Лекция 11

Горизонтальные кривые.— Ковариантные производные сечений.— Ковариантное дифференцирование вдоль кривой.— Связности как ковариантные дифференцирования.— Линейные отображения модулей сечений.— Связности на метризованных расслоениях.

Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — гладкое векторное расслоенне со связностью H.

Определение 1. Гладкая кривая $v\colon I\to\mathscr{E}$ на многообразии $\mathscr{E}$, где I — некоторый отрезок оси $\mathbb{R}$ (для определенности можно, например, считать, что $I=\boldsymbol{I}$), называется *горизонтальной*, если для любого $t\in I$ ее касательный вектор $\dot v(t)$ принадлежит подпространству $H_{v(t)}$. (Дифференцирование по t мы здесь и в дальнейшем обозначаем точкой.)

В локальных координатах

$$a^1, \ldots, a^n, x^1, \ldots, x^m \tag{1}$$

карты $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ (см. лекцию 10) каждая кривая v имеет — при условии, что $v(t)\in\mathscr{E}_{U_\alpha}$ при всех $t\in I$ — параметрические уравнения вида

$$a^i=a^i(t),\quad x^k=x^k(t),\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant k\leqslant m, \tag{2}$$

где $a^i(t)$ и $x^k(t)$ — некоторые гладкие функции на I. Ее касательный вектор $\dot v(t)$ имеет координаты

$$\dot a^1(t), \ldots, \dot a^n(t),\quad \dot x^1(t), \ldots, \dot x^n(t),$$

а условие горизонтальности $\dot v(t)\in H_{v(t)}$ (означающее, что выполнены равенства $\theta^i_{v(t)}(\dot v(t))=0$, $1\leqslant i\leqslant n$, где $\theta^1, \ldots$ $\ldots, \theta^n$ — формы связности H на $\mathscr{E}_{U_\alpha}$) приобретает вид

$$\dot a^i(t)-\Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))\,\dot x^k(t)\,a^j(t)=0,\quad i=1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{x}(t)=(x^1(t), \ldots, x^m(t))$.

Таким образом, *кривая v с параметрическими уравнениями* (2) *тогда и только тогда горизонтальна, когда тождественно по t выполнены соотношения* (3).

В соответствии с общим определением 3 лекции 4 кривая $u=\pi\circ v$ на многообразии $\mathscr{B}$ называется *проекцией* кривой v, а кривая v на многообразии $\mathscr{E}$ — *поднятием* (или *лифтом*) кривой u. Говорят также, что кривая v *накрывает* кривую u. Иногда полезно представлять себе кривую v как векторное поле на кривой u, сопоставляющее каждой точке $u(t)$ этой кривой вектор $v(t)$ линеала $\mathcal{F}_{v(t)}$, т. е., короче, как *ξ-векторное поле* на u. Горизонтальная кривая v, рассматриваемая как поле на u, называется *полем параллельных векторов на u* (относительно связности H).

В локальных координатах $x^1, \ldots, x^m$ на U_α кривая u имеет параметрические уравнения

$$x^k = x^k(t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{4}$$

так что аналитически переход к кривой u состоит в отбрасывании первых n уравнений (2), и наоборот, переход к накрывающей кривой v состоит в добавлении к m уравнениям (4) дополнительных n уравнений

$$a^i = a^i(t), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{5}$$

где $a^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$,— вообще говоря, произвольные гладкие $\mathbb{K}$-значные функции на I. В интерпретации кривой v как ξ-векторного поля на u функции $a^i(t)$ называются его *компонентами* (в данной системе локальных координат).

С этой точки зрения соотношения (3) представляют собой при данной кривой u с уравнениями (4) систему линейных дифференциальных уравнений (вообще говоря, с переменными коэффициентами $\Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))\,\dot{x}^k(t)$) для дополнительных функций (5). Поэтому, задав для некоторой точки $t_0 \in I$ точку p_0 пространства $\mathcal{E}$, проектирующуюся в точку $b_0 = u(t_0)$, т. е. принадлежащую слою $\mathcal{F}_{b_0}$ расслоения ξ, мы — в предположении, что $u(t) \in U_\alpha$ для всех $t \in I$ — получим в силу теоремы о существовании и единственности решений линейных дифференциальных уравнений единственную горизонтальную кривую $v\colon I \to \mathcal{E}$, проектирующуюся в кривую u и такую, что $v(t_0) = p_0$ (и $v(t) \in \mathcal{E}_{U_\alpha}$ для всех $t \in I$).

Если же условие $u(t) \in U_\alpha$ для всех $t \in I$ не выполнено, то мы можем разбить отрезок I на конечное число отрезков, на каждом из которых это условие уже имеет место (конечно, при своем α), и следовательно, накрывающая горизонтальная кривая существует. Вместе эти кривые составляют (очевидно, гладкую) кривую v, накрывающую всю кривую u (и такую, что $v(t_0) = p_0$). В предположении, что многообразие $\mathcal{E}$ хаусдорфово, эта кривая будет, как легко видеть, единственна. (Ср. теорему о единственности интегральных кривых векторного поля в лекции III.17.)

