Лекция 12

ξ-тензорные поля.— Полилинейные функционалы и ξ-тензорные поля.— Ковариантное дифференцирование ξ-тензорных полей.— Случай ξ-ковекторных полей.— Общий случай.— Кронекерово произведение матриц и тензорное произведение линейных операторов.— Функторы.— Тензорное произведение векторных расслоений.— Обобщение.— Тензорное произведение сечений.

Пусть, как и выше, $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — гладкое $\mathbb{K}$-векторное ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) расслоение ранга n над m-мерным хаусдорфовым многообразием $\mathscr{B}$ и пусть для любой точки $b\in\mathscr{B}$ в линейном пространстве $\mathscr{F}_b=\mathscr{F}_b^\xi$ задан тензор S_b, причем во всех точках $b\in\mathscr{B}$ тензоры S_b имеют один и тот же тип (r, s). Пусть, далее, $s_1, \ldots, s_n$ — гладкая тривиализация расслоения ξ над окрестностью $U\subset\mathscr{B}$. Поскольку для любой точки $b\in U$ векторы $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ образуют базис линеала $\mathscr{F}_b$, то для тензора S_b будет иметь место формула

(1) $S_b=S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}(b)\, s^{i_1}(b)\otimes\ldots\otimes s^{i_r}(b)\otimes s_{j_1}(b)\otimes\ldots\otimes s_{j_s}(b)$,

где $s^1(b), \ldots, s^n(b)$ — двойственный базис сопряженного пространства $\mathscr{F}_b^*$, а $S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$ — некоторые функции, определенные на U.

Определение 1. Если для любой гладкой тривиализации $(U, s_1, \ldots, s_n)$ функции $S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$ гладки, то соответствие

$$S\colon b\mapsto S_b$$

называется *ξ-тензорным полем* (или просто *ξ-тензором*) на $\mathscr{B}$, а функции $S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$ называются его *компонентами* (в данной тривиализации).

В частности, при $(r, s)=(0, 1)$ мы получаем уже известные нам *ξ-векторные поля* (сечения расслоения ξ).

При $(r, s)=(1, 0)$ поле S называется *ξ-ковекторным полем*. Примером ξ-ковекторного поля (определенного на окрестности U) является поле $s^i\colon b\mapsto s^i(b)$, $1\leqslant i\leqslant n$.

При $\xi=\tau_{\mathscr{X}}$, где $\tau_{\mathscr{X}}$ — касательное расслоение гладкого многообразия $\mathscr{X}$, ξ-тензорные поля являются не чем иным, как тензорными полями на $\mathscr{X}$ в смысле лекции III.16.

Замечание 1. По традиции вместо того, чтобы говорить о тензоре S, часто говорят о *тензоре* $S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$; конечно, это словоупотребление (которым мы также будем пользоваться) предполагает, что тривиализация $(U, s_1, \ldots, s_n)$ раз и навсегда выбрана и фиксирована.

Задача 1. Покажите, что на пересечении $U \cap U'$ двух тривиализирующих окрестностей U и U' компоненты $S^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ и $S^{j'_1 \ldots j'_s}_{i'_1 \ldots i'_r}$ одного и того же тензора S связаны соотношениями

$$S^{j'_1 \ldots j'_s}_{i'_1 \ldots i'_r} = \varphi^{i_1}_{i'_1} \ldots \varphi^{i_r}_{i'_r} \varphi^{j'_1}_{j_1} \ldots \varphi^{j'_s}_{j_s} S^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}, \tag{2}$$

где $\|\varphi^{j'}_{j}\|$ и $\|\varphi^{i}_{i'}\|$—взаимно обратные матрицы перехода (см. лекцию 10).

Для касательного расслоения формула (2) нам уже известна из лекции III.16.

Очевидно, все ξ-тензорные поля данного типа (r, s) образуют модуль над алгеброй $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$ гладких $\mathbb{K}$-значных функций на $\mathscr{B}$. Мы будем обозначать этот модуль символом $\Gamma^s_r\xi$.

Для любых ξ-тензорных полей S и T (типов (r, s) и (r_1, s_1) соответственно) формула

$$S \otimes T\colon\ b \mapsto S_b \otimes T_b, \qquad b \in \mathscr{B},$$

корректно определяет ξ-тензорное поле $S \otimes T$ типа $(r+r_1, s+s_1)$, для которого

$$(S \otimes T)^{j_1 \ldots j_s j_{s+1} \ldots j_{s+s_1}}_{i_1 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_{r+r_1}} = S^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} T^{j_{s+1} \ldots j_{s+s_1}}_{i_{r+1} \ldots i_{r+r_1}}.$$

Это поле называется *тензорным произведением* полей S и T.

