь первое утверждение. При этом, как уже было замечено выше, мы без ограничения общности можем предполагать, что каждая тривиализирующая окрестность U_α является также и координатной окрестностью.

Пусть $h_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ — соответствующее координатное отображение и пусть

$$g_\alpha = (h_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \mathscr{E}_{U_\alpha} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{m+dn}$$

— отображение, действующее по формуле

$$g_\alpha(p) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}),$$
$$p \in \mathscr{E}_{U_\alpha}, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{dn},$$

где $\boldsymbol{x}=h_\alpha(b)$ и $(b, \boldsymbol{a})=\varphi_\alpha(p)$, а $d=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$ (т. е. $d=1$, если $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, и $d=2$, если $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Ясно, что g_α является гомеоморфным отображением открытого множества $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ на открытое множество $h_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^{dn}$ пространства $\mathbb{R}^{m+dn}$, т. е., другими словами, пара $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ является картой в $\mathscr{E}$, согласованной с топологией пространства $\mathscr{E}$.

Так как $\mathscr{E}_{U_\alpha}\cap\mathscr{E}_{U_\beta}=\mathscr{E}_{U_\alpha\cap U_\beta}$, то $\mathscr{E}_{U_\alpha}\cap\mathscr{E}_{U_\beta}\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, и в этом случае

$$(g_\beta\circ g_\alpha^{-1})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})=((h_\beta\circ h_\alpha^{-1})\boldsymbol{x}, \varphi_{\beta\alpha}(b)\boldsymbol{a})$$

для любой точки $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\in h_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n=g_\alpha(\mathscr{E}_{U_\alpha}\cap\mathscr{E}_{U_\beta})$, где $b=h_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x})$.

В координатах эта формула записывается в виде равенств

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} a^{i'}&=\varphi_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x})_i^{i'}a^i, \qquad i,\ i'=1, \ldots, n,\\ x^{k'}&=x^{k'}(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

где

a^i и x^k — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$ (заметим, что координаты a^i вещественны при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ и комплексны при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$; координаты же x^k всегда вещественны);

$a^{i'}$ и $x^{k'}$ — координаты векторов $\varphi_{\beta\alpha}(b)\boldsymbol{a}$ и $(h_\beta\circ h_\alpha^{-1})\boldsymbol{x}$;

$\varphi_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x})_i^{i'}$ — функции, выражающие через локальные координаты элементы $\varphi_{\beta\alpha}(b)_i^{i'}$ матрицы $\varphi_{\beta\alpha}(b)\in GL(n; \mathbb{K})$;

$x^{k'}(\boldsymbol{x})$ — функции, выражающие в координатах диффеоморфизм $h_\beta\circ h_\alpha^{-1}$.

Это показывает, что отображения $g_\beta\circ g_\alpha^{-1}$ гладки (и, значит, являются диффеоморфизмами), т. е. карты $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ и $(\mathscr{E}_{U_\beta}, g_\beta)$ согласованы.

Поскольку открытые множества $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ покрывают пространство $\mathscr{E}$, этим доказано, что карты $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ составляют атлас, определяющий в $\mathscr{E}$ гладкость, согласованную с топологией. Каждая точка $p\in\mathscr{E}_{U_\alpha}$ имеет в карте $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ локальные координаты

$$\text{(5)}\qquad a^1, \ldots, a^n, x^1, \ldots, x^m,$$

где $a^1, \ldots, a^n$ — компоненты вектора $\boldsymbol{a}=\varphi_{\beta\alpha}(p)$, а $x^1, \ldots, x^m$ — координаты точки $b=\pi(p)$ в карте (U_α, h_α). Те же числа (5) являются координатами на $U_\alpha\times\mathbb{K}^n$ и отображение φ_α переводит каждую точку из $U_\alpha\times\mathbb{K}^n$ в точку из $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ с теми же координатами (действует по равенству координат). Следовательно, отображение φ_α является диффеоморфизмом

Тем самым, предложение 2 полностью доказано. □

Примером гладкого векторного расслоения (при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) является *касательное расслоение* $\tau_{\mathscr{B}}=(\mathbf{T}\mathscr{B}, \pi, \mathscr{B})$; см. пример 2 лекции 5.