Поскольку многообразие $\mathscr{E}$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда хаусдорфово многообразие $\mathscr{B}$, этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Если многообразие $\mathscr{B}$ хаусдорфово, то для любой гладкой кривой $u\colon I\to\mathscr{B}$ любой точки $t_0\in I$ и любой точки $p_0\in\mathscr{F}_{b_0}$, $b_0=u(t_0)$, существует единственная горизонтальная кривая $v\colon I\to\mathscr{E}$, накрывающая кривую u и такая, что $v(t_0)=p_0$.* □

При $I=\boldsymbol{I}$ и $t_0=0$ это дает нам некоторое отображение

$$\operatorname{Cocyl}_{\text{гл}}\pi\to\mathscr{P}_{\text{гл}}(\mathscr{E})$$

подпространства $\operatorname{Cocyl}_{\text{гл}}\pi$ пространства $\operatorname{Cocyl}\pi$, состоящего из пар (p_0, u), $\pi(p_0)=u(0)$, для которых путь u гладок, в пространство $\mathscr{P}_{\text{гл}}(\mathscr{E})$ всех гладких путей на $\mathscr{E}$, являющееся сечением отображения

$$\mathscr{P}_{\text{гл}}(\mathscr{E})\to\operatorname{Cocyl}_{\text{гл}}\pi,\quad v\mapsto(v(0),\ \pi\circ v),$$

т. е. представляющее собой «гладкий» аналог связности в смысле Гуревича (см. лекцию 1). Это объясняет термин «связность» применительно к H.

К изучению геометрических свойств горизонтальных накрывающих кривых мы вернемся в лекции 18, а пока применим эти кривые к задаче об инвариантном определении связности, не использующем тривиализирующих координатных окрестностей.

Сечение

$$s\colon\mathscr{B}\to\mathscr{E}$$

гладкого векторного расслоения $\xi=(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$ (или, в другой терминологии, ξ-векторное поле на $\mathscr{B}$) называется *гладким*, если оно представляет собой гладкое отображение многообразия $\mathscr{B}$ в многообразие $\mathscr{E}$. В отличие от лекции 6 мы будем теперь обозначать символом $\Gamma\xi$ множество лишь гладких сечений. Оно является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$ и модулем над алгеброй $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$ гладких $\mathbb{K}$-значных функций на $\mathscr{B}$.

Задача 1. Докажите, что тривиализация $\varphi\colon U\times\mathbb{K}^n\to\mathscr{E}_U$ расслоения ξ над открытым множеством $U\subset\mathscr{B}$ тогда и только тогда является гладкой тривиализацией, когда отвечающий ей базис $s_1,\ldots,s_n$ модуля всех непрерывных сечений над U состоит из гладких сечений.

Замечание 1. Так как $\pi\circ s=\mathrm{id}$, то как само отображение s, так и его дифференциал $(ds)_b$ в каждой точке

$b \in \mathcal{B}$ являются инъективными отображениями. Это означает, что для любого *гладкого сечения* $s\colon \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ *множество* $s(\mathcal{B})$ *является подмногообразием многообразия* $\mathcal{E}$. Подмногообразия вида $s(\mathcal{B})$ характеризуются, как легко видеть, тем, что проекция π диффеоморфно отображает их на многообразие $\mathcal{B}$ (такие подмногообразия называются обычно *секущими поверхностями* расслоения ξ). При неформальных рассмотрениях сечения и секущие поверхности можно отождествлять.

В случае касательного расслоения $\tau_{\mathcal{B}} = (\mathbf{T}\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$ сечения представляют собой не что иное, как векторные поля на $\mathcal{B}$. Согласно лекции III.16 модуль $\Gamma\tau_{\mathcal{B}}$ векторных полей на $\mathcal{B}$ обозначается символом $\mathfrak{a}\mathcal{B}$.

Напомним (см. лекцию III. 17), что кривая $u\colon I \to \mathcal{B}$ называется *интегральной кривой* векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$, если

$$\dot{u}(t) = X_{u(t)} \qquad \text{для любого } t \in I.$$

Согласно теореме 1 лекции III.17 для любой точки $b \in \mathcal{B}$ и любого векторного поля X существует интегральная кривая $u\colon I \to \mathcal{B}$ поля X, определенная на некотором интервале I оси $\mathbb{R}$, содержащем точку 0, и такая, что $u(0) = b$. При этом если многообразие X хаусдорфово, то любые две такие кривые совпадают на общей части их областей определения.

Пусть теперь $s\colon \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ — произвольное гладкое сечение расслоения ξ и пусть $v\colon I \to \mathcal{E}$ — горизонтальная кривая, накрывающая интегральную кривую u поля X и удовлетворяющая соотношению

$$v(0) = s(b).$$

Тогда для любого $t \in I$ в слое $\mathcal{F}_{u(t)}$ расслоения будут определены два вектора $s(u(t))$ и $v(t)$, а значит и при $t \neq 0$ и вектор

$$\frac{s(u(t)) - v(t)}{t}. \tag{6}$$

Хотя при различных t векторы (6) принадлежат, вообще говоря, различным линеалам $\mathcal{F}_{u(t)}$, но все же имеет смысл говорить об их пределе

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(u(t)) - v(t)}{t}. \tag{7}$$

Этот предел принадлежит слою $\mathcal{F}_{u(0)} = \mathcal{F}_b$ и обозначается символом $(\nabla_X s)(b)$.

Поскольку точка b была произвольной точкой многообразия $\mathscr{B}$, эта конструкция дает нам отображение

$$\nabla_X s\colon\ b \mapsto (\nabla_X s)(b)$$

из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{E}$, являющееся, по построению, сечением расслоения ξ.

Определение 2. Сечение $\nabla_X s$ называется *ковариантной производной сечения s по векторному полю X* (в данной связности H).