Аналогично определяется тензорное произведение $S \otimes T \otimes \ldots \otimes R$ любого числа ξ-тензорных полей.

Используя тензорные произведения

$$s^{i_1} \otimes \ldots \otimes s^{i_r} \otimes s_{j_1} \otimes \ldots \otimes s_{j_s} \tag{3}$$

(являющиеся ξ-тензорными полями над U), мы можем переписать формулу (1) в следующем виде:

$$S = S^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} s^{i_1} \otimes \ldots \otimes s^{i_r} \otimes s_{j_1} \otimes \ldots \otimes s_{j_s}.$$

Это означает, что *тензоры* (3) *составляют базис* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$*-модуля* $\Gamma^s_r(\xi|_U)$ (или, как мы будем говорить, *базис* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$*-модуля* $\Gamma^s_r\xi$ *над* U).

Например, при $(r, s) = (1, 0)$ базис модуля $\Gamma^0_1\xi$ (обозначаемого также символом $\Gamma\xi^*$) над U составляют ξ-ковекторные поля $s^1, \ldots, s^n$.

Особое значение имеют ξ-тензорные поля типа $(r, 0)$.

Пусть S — такое поле и пусть $t_1, \ldots, t_r \in \Gamma\xi$. Тогда для любой тривиализации $(U, s_1, \ldots, s_n)$ расслоения ξ на открытом множестве U будет определена функция

$$S(t_1, \ldots, t_r) = S_{i_1 \ldots i_r} t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r}, \tag{4}$$

где $t_1^{i_1}, \ldots, t_r^{i_r}$ — компоненты ξ-векторных полей $t_1, \ldots, t_r$ на U, а $S_{i_1 \ldots i_r}$ — компоненты ξ-тензорного поля S.

Задача 2. Покажите, что функции (4), построенные на двух тривиализирующих окрестностях U и U', совпадают на их пересечении $U \cap U'$.

Это означает, что *формула* (4) *корректно определяет функцию* $S(t_1, \ldots, t_r)$ *на всем многообразии* $\mathscr{B}$.

Функция $S(t_1, \ldots, t_r)$ называется *сверткой* тензора S с полями $t_1, \ldots, t_r$.

По аналогии со случаем линейных пространств отображение

$$S\colon \underbrace{\Gamma\xi \times \ldots \times \Gamma\xi}_{r \text{ раз}} \mapsto \mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B} \tag{5}$$

называется $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-*полилинейным функционалом*, если оно $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-линейно по каждому аргументу.

Ясно, что определенное формулой (4) отображение (5) является $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-полилинейным функционалом.

Задача 3. Покажите, что *соответствие*

$$\textit{тензор } S \Rightarrow \textit{функционал } (5)$$

представляет собой изоморфизм $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-*модуля* $\Gamma_r\xi = \Gamma_r^0\xi$ *на* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-*модуль всех* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-*полилинейных функционалов* (5). [Указание. См. замечание 2 лекции III.18.]

В дальнейшем мы будем посредством этого изоморфизма отождествлять ξ-тензорные поля типа $(r, 0)$ на $\mathscr{B}$ с $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-полилинейными функционалами (5).

В частности, в силу этого отождествления ξ-ковекторные поля $c \in \Gamma_1\xi = \Gamma\xi^*$ являются не чем иным, как $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-линейными функционалами вида

$$c\colon \Gamma\xi \to \mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}.$$

Значение $c(s)$ такого поля иа сечении $s \in \Gamma\xi$ (являющееся, подчеркнем, функцией на $\mathscr{B}$) обозначается также символом $\langle s, c\rangle$.

Мы будем говорить, что на $\Gamma_r^s\xi$ задано *ковариантное дифференцирование* ∇, если каждому векторному полю

$X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ сопоставлен линейный (над $\mathbb{K}$) оператор

(6) $$\nabla_X\colon \Gamma^s_r\xi \to \Gamma^s_r\xi,$$

$\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-линейно зависящий от X и удовлетворяющий тождеству Лейбница:

$$\nabla_X(fS) = Xf\cdot S + f\nabla_X S, \qquad f \in \mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B},\ S \in \Gamma^s_r\xi.$$

Операторы ∇_X называются *ковариантными дифференцированиями по X*.