В дальнейшем, рассматривая гладкое векторное расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, мы всегда будем предполагать, что пространство $\mathscr{E}$ снабжено описанной структурой гладкого многообразия. Кроме того, не всегда указывая это явно, мы будем рассматривать лишь гладкие тривиализации $\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{E}_{U_\alpha}$.

Аналогично все морфизмы $\eta\to\xi$ между гладкими векторными расслоениями мы будем предполагать *гладкими*, т. е. являющимися гладкими отображениями $\mathscr{E}^\eta\to\mathscr{E}^\xi$.

Задача 3. Докажите, что

а. *Для любого гладкого морфизма $\varphi\colon \eta\to\xi$ гладких векторных расслоений индуцированное отображение $\hat{\varphi}\colon \mathscr{B}^\eta\to\mathscr{E}^\xi$ является гладким отображением.*

б. *Для любого гладкого отображения $f\colon \mathscr{B}'\to\mathscr{B}$ и любого гладкого векторного расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ морфизм*

$$f^!\colon f^*\xi\to\xi$$

является гладким морфизмом.

Замечание 2. Можно доказать, что *над паракомпактным хаусдорфовым многообразием изоморфные гладкие векторные расслоения гладко изоморфны* (ср. замечание 1).

Заметим, что символы $x^1, \ldots, x^m$ обозначают у нас не только часть локальных координат (5) в карте $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$, но и локальные координаты в карте (U_α, h_α) многообразия $\mathscr{B}$. В силу этого соглашения — при достаточной внимательности к недоразумению не приводящего — проекция π записывается в локальных координатах тавтологическими равенствами

$$x^k=x^k, \qquad k=1, \ldots, m. \tag{6}$$

Это доказывает, что

а. *Проекция $\pi\colon\mathscr{E}\to\mathscr{B}$ гладкого векторного расслоения ξ представляет собой гладкое отображение, являющееся в каждой точке $p\in\mathscr{E}$ субмерсией.*

б. *Все слои $\mathscr{F}_b=\pi^{-1}(b)$, $b\in\mathscr{B}$, гладкого векторного расслоения являются гладкими dn-мерными подмногообразиями многообразия $\mathscr{E}$.*

в. *Для любой точки $p\in\mathscr{F}_b$ касательное подпространство $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$ слоя $\mathscr{F}_b$ совпадает с ядром $\operatorname{Ker}(d\pi)_p$ линейного* *надъективного отображения*

$$(d\pi)_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{E} \longrightarrow \mathbf{T}_b\mathscr{B}, \qquad b=\pi(p).$$

Более общим образом, мы можем рассматривать произвольное расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ (в смысле определения 1 лекции 1), для которого пространства $\mathscr{E}$ и $\mathscr{B}$ являются многообразиями (размерностей $m+dn$ и m соответственно), а отображение $\pi\colon \mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{B}$ — субмерсией. Мы будем называть такое расслоение *гладким*.

Ясно, что *утверждения* **б** *и* **в** *справедливы для любого гладкого расслоения* ξ.

На языке точных последовательностей (см. лекцию 4) утверждение **в** означает, что *для любой точки* $p\in\mathscr{F}_b$ *имеет место точная последовательность*

$$(7)\qquad 0\longrightarrow \mathbf{T}_p\mathscr{F}_b \xrightarrow{(d\iota_b)_p} \mathbf{T}_p\mathscr{E} \xrightarrow{(d\pi)_p} \mathbf{T}_b\mathscr{B}\longrightarrow 0,$$

где ι_b — *вложение* $\mathscr{F}_b\longrightarrow\mathscr{E}$.

Заметим, что для векторного расслоения ξ член $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$ этой последовательности — обычно называемый *вертикальным подпространством* линеала $\mathbf{T}_p\mathscr{E}$ — естественно отождествляется с линеалом $\mathscr{F}_b$.

Говорят, что на $(m+n)$-мерном многообразии $\mathscr{E}$ задано *поле m-мерных подпространств H*, если каждой точке $p\in\mathscr{E}$ сопоставлено некоторое m-мерное подпространство H_p пространства $\mathbf{T}_p(\mathscr{E})$.