Первый вопрос, возникающий в связи с сечением $\nabla_X s$,— это вопрос о его гладкости. Мы покажем, что ответ на этот вопрос утвердителен (точнее, что класс гладкости сечения $\nabla_X s$ на единицу ниже класса гладкости сечения s), вычислив в явном виде сечение $\nabla_X s$ в координатах.

Пусть U — произвольная координатная и одновременно тривиализирующая окрестность точки b в многообразии $\mathscr{B}$. Тривиализация $\varphi\colon U\times\mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_U$ расслоения ξ над U задает (см. лекцию 6) базис

$$s_1, \ldots, s_n \tag{8}$$

$\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$ (для которого $s_i(b)=\varphi(b, e_i)$, $i=1, \ldots$ $\ldots, n$), а координатный диффеоморфизм $h\colon U\to\mathbb{K}^m$ — базис

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x^m}, \qquad m=\dim\mathscr{B}, \tag{9}$$

$\mathsf{F}_{\mathbb{R}}U$-модуля $\mathfrak{a}U$. Пусть s^i, $i=1, \ldots, n$, — координаты сечения s (или, точнее, его ограничения $s|_U$) в базисе (8), а X^k, $k=1, \ldots, m$, — координаты поля X (т. е. его ограничения $X|_U$) в базисе (9):

$$s=s^i s_i, \quad X=X^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Пусть, далее, $x^k=x^k(t)$, $k=1, \ldots, m$, — параметрические уравнения интегральной кривой $u\colon I\to\mathscr{B}$, а

$$a^i=a^i(t), \quad x^k=x^k(t), \quad i=1, \ldots, n; \quad k=1, \ldots, m,$$

— параметрические уравнения ее горизонтального поднятия $v\colon I\to\mathscr{E}$. (Без ограничения общности мы можем, конечно, предполагать, что $u(t)\in U$ для любого t.) Заметим, что числа $a^i(t)$ выражаются формулой

$$a^i(t)=s^i(\boldsymbol{x}(t)),$$

где, как всегда, $\boldsymbol{x}(t)=(x^1(t), \ldots, x^m(t))$, и удовлетворяют соотношению $v(t)=a^i(t)\,s_i(u(t))$, т. е. являются координатами вектора $v(t) \in \mathcal{F}_{u(t)}$ в базисе $s_1(u(t)), \ldots, s_n(u(t))$ линеала $\mathcal{F}_{u(t)}$. По определению

$$\dot{x}^k(t) = X^k(x(t))$$

для любого $k = 1, \ldots, m$ и

$$\dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{kj}(x(t))\, a^j(t)\, \dot{x}^k(t) = 0,$$

т. е.

$$\dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{kj}(x(t))\, a^j(t)\, X^k(x(t)) = 0$$

для любого $i = 1, \ldots, n$. При этом вектор (6) линеала $\mathcal{F}_{u(t)}$ будет иметь в базисе $s_1(u(t)), \ldots, s_n(u(t))$ координаты

$$\frac{s_i(x(t)) - a^i(t)}{t} = \frac{s^i(x(t)) - a_0^i}{t} - \frac{a^i(t) - a_0^i}{t},$$

где $a_0^i = a^i(0) = s^i(x(0))$ — координаты точки $s(b)$ линеала $\mathcal{F}_b$. Поэтому предел (7) будет иметь координаты

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{s^i(x(t)) - s^i(x(0))}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{a^i(t) - a_0^i}{t} &= \\ = \frac{\partial s^i}{\partial x^k}(x(0))\, \dot{x}^k(0) - \dot{a}^i(0) &= \\ = \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^k} X^k + \Gamma^i_{kj} s^j X^k\right](x(0)).\end{aligned}$$

Поскольку $x(0)$ — это строчка координат точки b, тем самым доказано, что *сечение* $\nabla_X s$ *над* U *имеет в базисе* (8) *координаты*

$$(\nabla_X s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) X^k, \tag{10}$$

т. е.

$$\nabla_X s = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) X^k s_i \qquad \text{над } U. \tag{11}$$

В частности, мы видим, что *для гладкого сечения* s *сечение* $\nabla_X s$ *также гладко.*

Конечно, оператор $\nabla_X\colon \Gamma(\xi|_U) \to \Gamma(\xi|_U)$ определен и для любого векторного поля X над U; например, при $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $k = 1, \ldots, n$.

При $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ оператор ∇_X обозначается символом ∇_k и сечение $\nabla_k s$ называется *частной ковариантной производной по* x_k сечения $s \in \Gamma(\xi|_U)$. Для любого поля X

$$\nabla_X s = X^k \nabla_k s.$$

Согласно формуле (10) координаты $(\nabla_k s)^i$ сечения $\nabla_k s$ в базисе $s_1, \ldots, s_n$ выражаются через координаты s^i сечения s по формуле

$$(\nabla_k s)^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n;\ 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{12}$$

В частности,

$$(\nabla_k s_j)^i = \Gamma^i_{kj}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n;\ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{13}$$

и значит

$$(\nabla_X s_j)^i = \omega^i_j(X), \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{13'}$$

Замечание 2. Формулы (10) и/или (11) можно положить в основу определения сечения $\nabla_X s$. Однако при этом необходимо проверить согласованность конструируемых сечений на пересечениях, т. е. совпадение сечений (11), построенных над двумя окрестностями U и U' на их пересечении $U \cap U'$. Это делается следующим образом.