Задача 4. Покажите, что для операторов (6) имеют место аналоги лемм 2 и 3 лекции 11.

Это значит, в частности, что операторы ∇ определены над любой тривиализирующей координатной окрестностью U и действуют на тензорах $S \in \Gamma^s_r(\xi|_U)$ по формуле

$$\nabla_X S = X^k \nabla_k S,$$

где X^k, $1 \leqslant k \leqslant m$,— компоненты поля X над U, а

(7) $$\nabla_k S = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} S, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

— *частные ковариантные производные* ξ-тензорного поля S.

Следовательно, операторы (6) однозначно восстанавливаются по частным производным (7) и, значит, по их компонентам $(\nabla_k S)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$.

При $(r, s) = (1, 0)$ операторы (6) имеют вид

(8) $$\nabla_X\colon \Gamma\xi^* \to \Gamma\xi^*$$

и для любой тривиализирующей координатной окрестности U переводят ξ-ковекторное поле $c = c_i s^i$ на U в ξ-ковекторное поле

$$\nabla_X c = X^k (\nabla_k c)_i s^i,$$

где $(\nabla_k c)_i$—компоненты ξ-ковекторного поля $\nabla_k c$.

Пусть теперь на ξ задана некоторая связность H.

Предложение 1. *На $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-модуле $\Gamma\xi^*$ существует единственное ковариантное дифференцирование ∇, обладающее тем свойством, что для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma\xi$ для каждого ξ-ковекторного поля $c \in \Gamma\xi^*$ имеет место равенство*

(9) $$X\langle s, c\rangle = \langle \nabla_X s, c\rangle + \langle s, \nabla_X c\rangle,$$

где в первом члене справа символ ∇ обозначает ковариантное дифференцирование относительно связности H.

При $X=\frac{\partial}{\partial x^k}$ *компоненты ξ-ковекторного поля* $\nabla_k c = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} c$ *в каждой тривиализирующей координатной окрестности U выражаются формулой*

$$(10)\qquad (\nabla_k c)_i = \frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ki} c_j,\quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m,$$

где Γ^j_{ki}—коэффициенты связности H.

Доказательство. Ясно, что равенство (9) тогда и только тогда имеет место для любых s, c и X, когда на произвольной тривиализирующей координатной окрестности U оно имеет место при $X=\frac{\partial}{\partial x^k}$ и $s=s_i$, т. е.—поскольку $\langle s_i, c\rangle = c_i$ и $\nabla_k s_i = \Gamma^{ij}_k s_j$—когда

$$\frac{\partial c_i}{\partial x^k} = \Gamma^j_{ki} c_j + (\nabla_k c)_i.$$

Это доказывает формулу (10) и вместе с тем единственность дифференцирования ∇ на $\Gamma\xi'$. Чтобы доказать существование, мы определим операторы (8) формулами (10), т. е. для любого векторного поля $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ на U и любого ξ-ковекторного поля $c = c_i s^i$ на U положим

$$(11)\qquad \nabla_X c = \left(\frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ki}\right) X^k s^i \quad \text{на } U.$$

Задача 5. Докажите, что

а. *Для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ и любого ξ-ковекторного поля $c \in \Gamma\xi^*$ формулы* (11) *корректно определяют ξ-ковекторное поле $\nabla_X c$.* [Указание. Если U'—другая тривиализирующая координатная окрестность, то на пересечении $U \cap U'$ имеют место равенства

$$X^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} X^k,\quad c_{i'} = \varphi^i_{i'} c_i,\quad s^{i'} = \varphi^{i'}_i s^i,$$

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{kj} + \varphi^{i'}_j \frac{\partial \varphi^j_{j'}}{\partial x^{k'}},$$

где $\|\varphi^i_{i'}\|$ и $\|\varphi^{i'}_i\|$—взаимно обратные матрицы перехода.]

б. *Получающиеся отображения $\nabla_X\colon \Gamma\xi^* \to \Gamma\xi^*$ составляют дифференцирование.* [Указание. Линейность по X

над $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$ и линейность по c над $\mathbb{K}$ очевидны. Тождество Лейбница вытекает из того, что оно справедливо для операторов $\frac{\partial}{\partial x^k}$ обычного частного дифференцирования.]