Задача 4. Пусть V — открытое подмножество многообразия $\mathscr{E}$. Покажите, что *для поля m-мерных подпространств H следующие условия равносильны*:

а. *На V существуют такие гладкие линейные дифференциальные формы* $\theta^1, \ldots, \theta^n$, *что для любой точки $p\in V$ подпространство H_p является аннулятором ковекторов* $\theta^1_p, \ldots, \theta^n_p$:

$$(8)\qquad H_p=\operatorname{Ann}(\theta^1_p, \ldots, \theta^n_p).$$

б. *На V существуют такие гладкие векторные поля* $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$, *что для любой точки $p\in V$ подпространство H_p порождено векторами* $X^{(1)}_p, \ldots, X^{(m)}_p$:

$$(9)\qquad H_p=[X^{(1)}_p, \ldots, X^{(m)}_p].$$

Поле подпространств

$$(10)\qquad H\colon p\longmapsto H_p, \qquad p\in\mathscr{E}$$

называется *гладким*, если существует открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ многообразия $\mathscr{E}$, над каждым элементом которого поле H удовлетворяет условиям **а** и/или **б**.

В случае, когда $\mathscr{E}$ является тотальным пространством гладкого (не обязательно векторного) расслоения ξ (и, значит, в каждой точке $p\in\mathscr{E}$ определено вертикальное подпространство $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$, $b=\pi(p)$) и для любой точки $p\in\mathscr{E}$ имеет место равенство

$$\mathbf{T}_p\mathscr{E}=\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b\oplus H_p \tag{11}$$

(подпространство H_p дополнительно к подпространству $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$), поле (10) называется *полем горизонтальных подпространств*.

Так как $\operatorname{Ker} d\pi_p=\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$, то на каждом таком подпространстве H_p линейное отображение $d\pi_p$ является изоморфизмом.

Подчеркнем, что в выборе горизонтальных подпространств H_p имеется значительный произвол, т. е. на $\mathscr{E}$ существует много (даже гладких) полей (10), удовлетворяющих условию (11), в то время как вертикальные подпространства $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$ определяются единственным образом.

Когда задано поле H горизонтальных подпространств, то каждое векторное поле X на $\mathscr{E}$ единственным образом представляется в виде

$$X=X^V+X^H, \tag{12}$$

где X^V и X^H — такие поля на $\mathscr{E}$, что для любой точки $p\in\mathscr{E}$ вектор X_p^V вертикален, а вектор X^H горизонтален.

Задача 5. Докажите, что

а. *Поле H горизонтальных подпространств тогда и только тогда гладко, когда для любого гладкого векторного поля X на $\mathscr{E}$ поля X^V и X^H также гладки.*

б. *Если поле H гладко, то поле X тогда и только тогда гладко, когда гладки поля X^V и X^H.*

Как правило, мы будем задавать поля горизонтальных подпространств формулами вида (8), принимая за V открытые множества вида $\mathscr{E}_U$, где $U\subset\mathscr{B}$. Допуская определенную терминологическую вольность, мы будем называть такое поле *аннулятором форм* $\theta^1, \ldots, \theta^n$ *над* U и будем писать

$$H=\operatorname{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n) \quad \text{над } U.$$

По определению это означает, что для каждой точки $p\in\mathscr{E}_U$ подпространство H_p состоит из таких векторов

$A \in \mathbf{T}_p A$, что

(13) $$\theta_p^i(A) = 0 \quad \text{для любого } i = 1, \ldots, n.$$

Чтобы такое поле было полем горизонтальных подпространств, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p \in \mathscr{E}_U$ ограничения ковекторов $\theta_p^1, \ldots, \theta_p^n$ на вертикальном подпространстве $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$, $b = \pi(p)$, были линейно независимы, т. е. чтобы для вертикального вектора $A \in \mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$ равенства (11) выполнялись только при $A = 0$.