Объекты, построенные для окрестности U', мы будем отмечать штрихами при индексах (например, $s_{1'}, \ldots, s_{n'}$ — это базис (8) для модуля $\Gamma(\xi|_{U'})$, а $x^{1'}, \ldots, x^{m'}$ — это локальные координаты в U'). Тогда сечение $\nabla_X s$ над окрестностью U' будет задаваться формулой

$$\nabla_X s = \left(\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^{k'}} + \Gamma^{i'}_{j'k'} s^{j'}\right) X^{k'} s_{i'} \qquad \text{над } U'$$

и задача состоит в том, чтобы доказать, что над $U \cap U'$ это сечение совпадает с сечением (11).

Но, по определению, над $U \cap U'$ имеют место равенства

$$s_{i'} = \varphi^i_{i'} s_i \quad \text{и} \quad s^{i'} = \varphi^{i'}_i s^i, \quad i,\ i' = 1, \ldots, n,$$

где $\varphi^i_{i'}$ и $\varphi^{i'}_i$ — компоненты взаимно обратных матричных функций перехода $U \cap U' \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ (от U к U' и от U' к U), а также равенства

$$X^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} X^k$$

и

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \varphi^{i'}_i \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}},$$

$$k,\ k' = 1, \ldots, m;$$

$$i,\ i',\ j,\ j' = 1, \ldots, n$$

Поэтому над $U \cap U'$

$$\begin{aligned}
\nabla_X s\,|_{U'} &= \\
&= \left[\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^{k'}} + \left(\varphi_i^{i'} \varphi_{j'}^{p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}} \Gamma_{pq}^i + \varphi_i^{i'} \frac{\partial \varphi_{j'}^i}{\partial x^{k'}}\right) \varphi_j^{j'} s^j\right] \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} X^k s_{i'} = \\
&= \left[\frac{\partial (\varphi_i^{i'} s^i)}{\partial x^k} + \left(\varphi_i^{i'} \varphi_{j'}^{p} \Gamma_{pk}^i + \varphi_i^{i'} \frac{\partial \varphi_{j'}^i}{\partial x^k}\right) \varphi_j^{j'} s^j\right] X^k \varphi_{i'}^l s_l = \\
&= \left[\frac{\partial \varphi_i^{i'}}{\partial x^k} s^i \varphi_{i'}^l + \varphi_i^{i'} \varphi_{i'}^l \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\varphi_i^{i'} \varphi_{i'}^l \varphi_{j'}^p \varphi_j^{j'} \Gamma_{pk}^i + \varphi_i^{i'} \varphi_j^{j'} \varphi_{i'}^l \frac{\partial \varphi_{j'}^i}{\partial x^k}\right) s^j\right] X^k s_l = \\
&= \left[\left(\frac{\partial \varphi_j^{i'}}{\partial x^k} \varphi_{i'}^l + \varphi_j^{j'} \frac{\partial \varphi_{j'}^l}{\partial x^k}\right) s^j + \left(\frac{\partial s^l}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^l s^j\right)\right] X^k s_l = \\
&= \left[\frac{\partial (\varphi_j^{i'} \varphi_{i'}^l)}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial s^l}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^l s^j\right)\right] X^k s_l = \\
&= \left(\frac{\partial s^l}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^l s^j\right) X^k s_l = \nabla_X s\,|_U,
\end{aligned}$$

ибо $\varphi_i^{i'} \varphi_{i'}^l = \delta_i^l$ $\left(\text{и значит, в частности, } \dfrac{\partial (\varphi_j^{i'} \varphi_{i'}^l)}{\partial x^k} = 0\right)$. □

Интересный вариант ковариантного дифференцирования возникает для ξ-векторных полей на кривых.

Пусть $u\colon I \longrightarrow \mathscr{B}$ — кривая в многообразии $\mathscr{B}$ с локальными уравнениями $x^k = x^k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и $v\colon I \longrightarrow \mathscr{E}$ — произвольное ξ-векторное поле на u с компонентами $a^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Мы определим новое ξ-векторное поле на u, которое называется *ковариантной производной поля* v вдоль u и обозначается символом $\dfrac{\nabla v}{dt}$. По определению это поле имеет компоненты

$$\left(\frac{\nabla v}{dt}\right)^i = \dot{a}^i(t) + \Gamma_{kj}^i(x(t))\, \dot{x}^k(t)\, a^j(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Задача 2. Предположим, что ξ-векторное поле v является ограничением на u некоторого сечения, т. е. существует такое сечение $s\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{E}$ расслоения ξ, что $v(t) = s(u(t))$ для любого $t \in I$. Предположим также, что и поле $t \longmapsto \dot{u}(t)$ касательных векторов на кривой u является ограничением некоторого поля на многообразии $\mathscr{B}$, т. е. существует такое векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$, что $X_{u(t)} = \dot{u}(t)$ для любого $t \in I$ (кривая u представляет собой интегральную кривую поля X). Покажите, что *тогда поле* $\dfrac{\nabla v}{dt}$ *на* u *является ограничением сечения* $\nabla_X s$.

[Заметим, что сечение s и поле X заведомо существуют локально, т. е. в окрестности произвольной точки вида $u(t_0)$ (для которой $\dot{u}(t_0) \neq 0$).]

Пусть $\mathring{I}$ — внутренность отрезка I. Так как $\mathring{I}$ является гладким многообразием (а $u\colon \mathring{I} \to \mathscr{B}$ — гладким отображением), то над $\mathring{I}$ определено гладкое расслоение $u^*\xi$ со связностью u^*H.