в. *Имеет место формула* (9). [Указание. По построению справедлива формула (10).]

Тем самым предложение 1 полностью доказано. $\square$

Предложение 2. *На* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$*-модулях* $\Gamma^s_r\xi$, r, $s\geqslant 0$, *существуют такие дифференцирования* ∇, *что*

1° *Для любых двух* ξ*-тензоров* S *и* T *и любого векторного поля* $X\in\mathfrak{a}\mathcal{B}$ *имеет место равенство*

$$\nabla_X(S\otimes T)=\nabla_X S\otimes T+S\otimes\nabla_X T. \tag{12}$$

2° *При* $(r, s)=(0, 1)$ *дифференцирование* ∇ *совпадает с дифференцированием* ∇ *на* $\Gamma\xi=\Gamma^1_0\xi$ *относительно связности* H, *а при* $(r, s)=(1, 0)$ — *с дифференцированием* ∇ *на* $\Gamma\xi^*=\Gamma^0_1\xi$ *из предложения* 1.

Эти дифференцирования единственны и на любой тривиализирующей координатной окрестности U *компоненты* $(\nabla_k S)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$ *частной производной* $\nabla_k S$ *произвольного* ξ*-тензора* S *выражаются через его компоненты* $S^{j_1\ldots j_s}_{i_r\ldots i_r}$ *по формуле*

$$(\nabla_k S)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}=\frac{\partial S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}}{\partial x^k}+ \tag{13}$$
$$+\Gamma^{j_1}_{kp}S^{pj_2\ldots j_s}_{i_1i_2\ldots i_r}+\Gamma^{j_2}_{kp}S^{j_1pj_3\ldots j_s}_{i_1i_2\ldots i_r}+\ldots+\Gamma^{j_s}_{kp}S^{j_1\ldots j_{s-1}p}_{i_1i_2\ldots i_r}-$$
$$-\Gamma^{p}_{ki_1}S^{j_1j_2\ldots j_s}_{pi_2\ldots i_r}-\Gamma^{p}_{ki_2}S^{j_1j_2\ldots j_s}_{i_1pi_3\ldots i_r}-\ldots-\Gamma^{p}_{ki_r}S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}p}.$$

(*Каждому индексу отвечает справа одно слагаемое со знаком плюс, если индекс верхний, и со знаком минус, если индекс нижний.*)

Доказательство. Из соотношения (12) очевидной индукцией вытекает аналогичное соотношение для любого числа сомножителей. Например, для трех ξ-тензорных полей S, R и T мы имеем

$$\nabla_X(S\otimes T\otimes R)=\nabla_X(S\otimes T)\otimes R+(S\otimes T)\otimes\nabla_X R=$$
$$=(\nabla_X S\otimes T+S\otimes\nabla_X T)\otimes R+(S\otimes T)\otimes\nabla_X R,$$

т. е.

$$\nabla_X(S\otimes T\otimes R)=\nabla_X S\otimes T\otimes R+S\otimes\nabla_X T\otimes R+S\otimes T\otimes\nabla_X R.$$

В частности, для любых s, $t\in\Gamma\xi$ и $c\in\Gamma\xi'$

$$\nabla_X(s\otimes t\otimes c)=\nabla_X s\otimes t\otimes c+s\otimes\nabla_X t\otimes c+s\otimes t\otimes\nabla_X c.$$

Для компонент частных производных ξ-тензорного поля $S=s\otimes t\otimes c$, отсюда следует формула

$$\begin{aligned}(\nabla_k S)^{j_1j_2}_{i_1}&=(\nabla_k s)^{j_1}t^{j_2}c_{i_1}+s^{j_1}(\nabla_k t)^{j_2}c_{i_1}+s^{j_1}t^{j_2}(\nabla_k c)_{i_1}=\\&=\left(\frac{\partial s^{j_1}}{\partial x^k}+\Gamma^{j_1}_{kp}s^p\right)t^{j_2}c_{i_1}+s^{j_1}\left(\frac{\partial t^{j_2}}{\partial x^k}+\Gamma^{j_2}_{kp}t^p\right)c_{i_1}+\\&+s^{j_1}t^{j_2}\left(\frac{\partial c_{i_1}}{\partial x^k}-\Gamma^p_{ki_1}c_p\right)=\\&=\frac{\partial s^{j_1}}{\partial x^k}t^{j_2}c_{i_1}+s^{j_1}\frac{\partial t^{j_2}}{\partial x^k}c_{i_1}+s^{j_1}t^{j_2}\frac{\partial c_{i_1}}{\partial x^k}+\\&+\Gamma^{j_1}_{kp}s^pt^{j_2}c_{i_1}+\Gamma^{j_2}_{kp}s^{j_1}t^pc_{i_1}-\Gamma^p_{ki_1}s^{j_1}t^{j_2}c_p,\end{aligned}$$