Кроме того, формы $\theta^1, \ldots, \theta^n$ и $\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^n$ тогда и только тогда задают одно и то же поле H над U, т. е. в любой точке $p \in \mathscr{E}_U$ удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{Ann}(\theta_p^1, \ldots, \theta_p^n) = \operatorname{Ann}(\overline{\theta}_p^1, \ldots, \overline{\theta}_p^n),$$

когда ковекторы $\theta_p^1, \ldots, \theta_p^n$ линейно эквивалентны ковекторам $\overline{\theta}_p^1, \ldots, \overline{\theta}_p^n$, т. е. когда существуют такие функции

$$c_i^j\colon p \mapsto c_i^j(p), \qquad p \in \mathscr{E}_U,$$

где $i, j = 1, \ldots, n$, что

$$\overline{\theta}^i = c_j^i \theta^j \qquad \text{на } \mathscr{E}_U.$$

Предположим теперь, что рассматриваемое гладкое расслоение $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ является векторным и что для него выбран и зафиксирован тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, состоящий из гладких тривиализаций и такой, что все тривиализирующие окрестности U_α являются одновременно координатными окрестностями в многообразии $\mathscr{B}$.

Согласно сказанному выше тривиализации $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ и координатные отображения $h_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ определяют на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ локальные координаты (5), а значит и соответствующие координатные векторные и ковекторные поля:

$$\frac{\partial}{\partial a^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial a^n}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m},$$
$$da^1, \ldots, da^n, \quad dx^1, \ldots, dx^m.$$

При этом, как непосредственно следует из формулы (4), в каждой точке $p \in \mathscr{E}_{U_\alpha}$ выполняются равенства

$$(d\pi_p)\left(\frac{\partial}{\partial a^i}\right)_p = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$(d\pi_p)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_b, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

где $b=\pi(p)$. Следовательно, векторы $\left(\frac{\partial}{\partial a^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial a^n}\right)_p$ образуют базис вертикального подпространства $\operatorname{Ker} d\pi_p = \mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$ и, значит, ковекторы $da_p^1, \ldots, da_p^n$ (или, точнее, их ограничения на $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$) — базис сопряженного пространства $\mathbf{T}_p^*\mathscr{F}_b$.

Поэтому, если

$$\theta^i = f_j^i da^j + g_k^i dx^k \quad \text{на} \quad \mathscr{E}_{U_\alpha}, \tag{14}$$

где $i, j=1, \ldots, n$ и $k=1, \ldots, m$, то ограничения ковекторов θ_p^i на $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$ тогда и только тогда линейно независимы для любой точки $p\in\mathscr{E}_{U_\alpha}$, когда матрица $\|f_j^i\|$ невырождена на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$.

Предложение 3. *Для любого поля H горизонтальных подпространств на координатной окрестности $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ существуют такие формы*

$$\overset{(\alpha)}{\theta}{}^i = da^i + e_k^i dx^k, \qquad i=1, \ldots, n, \quad k=1, \ldots, m, \tag{15}$$

где e_k^i — некоторые функции на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$, что

$$H = \operatorname{Ann}\left(\overset{(\alpha)}{\theta}{}^1, \ldots, \overset{(\alpha)}{\theta}{}^n\right) \text{ над } U_\alpha.$$

Этими условиями формы (15) *характеризуются единственным образом.*

Доказательство. Существование. Пусть поле H является на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ аннулятором форм (14). Тогда, как мы видели, матрица $\|f_j^i\|$, состоящая из функций f_j^i, невырождена в каждой точке $p\in\mathscr{E}_{U_\alpha}$. Пусть $\|\hat{f}_j^i\|$ — обратная матрица. Формы $\hat{f}_j^i\theta^j$ задают то же поле H и имеют вид (15).

Единственность. Достаточно заметить, что формы $\theta^i = c_j^i\overset{(\alpha)}{\theta}{}^j$ тогда и только тогда имеют тот же вид (15), когда $c_j^i=\delta_j^i$. $\square$

Очевидно, что поле H горизонтальных подпространств тогда и только тогда гладко, когда для каждой окрестности U_α формы (15), т. е. функции e_k^i, гладки в $\mathscr{E}_{U_\alpha}$.