Задача 3. Покажите, что

а. *Каждое ξ-векторное поле $v\colon I \to \mathscr{E}$ на кривой и естественным образом отождествляется с некоторым сечением расслоения $u^*\xi$ над $\mathring{I}$.*

б. *Ковариантная производная этого сечения по векторному полю $\frac{d}{dt}$ на $\mathring{I}$ относительно индуцированной связности u^*H является не чем иным, как ограничением на I ковариантной производной $\frac{\nabla v}{dt}$ поля v вдоль кривой u.*

Сравнение формулы (14) с формулой (3) немедленно обнаруживает, что *равенство $\frac{\nabla v}{dt} = 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы v было полем параллельных ξ-векторов* (в другой интерпретации — *горизонтальной кривой*).

Таким образом, можно сказать, что *векторы, параллельные вдоль кривой, — это в точности векторы, ковариантно постоянные.*

Операция ковариантного дифференцирования ∇_X представляет собой отображение

$$\nabla_X\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi$$

модуля $\Gamma\xi$ в себя.

Предложение 2. *Операция ∇_X обладает следующими тремя свойствами:*

а. *Операция ∇_X линейна над полем $\mathbb{K}$, т. е.*

$$\nabla_X(s+t) = \nabla_X s + \nabla_X t,$$
$$\nabla_X(\lambda s) = \lambda \nabla_X s$$

для любых сечений s, $t \in \Gamma\xi$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{K}$.

б. *Для любой функции $f \in \mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma\xi$ имеет место равенство*

$$\nabla_X(fs) = Xf \cdot s + f\nabla_X s \tag{15}$$

(где при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ под X справа имеется в виду комплексификация оператора X над $\mathsf{F}\mathscr{B} = \mathsf{F}_{\mathbb{R}}\mathscr{B}$).

в. *Операция* ∇_X *линейно над* $\mathsf{F}\mathscr{B}$ *зависит от* X, *т. е.*

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ *и любых функций* $f, g \in \mathsf{F}\mathscr{B}$.

Доказательство. Свойства **а** и **в** непосредственно вытекают из формулы (10) и/или (11). (Правые части этих формул $\mathbb{K}$-линейно зависят от s и $\mathsf{F}\mathscr{B}$-линейно от X.) Свойство **б** проверяется простой выкладкой:

$$\begin{aligned}
[\nabla_X(fs)]^i &= \left[\frac{\partial(fs^i)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj}\cdot fs^j\right]X^k = \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x^k}s^i + f\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + f\Gamma^i_{kj}s^j\right]X^k = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}X^k\right)s^i + f\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj}s^j\right)X^k = \\
&= Xf\cdot s^i + f\cdot(\nabla_X s)^i
\end{aligned}$$

$\left(\text{напомним, что } Xf = \frac{\partial f}{\partial x^k}X^k \text{ на } U\right)$. □

Формула (15) аналогична известной формуле Лейбница дифференцирования произведения (и переходит в нее, если Xf обозначить через $\nabla_X f$).

Снова предположим, что гладкое (класса C^∞) многообразие $\mathscr{B}$ хаусдорфово.

Теорема 1. *Пусть каждому полю* $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ *поставлен в соответствие оператор*

$$\nabla_X\colon \Gamma\xi \longrightarrow \Gamma\xi, \tag{16}$$

обладающий свойствами **а**, **б** *и* в *из предложения* 2. *Тогда на расслоении* ξ *существует единственная связность* H, *по отношению к которой операторы* (16) *являются ковариантными производными.*

Таким образом, для хаусдорфова многообразия $\mathscr{B}$ связности на гладком векторном расслоении $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ находятся в естественном биективном соответствии с $\mathsf{F}\mathscr{B}$-линейными отображениями $\nabla\colon X \longmapsto \nabla_X$, сопоставляющими каждому векторному полю $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ линейный оператор

$$\nabla_X\colon \Gamma\xi \longrightarrow \Gamma\xi,$$

удовлетворяющий формуле Лейбница (15). На этом основании связности часто определяются как такого рода отображения ∇ (которые также называются *ковариантными дифференцированиями*). Недостатком этого определения является отсутствие геометрической наглядности, а преимуществом — инвариантность (в нем не используются тривиализирующие координатные окрестности).

В дальнейшем мы, как правило, будем отождествлять связность H и соответствующее дифференцирование ∇. В частности, вместо «связность, которой отвечает ковариантное дифференцирование ∇» мы будем говорить «связность ∇».

Теорема 1 аналогична теореме 1 лекции III. 16 и доказывается сходным образом.

Лемма 1. *Для любого открытого множества $U \subset \mathscr{B}$, любой точки $b_0 \in U$ и любого сечения $s \in \Gamma(\xi|_U)$ существуют такое сечение $s' \in \Gamma\xi$ и такая окрестность W точки b_0, что $\overline{W} \subset U$ и*

$$s = s' \quad \text{на } W.$$

Кроме того, $s' = 0$ вне U.

(Ср. лемму 1 лекции III. 16.)