т. е. формула

$$(\nabla_k S)^{j_1j_2}_{i_1}=\frac{\partial S^{j_1j_2}_{i_1}}{\partial x^k}+\Gamma^{j_1}_{kp}S^{pj_2}_{i_1}+\Gamma^{j_2}_{kp}S^{j_1p}_{i_1}-\Gamma^p_{ki_1}S^{j_1j_2}_p.$$

Этим доказано, что если дифференцирования ∇ существуют, то при $(r, s)=(2, 1)$ для полей вида $S=s\otimes t\otimes c$ (такие поля обычно называются *разложимыми*) имеет место формула (13).

Но над каждой тривиализирующей окрестностью $U\subset\mathcal{B}$ каждое ξ-тензорное поле является $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-линейной комбинацией разложимых полей (ибо любой тензор над линейным пространством является $\mathbb{K}$-линейной комбинацией разложимых тензоров; см. предложение 1 лекции II.6), и, с другой стороны, ясно, что если формула (13) справедлива для полей S и T, то она справедлива и для любой их $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-линейной комбинации (единственное сомнение может возникнуть в отношении поля вида fS, когда слева возникает дополнительное слагаемое $\frac{\partial f}{\partial x^k}S^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$, но точно такое же слагаемое отщепляется и от первого члена справа). Это доказывает, что формула (13) справедлива для любого ξ-тензорного поля S типа (2, 1), и значит, для этих полей операция ∇ — если она существует — единственна.

Аналогичным образом формула (13) и единственность дифференцирования ∇ доказываются и для любых r и s.

Для доказательства существования мы определим ξ-тензорное $\nabla_X S$ как поле, имеющее на каждой тривиализирующей координатной окрестности U компоненты $(\nabla_k S)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}X^k$, где X^k — компоненты поля X на U, а $(\nabla_k S)^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ — функции (13).

Задача 6. Докажите, что тем самым

а. *Поле $\nabla_X S$ корректно определено на всем многообразии.*

б. *Отображения ∇_X: $\Gamma^s_r\xi \to \Gamma^s_r\xi$ составляют дифференцирование.*

в. *Для любых ξ-тензорных полей S и T имеет место формула* (12).

Это доказывает предложение 4. □

Поле $\nabla_X S$ называется *ковариантной производной относительно связности H ξ-тензорного поля S по векторному полю $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$.*

Замечание 2. Компоненты $(\nabla_k S)^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ поля $\nabla_k S$ обозначаются также символами $S^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r \mid k}$, причем вместо разделительной черты | употребляются и другие знаки (запятая, точка с запятой и т. п.).

Конструкции ковариантных производных $\nabla_X S$ можно придать большее формальное совершенство и концептуальную простоту (даже для случая $(r, s) = (0, 1)$), если воспользоваться некоторыми, имеющими и самостоятельный интерес, конструкциями над векторными расслоениями.

Начнем с необходимых сведений из линейной алгебры.

Пусть $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$. Раз и навсегда зафиксировав некоторый способ нумерации элементов $(n \times m)$-матриц числами от 1 до nm, мы можем линейное пространство всех $(n \times m)$-матриц над полем $\mathbb{K}$ отождествить с пространством $\mathbb{K}^{nm}$. В соответствии с этим мы будем обозначать векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{K}^{nm}$ символами e_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$, а элементы квадратных матриц порядка nm — являющиеся матрицами линейных операторов $\mathbb{K}^{nm} \to \mathbb{K}^{nm}$ — символами c^{jl}_{ik}, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $1 \leqslant k, l \leqslant m$.

Эти соглашения позволяют любым двум квадратным матрицам $A = \|a^j_i\|$ и $B = \|b^l_k\|$ порядков соответственно n и m поставить в соответствие матрицу $C = \|c^{jl}_{ik}\|$ порядка nm, для которой

$$c^{jl}_{ik} = a^j_i b^l_k.$$

Определение 2. Матрица $C = \|a^j_i b^l_k\|$ называется *кронекеровым произведением* матриц A и B. Обозначается эта матрица символом $A \otimes B$.