Среди всех гладких полей H горизонтальных подпространств особое значение имеют поля, для которых коэффициенты e_k^i форм (15) линейно зависят от $a^1, \ldots, a^n$, т. е. имеют вид

$$e_k^i = \overset{(\alpha)}{\Gamma}{}_{kj}^i a^j,$$

где $\overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj}$ — некоторые гладкие функции от $x^1, \ldots, x^m$ (т. е., иными словами, гладкие функции на координатной окрестности U_α).

Определение 3. Гладкое поле

$$H\colon p \longmapsto H_p, \qquad p \in \mathscr{E},$$

горизонтальных подпространств называется *связностью* на гладком векторном расслоении ξ, если для каждой тривиализирующей координатной окрестности U_α задающие это поле формы (15) имеют вид

$$\overset{(\alpha)}{\theta}{}^i = da^i + \overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj} a^j\, dx^k, \qquad i, j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, m,$$

где $\overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj}$ — некоторые гладкие функции на U_α.

Функции $\overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj}$ называются *коэффициентами связности* H в окрестности U_α. [Порядок нижних индексов k и j в обозначении коэффициентов связности в литературе еще окончательно не установился. Многие авторы пишут их в обратном порядке.]

Целесообразно ввести в рассмотрение линейные дифференциальные формы

$$\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j = \overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj}\, dx^k \qquad \text{на } U_\alpha.$$

Эти формы однозначно определяют связность H на U_α (и однозначно ею определяются). Они называются *формами связности* H на U_α. Их удобно располагать в матрицу

$$\overset{\alpha}{\omega} = \| \overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j \|, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Если формы $\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j$ естественным образом рассматривать как формы на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$, то будет иметь место равенство

$$(16) \qquad \overset{(\alpha)}{\theta}{}^i = da^i + \overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j a^j \qquad \text{на } \mathscr{E}_{U_\alpha}.$$

Некоторые авторы называют формы (16) *формами связности H на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$*.

[Таким образом, формы $\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j$ и $\overset{(\alpha)}{\theta}{}^i$ друг друга взаимно определяют. Преимущество форм $\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j$ состоит в том, что они определены на открытых множествах многообразия $\mathscr{B}$.]

В дальнейшем для сокращения формул мы будем, как правило, опускать верхний значок (α) и, например, вместо $\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j$ будем писать просто ω^i_j. Когда же придется одновременно рассматривать две окрестности U_α и U_β, то значок (β) мы будем заменять штрихами у координат и вместо, скажем, $\overset{(\beta)}{\omega}{}^i_j$ будем писать $\omega^{i'}_{j'}$. Это согласуется с принятым выше (см., например, формулы (4)) обозначением локальных координат в $\mathscr{E}_{U_\beta}$ символами $a^{i'}$ и $x^{k'}$.

Через $\varphi^{i'}_i(\boldsymbol{x}) = \varphi^{i'}_i(x^1, \ldots, x^n)$ или просто $\varphi^{i'}_i$ мы будем обозначать элементы матрицы $\varphi_{\beta\alpha}(b)$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, рассматриваемые как функции локальных координат $x^1, \ldots, x^n$ карты (U_α, h_α), а через $\varphi^i_{i'}(\boldsymbol{x}) = \varphi^i_{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ или просто $\varphi^i_{i'}$ — элементы обратной матрицы $\varphi_{\beta\alpha}(b)^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}(b)$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, рассматриваемые как функции локальных координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ карты (U_β, h_β).

Предложение 4. *Пусть для каждого α на окрестности U_α задано n^2m гладких функций Γ^i_{kj}. Эти функции тогда и только тогда являются коэффициентами некоторой связности H, когда для любых α и β на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ имеют место равенства*

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{kj} + \varphi^{i'}_i \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}}. \tag{17}$$

Доказательство. На пересечении $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta}$ локальные координаты a^i, x^k и $a^{i'}, x^{k'}$ связаны соотношениями вида

$$a^i = \varphi^i_{i'}(\boldsymbol{x}) a^{i'}, \qquad i, i' = 1, \ldots, n,$$
$$x^k = x^k(\boldsymbol{x}'), \qquad k = 1, \ldots, m$$