Доказательство. Согласно предложению 2 лекции III.13 в $\mathscr{B}$ найдутся такие открытые множества V и W, что

$$b_0 \in W, \quad \overline{W} \subset V, \quad \overline{V} \subset U,$$

и для пары (V, W) существует функция Урысона φ. Для любой точки $b \in \mathscr{B}$ положим

$$s'(b) = \begin{cases} \varphi(b)\, s(b), & \text{если } b \in U \\ 0, & \text{если } b \notin U. \end{cases}$$

Ясно, что s'. является гладким сечением (принадлежит $\Gamma\xi$), совпадает с s на W и обращается в нуль вне U. □

Будем говорить, что сечения $s', s'' \in \Gamma\xi$ *совпадают вблизи точки* $b_0 \in \mathscr{B}$, если они принимают одинаковые значения в некоторой окрестности этой точки.

Лемма 2. *Если сечения $s', s'' \in \Gamma\xi$ совпадают вблизи точки $b_0 \in \mathscr{B}$, то для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ сечения $\nabla_X s'$ и $\nabla_X s''$ также совпадают вблизи точки b_0.*

(Ср. следствие 2 леммы 1 лекции III.16.)

Доказательство. Пусть $s' = s''$ на окрестности U точки b_0. Согласно следствию 1 леммы 1 лекции III.16 существуют такая окрестность $W \subset U$ точки b_0 и такая гладкая на $\mathscr{B}$ функция φ, что

$$\varphi(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } b \in W, \\ 0, & \text{если } b \notin U. \end{cases}$$

Рассмотрим сечение $\varphi\cdot(s'-s'')$. Ясно, что это сечение равно нулю на всем $\mathscr{B}$, т. е. является нулем линеала $\Gamma\xi$. Поэтому — в силу линейности оператора ∇_X — нулем будет и сечение

$$(17)\qquad \nabla_X(\varphi\cdot(s'-s''))=X\varphi\cdot(s'-s'')+\varphi\cdot(\nabla_X(s'-s'')).$$

Поскольку $s'=s''$ и $\varphi=1$ на W, отсюда следует, что

$$\nabla_X(s'-s'')=0 \quad \text{на } W,$$

т. е. $\nabla_X s'=\nabla_X s''$ на W. □

Это свойство операторов ∇_X называется их *локальностью по s*.

Аналогично доказывается локальность операторов ∇_X по X, т. е. тот факт, что *для любых векторных полей* X', $X''\in\mathfrak{a}\mathscr{B}$, *совпадающих вблизи точки* $b_0\in\mathscr{B}$, *операторы* $\nabla_{X'}$ *и* $\nabla_{X''}$ *совпадают вблизи этой точки* (обладают тем свойством, что $\nabla_{X'}s=\nabla_{X''}s$ вблизи b_0 для каждого сечения $s\in\Gamma\xi$). [Для доказательства достаточно рассмотреть поле $\varphi\cdot(X'-X'')$.]

Лемма 3. *Для любого открытого множества* $U\subset\mathscr{B}$ *операторы* (16), *обладающие свойствами* **а, б** *и* **в** *из предложения* 2, *индуцируют единственные операторы*

$$(18)\qquad (\nabla|_U)_X\colon \Gamma(\xi|_U)\to\Gamma(\xi|_U),\qquad X\in\mathfrak{a}U,$$

также обладающие свойствами **а, б** *и* **в** (*по отношению к алгебре* $\mathsf{F}U$) *и такие, что для каждого поля* $X\in\mathfrak{a}\mathscr{B}$ *имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}\Gamma\xi & \xrightarrow{\nabla_X} & \Gamma\xi\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Gamma(\xi|_U) & \xrightarrow{(\nabla|_U)_X} & \Gamma(\xi|_U),\end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются отображениями ограничения, т. е. такие, что

$$(19)\qquad ((\nabla|_U)_{X|_U})\,s=(\nabla_X s)|_U$$

для любого сечения $s\in\Gamma\xi$).

(Ср. предложение 1 лекции III.16.)

Доказательство. Как всегда, докажем сначала единственность. Пусть операторы (18) существуют и пусть $s\in\Gamma(\xi|_U)$, $X\in\mathfrak{a}U$. Согласно лемме 1 и замечанию 1 лекции III.16 для любой точки $b_0\in U$ существует сечение

$s' \in \Gamma\xi$ и векторное поле $X' \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$, совпадающие вблизи этой точки с сечением s и полем X соответственно. При этом согласно свойству (19)

$$[(\nabla|_U)_X(s)](b_0) = [\nabla_{X'}s'](b_0). \tag{20}$$

Это доказывает единственность операторов $(\nabla|_U)_X$, так как в силу локальности операторов ∇_X по s и по X правая часть этой формулы не зависит от выбора сечения s' и поля X'.

Для доказательства существования операторов $(\nabla|_U)_X$ мы примем формулу (20) за определение сечения $(\nabla|_U)_X(s)$. Другими словами, если $X = X'$ и $s = s'$ на W, то мы положим

$$(\nabla|_U)_X(s) = \nabla_{X'}(s') \text{ на } W.$$

Без труда проверяется (сделайте это!), что эта формула корректно определяет операторы (18), обладающие всеми нужными свойствами. □

Для упрощения формул мы, как правило, вместо $\nabla|_U$ будем в дальнейшем писать просто ∇.

Теперь мы уже можем доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть связность H существует.

Рассмотрим произвольную тривиализирующую окрестность $U \subset \mathcal{B}$ и на ней сечения $s_1, \ldots, s_n$, составляющие базис $\mathsf{F}_\mathbf{K}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$, а также векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n},$$

составляющие базис $\mathsf{F}U$-модуля $\mathfrak{a}U$. Согласно формуле (13) при любых $i, j = 1, \ldots, n$ и $k = 1, \ldots, m$ для коэффициентов Γ^i_{kj} связности H имеет место равенство

$$\Gamma^i_{kj} = (\nabla_k s_j)^i. \tag{21}$$

Это доказывает единственность связности H (на U, а потому — в силу произвольности U — и на всем $\mathcal{B}$).