Чтобы истолковать это умножение на языке линейных операторов, мы напомним (см. замечание 4 в лекции II.5), что для любых линейных пространств $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ определено линейное пространство $\mathscr{V}\otimes\mathscr{W}$, называемое их *тензорным произведением*. Векторами этого пространства являются билинейные функционалы, первый аргумент которых пробегает пространство $\mathscr{V}^*$, сопряженное к пространству $\mathscr{V}$, а второй — пространство $\mathscr{W}^*$, сопряженное к пространству $\mathscr{W}$. Произвольные векторы $\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$ и $\boldsymbol{b}\in\mathscr{W}$ определяют по формуле

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\xi,\eta)=\xi(\boldsymbol{a})\eta(\boldsymbol{b}),\quad \xi\in\mathscr{V}^*,\quad \eta\in\mathscr{W}^*,$$

вектор $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\in\mathscr{V}\otimes\mathscr{W}$, называемый *тензорным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Этот вектор *линейно зависит от векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ в том смысле, что для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}\in\mathscr{V}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}\in\mathscr{W}$ и любого элемента $\lambda\in\mathbb{K}$ имеют место равенства

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\otimes\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}_2,$$
$$\lambda\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\otimes\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}).$$

Для произвольного базиса $\boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ и произвольного базиса $\boldsymbol{f}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{f}_m$ пространства $\mathscr{W}$ векторы

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{f}_k,\quad 1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant k\leqslant m,$$

образуют, очевидно, базис пространства $\mathscr{V}\otimes\mathscr{W}$. Поэтому, в частности, каждый вектор пространства $\mathscr{V}\otimes\mathscr{W}$ может быть представлен — вообще говоря, не единственным способом — в виде линейной комбинации векторов вида $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ (т. е. векторы вида $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ образуют в $\mathscr{V}\otimes\mathscr{W}$ полное семейство векторов).

В случае, когда $\mathscr{V}=\mathbb{K}^n$ и $\mathscr{W}=\mathbb{K}^m$, базис $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{f}_k$ естественным образом отождествляется с базисом $\boldsymbol{e}_{ik}$ пространства $\mathbb{K}^{nm}$ и, значит, тензорное произведение $\mathbb{K}^n\otimes\mathbb{K}^m$ — с пространством $\mathbb{K}^{nm}$:

$$\mathbb{K}^n\otimes\mathbb{K}^m=\mathbb{K}^{nm}. \tag{14}$$

Произвольные линейные отображения $\varphi\colon\ \mathscr{V}\to\mathscr{V}_1$ и $\psi\colon\ \mathscr{W}\to\mathscr{W}_1$ естественным образом определяют линейное отображение

$$\varphi\otimes\psi\colon\quad \mathscr{V}\otimes\mathscr{W}\to\mathscr{V}_1\otimes\mathscr{W}_1, \tag{15}$$

которое называется их *тензорным произведением* и обладает тем свойством, что

$$(\varphi\otimes\psi)(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=\varphi\boldsymbol{a}\otimes\psi\boldsymbol{b} \tag{16}$$

для любых векторов $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, $\boldsymbol{b} \in \mathscr{W}$. [Отображение $\varphi \otimes \psi$ можно определить как — очевидно, единственное! — линейное отображение $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W} \to \mathscr{V}_1 \otimes \mathscr{W}_1$, для которого справедлива формула (16), но на этом пути возникает проблема доказательства его существования. Более коцептуальный путь построения этого отображения основывается непосредственно на определении векторов пространства $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ как билинейных функционалов.]

Задача 7. Постройте отображение (15) каждым из указанных двух способов. [Не забудьте проверить, что получающееся отображение линейно.]

В частном случае, когда $\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}$, $\mathscr{W}_1 = \mathscr{W}$ и, значит, линейные отображения φ и ψ являются линейными операторами $\boldsymbol{A}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, $\boldsymbol{B}\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}$, тензорное произведение $\varphi \otimes \psi$ будет линейным оператором:

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}\colon \mathscr{V} \otimes \mathscr{W} \to \mathscr{V} \otimes \mathscr{W}.$$

При этом если оператор $\boldsymbol{A}$ имеет в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ матрицу $A = \|a_i^j\|$ (т. е. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = a_i^j \boldsymbol{e}_j$), а оператор $\boldsymbol{B}$ имеет в базисе $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ пространства $\mathscr{W}$ матрицу $B = \|b_k^l\|$ (т. е. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_k = b_k^l \boldsymbol{f}_l$), то

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_k) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_k = \\ &= a_i^j \boldsymbol{e}_j \otimes b_k^l \boldsymbol{f}_l = \\ &= (a_i^j b_k^l)(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{f}_l).\end{aligned}$$

Это означает, что *матрицей оператора* $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ *является кронекерово произведение* $A \otimes B$ *матриц* A *и* B.