(ср. формулы (4); мы теперь предпочли выразить координаты на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ через координаты на $\mathscr{E}_{U_\beta}$). Поэтому

$$da^i = \frac{\partial \varphi^i_{i'}}{\partial x^{k'}} a^{i'} dx^{k'} + \varphi^i_{i'} da^{i'}, \qquad i, i' = 1, \ldots, n,$$
$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx^{k'}, \qquad k, k' = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, любая форма на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$, имеющая вид

$$\theta^i = da^i + \Gamma^i_{kj} a^j dx^k,$$

выражается на $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta}$ через дифференциалы $da^{i'}$ и $dx^{k'}$

по формуле

$$\theta^i = \varphi^i_{i'} da^{i'} + \left(\Gamma^i_{kj}\varphi^j_{j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}}\right) a^{j'}\, dx^{k'}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi^{i'}_i\theta^i = da^{i'} + \varphi^{i'}_i\left(\varphi^j_{j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{kj} + \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}}\right) a^{j'}\, dx^{k'}. \tag{18}$$

Функции Γ^i_{kj} однозначно определяют на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ формы θ^i и, значит, некоторую связность H_α. Аналогично, функции $\Gamma^{i'}_{k'j'}$ определяют на U_β связность H_β. При этом, связности H_α тогда и только тогда склеиваются в единую связность H, определенную на всем $\mathscr{E}$, когда для любых α и β имеет место равенство

$$H_\alpha = H_\beta \qquad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta. \tag{19}$$

Поскольку же формы (18) определяют на $U_\alpha \cap U_\beta$ ту же связность H_α, что и формы θ^i, равенство (19) имеет место тогда и только тогда, когда формы (18) совпадают на $U_\alpha \cap U_\beta$ с формами

$$\theta^{i'} = da^{i'} + \Gamma^{i'}_{k'j'} a^{j'}\, dx^{k'},$$

определяющими связность H_β. Это, очевидно, доказывает предложение 4. □

Поскольку $\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx^{k'} = dx^k$ и $\frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}} dx^{k'} = d\varphi^i_{j'}$, формулу (17) можно переписать в следующем более простом виде:

$$\omega^{i'}_{j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'}\omega^i_j + \varphi^{i'}_i d\varphi^i_{j'}. \tag{17'}$$

В матричных обозначениях эти соотношения имеют вид

$$\omega' = \varphi^{-1}\omega\varphi + \varphi^{-1}d\varphi, \tag{17''}$$

т. е. — если мы вернемся к исходным систематическим обозначениям — вид

$$\overset{(\beta)}{\omega} = \varphi^{-1}_{\beta\alpha}\overset{(\alpha)}{\omega}\varphi_{\beta\alpha} + \varphi^{-1}_{\beta\alpha}d\varphi_{\beta\alpha}. \tag{17'''}$$

В виде (17″) или (17‴) их и нужно запоминать.

Пусть $\varphi\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ — гладкий морфизм $\mathbb{K}$-векторного расслоения $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ в $\mathbb{K}$-векторное расслоение $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$. Тогда для любой точки $b' \in \mathscr{B}'$ имеет место коммутативная диаграмма гладких отображений

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_{b'} & \to & \mathcal{E}' & \to & \mathcal{B}' \\ \varphi_{b'}\downarrow & & \varphi\downarrow & & f\downarrow \\ \mathcal{F}_b & \to & \mathcal{E} & \to & \mathcal{B}, \end{array} \qquad b=f(b'),$$

где $f=\hat{\varphi}$ — отображение $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, индуцированное морфизмом φ. Следовательно, для любой точки $p' \in \mathcal{F}_{b'}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbf{T}_{p'}\mathcal{F}_{b'} & \to & \mathbf{T}_{p'}\mathcal{E}' & \to & \mathbf{T}_{b'}\mathcal{B}' & \to & 0 \\ & & (d\varphi_{b'})_{p'}\downarrow & & (d\varphi)_{p'}\downarrow & & (df)_{b'}\downarrow & & \\ 0 & \to & \mathbf{T}_p\mathcal{F}_b & \to & \mathbf{T}_p\mathcal{E} & \to & \mathbf{T}_b\mathcal{B} & \to & 0, \end{array} \qquad p=\varphi(p'),$$

линейных пространств и их линейных отображений, обладающая тем свойством, что обе ее строки являются точными последовательностями (левые отображения мономорфны, правые эпиморфны и образ левого отображения совпадает с ядром правого).