Для доказательства существования этой связности мы определим коэффициенты Γ^i_{kj} на U посредством формулы (21). Пусть U' — другая тривиализирующая координатная окрестность и пусть

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = (\nabla_{k'} s_{j'})^{i'} \quad \text{на} \quad U'$$

(мы используем обозначения, подробно объясненные в лекции 10). Тогда на пересечении $U \cap U'$ будет иметь место равенство

$$\nabla_{k'} s_{j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \nabla (\varphi^j_{j'} s_j) =$$
$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \varphi^j_{j'}}{\partial x^k} s_j + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \varphi^j_{j'} \nabla s_j$$

$\left(\text{напомним, что } \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ и } s_{i'} = \varphi^i_{i'} s_i\right)$, а значит, и равенство

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} \varphi^i_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \varphi^j_{j'} \Gamma^i_{kj}.$$

Поскольку последнее равенство полностью равносильно тождеству (17) лекции 10, этим доказано, что функции Γ^i_{kj} являются коэффициентами некоторой связности H. При этом, как непосредственно следует из формулы (21) и свойств а, б и в операторов ∇_X на окрестности U, для операторов ∇_X имеют место те же формулы (11), что и для ковариантных производных относительно связности H. Поэтому эти операторы совпадают с ковариантными производными относительно связности H. □

В доказательстве леммы 3 мы фактически пользовались лишь свойством локальности операторов ∇_X. Поэтому эта лемма справедлива для произвольного, обладающего свойством локальности линейного отображения $D\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi$ и даже отображения $D\colon \Gamma\xi \to \Gamma\eta$, где ξ и η — векторные расслоения с одной и той же базой $\mathscr{B}$. Таким образом, для любого открытого множества $U \subset \mathscr{B}$ каждое такое отображение D индуцирует (очевидно, тоже линейное) отображение

$$D|_U\colon \Gamma(\xi|_U) \to \Gamma(\eta|_U), \tag{22}$$

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\xi & \xrightarrow{D} & \Gamma\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\xi|_U) & \xrightarrow{D|_U} & \Gamma(\eta|_U), \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются отображениями ограничения.

С другой стороны, легко видеть, что *каждое* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$*-линейное отображение* $D\colon \Gamma\xi \to \Gamma\eta$ *обладает свойством локаль-*

ности. (Доказательство леммы 2 полностью сохранится и в этом случае; лишь в формуле (17) будет отсутствовать член с $X\varphi$.) Поэтому для любого открытого множества $U\subset\mathcal{B}$ каждое такое отображение индуцирует отображение (22).

Задача 4. Докажите, что для $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathcal{B}$-линейного отображения D отображение (22) $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathcal{B}$-линейно.

Примером $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathcal{B}$-линейного отображения $\Gamma\xi\to\Gamma\eta$ является отображение

$$(23)\qquad \varphi\circ\colon\ \Gamma\xi\to\Gamma\eta,\quad s\mapsto\varphi\circ s,$$

индуцированное произвольным гладким морфизмом расслоений $\varphi\colon\ \xi\to\eta$ (ср. лекцию 6). Отображение $D=\varphi\circ$ обладает не только свойством локальности, но и следующим более сильным свойством:

1. Если $s'(b_0)=s''(b_0)$, где $b_0\in\mathcal{B}$, s', $s''\in\Gamma\xi$, то $(Ds')(b_0)=(Ds'')(b_0)$.

Оказывается, что *свойством* 1 *обладает каждое* $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathcal{B}$-*линейное отображение* D: $\Gamma\xi\to\Gamma\eta$. Действительно, пусть $s_1, \dots, s_n$ — тривиализация расслоения ξ над окрестностью U точки b_0 и пусть $s''-s'=f^is_i$ над U (где $f^i(b_0)=0$ для любого $i=1, \dots, n$). Тогда

$$(Ds''-Ds')(b_0)=f^i(b_0)(Ds_i)=0$$

(где справа D обозначает $D|_U$). Следовательно, $(Ds')(b_0)=(Ds'')(b_0)$. □

Теперь уже без труда доказывается следующее предложение (ср. задачу 5 лекции 6):

Предложение 3. *Для любого* $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathcal{B}$-*линейного отображения* D: $\Gamma\xi\to\Gamma\eta$ *существует такой единственный морфизм* $\varphi\colon\ \xi\to\eta$, *что* $D=\varphi\circ$.

Доказательство. Если $D=\varphi\circ$, то $(Ds)(b)=\varphi(s(b))$ для любого сечения $s\in\Gamma\xi$ и любой точки $b\in\mathcal{B}$. Это означает, что для каждой точки $p\in\mathscr{E}$

$$(24)\qquad \varphi(p)=(Ds)(b),$$

где $b=\pi(p)$, а s — такое сечение, что $s(b)=\varphi p$. Поскольку в силу свойства 1 правая часть этого соотношения не зависит от выбора сечения s, это доказывает единственность морфизма φ.