На этом основании кронекерово произведение $A \otimes B$ называется также *тензорным произведением* матриц A и B.

Подчеркнем, что в отличие от тензорного произведения операторов кронекерово произведение матриц заключает в себе определенный произвол — выбор нумерации пар (i, k).

Вернемся теперь к общему случаю произвольных линейных отображений φ и ψ.

Из формулы (16) непосредственно вытекает, что

а. *Если* $\varphi = \mathrm{id}$ *и* $\psi = \mathrm{id}$ *(а* $\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}$ *и* $\mathscr{W}_1 = \mathscr{W}$*), то* $\varphi \otimes \psi = \mathrm{id}$.

б. *Для любых линейных отображений*

$$(17) \qquad \begin{aligned}\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}_1, \quad \varphi_1\colon \mathscr{V}_1 \to \mathscr{V}_2, \\ \psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}_1, \quad \psi_1\colon \mathscr{W}_1 \to \mathscr{W}_2\end{aligned}$$

имеет место формула

$$(\varphi_1 \otimes \psi_1) \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi_1 \circ \varphi) \otimes (\psi_1 \circ \psi).$$

Здесь уместно ввести общее определение:

Определение 3. Пусть любым двум линейным пространствам $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ (как всегда у нас—конечномерным) поставлено в соответствие линейное пространство $\Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W})$, а любым двум линейным отображениям $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}_1$ и $\psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}_1$—линейное отображение

$$\Phi(\varphi, \psi)\colon \Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W}) \to \Phi(\mathscr{V}_1, \mathscr{W}_1).$$

Если

а) $\Phi(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = \mathrm{id}$;

б) для любых линейных отображений (17) имеет место формула

$$\Phi(\varphi_1, \psi_1) \circ \Phi(\varphi, \psi) = \Phi(\varphi_1 \circ \varphi, \psi_1 \circ \psi),$$

то говорят, что Φ представляет собой *двуместный функтор* (из категории конечномерных линейных пространств в себя).

Пример 1. Установленные выше свойства операции $\otimes$ означают, что, положив

$$\Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W}) = \mathscr{V} \otimes \mathscr{W}, \quad \Phi(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi,$$

мы получим двуместный функтор. Этот функтор называется *функтором тензорного умножения.*

Пример 2. Положив

$$\Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W}) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{W}, \quad \Phi(\varphi, \psi) = \varphi \oplus \psi$$

(по определению $(\varphi \oplus \psi)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\varphi \boldsymbol{a}, \psi \boldsymbol{b})$ для любых векторов $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, $\boldsymbol{b} \in \mathscr{W}$), мы, очевидно, также получим двуместный функтор. Этот функтор называется *функтором прямого суммирования.*

Аналогично определяются *k-местные функторы* для любого $k \geqslant 1$. Например, *одноместный функтор* Φ ставит в соответствие каждому линейному пространству $\mathscr{V}$ линейное пространство $\Phi(V)$ и каждому линейному отображению $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$—линейное отображение

$$\Phi(\varphi)\colon \Phi(\mathscr{V}) \to \Phi(\mathscr{W}),$$

причем

а) $\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$;

б) $\Phi(\varphi_1) \circ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_1 \circ \varphi)$ для любых линейных отображений $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ и $\varphi_1\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}_1$.