Предположим, что в расслоении ξ задана связность H.

Задача 6. Докажите, что

а. *Для любой точки $p' \in \mathcal{E}'$ в пространстве $\mathbf{T}_{p'}\mathcal{E}'$ существует одно и только одно подпространство $H'_{p'}$, обладающее тем свойством, что*

$$\mathbf{T}_{p'}\mathcal{E}' = \mathbf{T}_{p'}\mathcal{F}_{b'} \oplus H'_{p'},$$

и изоморфно отображающееся посредством отображения $(d\varphi)_{p'}$ на подпространство $H_p \subset \mathbf{T}_p\mathcal{E}$.

б. *Подпространства $H'_{p'}$ составляют на $\mathcal{E}'$ связность H'.*

в. *Для любой тривиализирующей окрестности $U \subset \mathcal{B}$ формами связности H' над окрестностью $f^{-1}U \subset \mathcal{B}'$ служат формы $f^*\omega_j^i$, где ω_j^i — формы связности H над окрестностью U.*

Связность H на расслоении ξ' называется *прообразом* связности H при морфизме $\varphi\colon \xi' \to \xi$ и обозначается символом φ^*H. В случае, когда $\xi' = f^*\xi$ и $\varphi = f^!$, связность φ^*H обозначается символом f^*H и называется *прообразом связности H при отображении $f\colon \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$.*

Задача 7. Докажите, что для любых гладких отображений $g\colon \mathcal{B}'' \to \mathcal{B}$ и $f\colon \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ связность $(f\circ g)^*H$ на расслоении $(f\circ g)^*\xi = g^*(f^*\xi)$ (см. задачу 2) совпадает со связностью $g^*(f^*H)$.

Понятие прообраза связности полезно, например, для характеризации связностей на овеществлении комплексного векторного расслоения ξ, возникающих из связностей на ξ.

Пусть ξ — комплексное векторное расслоение ξ и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. (Заметим, что по определению расслоение ξ гладко тогда и только тогда, когда гладко расслоение $\xi_{\mathbb{R}}$.)

Ясно, что любая связность H на ξ является связностью на $\xi_{\mathbb{R}}$, и задача состоит в том, чтобы охарактеризовать связности на $\xi_{\mathbb{R}}$, являющиеся в этом смысле связностями на ξ.

С этой целью мы рассмотрим на $\xi_{\mathbb{R}}$ оператор комплексной структуры

$$I: \xi_{\mathbb{R}} \to \xi_{\mathbb{R}}$$

(см. лекцию 6). Так как этот оператор является автоморфизмом расслоения $\xi_{\mathbb{R}}$ над $\mathcal{B}$, то для любой связности H на $\xi_{\mathbb{R}}$ определена связность I^*H (также являющаяся связностью на $\xi_{\mathbb{R}}$). С другой стороны, так как оператор I является, очевидно, гладким отображением, то для любой точки $p \in \mathcal{E}$ определен его дифференциал

$$(dI)_p\colon \mathbf{T}_p\mathcal{E} \to \mathbf{T}_p\mathcal{E},$$

являющийся на вертикальном подпространстве

$$\mathbf{T}_p\mathcal{F}_b^{\xi_{\mathbb{R}}} = (\mathbf{T}_p\mathcal{F}_b)_{\mathbb{R}} = (\mathcal{F}_b)_{\mathbb{R}},$$
$$b = \pi(p), \quad \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_b^{\xi},$$

оператором $I_b\colon (\mathcal{F}_b)_{\mathbb{R}} \to (\mathcal{F}_b)_{\mathbb{R}}$ комплексной структуры на $(\mathcal{F}_b)_{\mathbb{R}}$.