Для доказательства существования морфизма φ мы определим его формулой (24). Ясно, что это определение корректно задает послойное отображение $\varphi\colon\ \mathscr{E}^\xi\to\mathscr{E}^\eta$, линейное на каждом слое и такое, что $D=\varphi\circ$. Поэтому нам нужно только доказать, что это отображение гладко. Но это очевидно, поскольку над любой окрестностью $U \subset \mathcal{B}$, тривиализирующей для обоих расслоений ξ и η одновременно, отображение φ в координатах задается той же самой, состоящей из гладких на U функций, прямоугольной матрицей, что и отображение $D|_U$ в соответствующих базисах свободных $\mathsf{F}_\mathbb{K}U$-модулей $\Gamma(\xi|_U)$ и $\Gamma(\eta|_U)$. □

Предложение 3 означает, что $\mathsf{F}_\mathbb{K}\mathcal{B}$-модуль $\operatorname{Mor}(\xi, \eta)$ всех гладких морфизмов $\xi \to \eta$ естественным образом отождествляется с $\mathsf{F}_\mathbb{K}\mathcal{B}$-модулем $\operatorname{Hom}_{\mathsf{F}_\mathbb{K}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\eta)$ всех $\mathsf{F}_\mathbb{K}\mathcal{B}$-линейных отображений $\Gamma\xi \to \Gamma\eta$:

(25) $$\operatorname{Mor}(\xi, \eta) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{F}_\mathbb{K}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\eta).$$

(Ср. замечания, сделанные после задачи 5 в лекции 6.)

Напомним — см. лекцию 7 —, что метрики на $\mathbb{K}$-векторном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ естественным образом отождествляются с непрерывными функциями $Q: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, ограничение которых на любом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, является метрикой на $\mathcal{F}_b$ (положительно определенным квадратичным функционалом). Метрика на гладком расслоении ξ называется *гладкой*, если функция Q гладка.

Задача 5. Докажите, что *на каждом гладком нумерируемом $\mathbb{K}$-векторном расслоении ξ существует гладкая метрика* (ср. предложение 2 лекции 7).

Пусть $\mathbb{K}$-векторное расслоение ξ метризовано. Тогда формула

$$(s, s')(b) = (s(b), s'(b)), \quad s, s' \in \Gamma\xi, \ b \in \mathcal{B},$$

определяет на $\mathsf{F}\mathcal{B}$-модуле $\Gamma\xi$ функционал $s, s' \mapsto (s, s')$, принимающий значения в алгебре $\mathsf{F}_\mathbb{K}\mathcal{B}$ и обладающий тем свойством, что для любого сечения $s \in \Gamma\xi$ функция $(s, s) \in \in \mathsf{F}_\mathbb{K}\mathcal{B}$ принимает вещественные неотрицательные значения и равна нулю в тех и только тех точках $b \in \mathcal{B}$, в которых $s(b) = 0$. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ этот функционал билинеен (над алгеброй $\mathsf{F}\mathcal{B}$) и симметричен, а при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — полуторалинеен и эрмитов. Допуская вольность, мы будем этот функционал называть *скалярным умножением* на $\Gamma\xi$.

Задача 6. Докажите, что *над каждой тривиализирующей окрестностью $U \subset \mathcal{B}$ модуль $\Gamma_\mathbb{K}(\xi|_U)$ обладает ортонормированным базисом $s_1, \ldots, s_n$* (таким, что $(s_i, s_j) = \delta_{ij}$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$). [Указание. Выбрав произвольный базис, примените к нему процесс ортогонализации Грама—Шмидта.]

Определение 3. Связность ∇ на метризованном расслоении ξ называется *согласованной с метрикой* (или *метрической*), если для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ и любых сечений $s, s' \in \Gamma\xi$ имеет место равенство

$$X(s, s') = (\nabla_X s, s') + (s, \nabla_X s'). \tag{26}$$

Предложение 4. *Связность ∇ на расслоении ξ тогда и только тогда согласована с метрикой, когда для любой тривиализирующей окрестности U матрица $\omega = \|\omega_j^i\|$ форм связности, отвечающих ортонормированному базису $s_1, \ldots, s_n$ $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$, кососимметрична при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ и косоэрмитова при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, т. е. если для любых $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\omega_j^i + \omega_i^j = 0 \quad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{R},$$
$$\omega_j^i + \overline{\omega}_i^j = 0 \quad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{C}.$$

Доказательство. Ясно, что соотношение (26) тогда и только тогда выполнено для любых сечений $s, s' \in \Gamma\xi$, когда над произвольной тривиализирующей окрестностью U оно выполнено для элементов произвольного базиса $s_1, \ldots, s_n$ над U, т. е. если

$$X(s_i, s_j) = (\nabla_X s_i, s_j) + (s_i, \nabla_X s_j), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

С другой стороны, если базис $s_1, \ldots, s_n$ ортонормирован, то соотношение (27) имеет вид

$$0 = (\nabla_X s_i)^j + (\nabla s_j)^i \quad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{R},$$
$$0 = (\nabla_X s_i)^j + \overline{(\nabla s_j)^i} \quad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{C},$$

где $(\nabla_X s_j)^i$ — координаты сечения s_j. Для завершения доказательства остается вспомнить, что согласно формуле (13′)

$$(\nabla_X s_j)^i = \omega_j^i(X). \quad \square$$

Задача 7. Докажите, что *на любом нумерируемом метризованном векторном расслоении ξ существует связность, согласованная с метрикой.* [Указание. Из предложения 4 следует, что на тривиальном расслоении такая связность существует. Общий случай сводится к этому с помощью разбиения единицы. Ср. доказательство предложения 3 лекции 7.]