Задача 8. Докажите, что *для связности H на $\xi_{\mathbb{R}}$ следующие условия равносильны:*

а. *Связность H является связностью на ξ.*

б. *Имеет место равенство*

$$I^*H = H.$$

в. *Для любой точки $p \in \mathcal{E}$*

$$H_p = (dI)_p H_p.$$

Задача 9. Пусть ω — матрица форм связности H на расслоении ξ (над некоторой тривиализирующей окрестностью $U \subset \mathcal{B}$), а $\omega_{\mathbb{R}}$ — матрица форм той же связности, но рассматриваемой как связность на $\xi_{\mathbb{R}}$. Выразите формы $\omega_{\mathbb{R}}$ и ω друг через друга. [Указание. Матрица ω имеет размер $n \times n$ и состоит из линейных дифференциальных форм с комплексными коэффициентами, а матрица $\omega_{\mathbb{R}}$ имеет размер $2n \times 2n$ и состоит из форм с вещественными коэффициентами.]

В лекции 21 нам понадобится следующий частный случай конструкции прообраза.

Пусть для любого $s \in \mathbb{R}$ в расслоении ξ задана связность H_s. На каждой тривиализирующей координатной окрестности $U \subset \mathscr{B}$ коэффициенты Γ^i_{kj} связности H_s являются функциями от s и от локальных координат $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^m)$, т. е. функциями точки $(s, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}$. В случае, когда для любой окрестности U функции Γ^i_{kj} являются гладкими функциями от $(s, \boldsymbol{x})$, семейство $\{H_s, s \in \mathbb{R}\}$ связностей H_s называется *гладким*.

Задача 10. Пусть $\xi \times \boldsymbol{I} = \{\mathscr{E} \times \boldsymbol{I}, \pi \times \mathrm{id}, \mathscr{B} \times \boldsymbol{I}\}$. Покажите, что

а. *Расслоение* $\xi \times \boldsymbol{I}$ *является векторным расслоением ранга* n, *изоморфным расслоению* $(\mathrm{pr})^* \xi$, *где* pr — *проекция*

$$\mathscr{B} \times \boldsymbol{I} \to \mathscr{B}, \quad (b, s) \mapsto b.$$

б. *Любое гладкое семейство* $\{H_s\}$ *связностей на* ξ *естественным образом задает связность на* $\xi \times \boldsymbol{I}$ (*которую мы будем обозначать тем же символом* $\{H_s\}$).

в. *Для любого* $s_0 \in \boldsymbol{I}$ *имеют место равенства*

$$i^*_{s_0}(\xi \times \boldsymbol{I}) = \xi \quad \text{и} \quad i^*_{s_0}\{H_s\} = H_{s_0},$$

где $i_{s_0}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B} \times \boldsymbol{I}$ — *вложение* $b \mapsto (b, s_0)$.

Для каждой связности H на ξ связность $\mathrm{pr}^* H$ является связностью $\{H_s\}$, где $H_s = H$ при всех $s \in \mathbb{R}$.

Заметим, что связности вида $\{H_s\}$ отнюдь не исчерпывают всех связностей на $\xi \times \boldsymbol{I}$.

Задача 11. Покажите, что связность $\mathrm{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ на $\xi \times \boldsymbol{I}$ тогда и только тогда имеет вид $\{H_s\}$, когда формы $\theta^1, \ldots, \theta^n$ не зависят от ds.

Пусть теперь $\{H^t_s\}$ — гладкое семейство связностей на расслоении $\xi \times \boldsymbol{I}$ и пусть Δ — отображение $\mathscr{B} \times \boldsymbol{I} \to \mathscr{B} \times \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I}$, определенное формулой

$$\Delta(b, t) = (b, t, t), \qquad b \in \mathscr{B}, \ t \in \boldsymbol{I}.$$

Тогда, интерпретируя $\{H^t_s\}$ как связность на $\xi \times \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I}$, мы можем построить связность $\Delta^* \{H^t_s\}$ на $\xi \times \boldsymbol{I}$. Эту связность мы будем обозначать символом $\{H^t_s\}_{s=t}$ и будем называть ее *диагонализацией* связности $\{H^t_s\}$.

Задача 12. Докажите, что для любого $t \in \boldsymbol{I}$

$$i^*_t \{H^t_s\}_{s=t} = i^*_t H^t_t. \tag{18}$$

[Указание. Ср. утверждение в задачи 10.]