Пример 3 и задача 8. Пусть $\Lambda^p\mathcal{V}$ — пространство всех кососимметрических тензоров степени $p\geqslant 0$ на пространстве $\mathcal{V}$. (См. лекцию II.8.) Определите для любого линейного отображения $\varphi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ линейное отображение

$$\Lambda^p\varphi\colon \Lambda^p\mathcal{V}\to\Lambda^p\mathcal{W}$$

так, чтобы получился одноместный функтор. Этот функтор называется *функтором p-й внешней степени.*

Введенные функторы называются также *ковариантными функторами*, поскольку существуют *функторы контравариантные.* Например, одноместный *контравариантный функтор* Φ сопоставляет каждому линейному пространству $\mathcal{V}$ линейное пространство $\Phi(\mathcal{V})$ и каждому линейному отображению $\varphi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ — линейное отображение

$$\Phi(\varphi)\colon \Phi(\mathcal{W})\to\Phi(\mathcal{V})$$

(обратите внимание на обратное направление стрелки!), причем

а) $\Phi(\mathrm{id})=\mathrm{id}$;

б) $\Phi(\varphi)\circ\Phi(\varphi_1)=\Phi(\varphi_1\circ\varphi)$ для любых линейных отображений $\varphi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ и $\varphi_1\colon \mathcal{W}\to\mathcal{W}_1$.

Пример 4. Одноместным контравариантным функтором является *функтор сопряжения*

$$\mathcal{V}\mapsto\mathcal{V}^*,\quad \varphi\mapsto\varphi^*,$$

ставящий в соответствие линейному пространству $\mathcal{V}$ *сопряженное пространство* $\mathcal{V}^*$, а линейному отображению $\varphi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ — *сопряженное отображение* $\varphi^*\colon \mathcal{W}^*\to\mathcal{V}^*$ (действующее по формуле $\varphi^*(\eta)(a)=\xi(\varphi a)$, $a\in\mathcal{V}$, $\xi\in\mathcal{W}^*$; ср. определение 2 лекции II.15).

Самым общим образом можно определить многоместные смешанные функторы, ковариантные по одним аргументам и контравариантные по другим.

Задача 9. Сформулируйте подробно соответствующее определение.

Пример 5. Функтор Hom, сопоставляющий пространствам $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ линейное пространство $\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ всех линейных отображений $\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ и любым двум линейным отображениям $\varphi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{V}_1$, $\psi\colon \mathcal{W}\to\mathcal{W}_1$ — линейное отображение

$$\mathrm{Hom}(\varphi,\psi)\colon\quad \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1,\mathcal{W})\to\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W}_1),$$

определенное формулой

$$\mathrm{Hom}(\varphi, \psi)(\alpha) = \psi \circ \alpha \circ \varphi, \qquad \alpha: \mathscr{V}_1 \to \mathscr{W},$$

является двуместным функтором, контравариантным по первому аргументу и ковариантным по второму.

Можно рассматривать также функторы, перерабатывающие линеалы над одним полем в линеалы над другим. Например, *функтор комплексификации* $\mathscr{V} \mapsto \mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ переводит произвольный линеал $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{R}$ в его комплексификацию $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$, являющуюся линеалом над полем $\mathbb{C}$, а *функтор овеществления* $\mathscr{W} \to \mathscr{W}_{\mathbb{R}}$ переводит произвольный линеал $\mathscr{W}$ над полем $\mathbb{C}$ в его овеществление $\mathscr{W}_{\mathbb{R}}$.

Задача 10. Докажите, что

$$(\mathscr{V}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \mathscr{V} \oplus \mathscr{V} \quad \text{и} \quad (\mathscr{W}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathscr{W} \oplus \overline{\mathscr{W}},$$

где $\overline{\mathscr{W}}$ — пространство, комплексно-сопряженное пространству $\mathscr{W}$ (см. лекцию II.19).

Заметим, что *любой функтор перерабатывает изоморфизмы в изоморфизмы*, т. е. — для определенности мы ограничиваемся двуместными функторами — если отображения φ и ψ являются изоморфизмами, то отображение $\Phi(\varphi, \psi)$ также будет изоморфизмом.

Как правило, мы будем рассматривать функторы, для которых при $\mathscr{V} = \mathbb{K}^n$ и $\mathscr{W} = \mathbb{K}^m$ — мы снова формулируем условие только для двуместных функторов — пространство $\Phi(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ отождествлено с пространством $\mathbb{K}^N$, где N — некоторое число, зависящее от n и m. Например, для функтора прямого суммирования $N = n + m$, для функтора тензорного умножения $N = nm$, а для одноместного функтора сопряжения $N = n$.

В силу этого условия для любых изоморфизмов A: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ и B: $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$, т. е. матриц $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ и $B \in \mathrm{GL}(m; \mathbb{K})$, изоморфизм $\Phi(A, B)$ является матрицей из $\mathrm{GL}(N; \mathbb{K})$, так что соответствие $(A, B) \mapsto \Phi(A, B)$ представляет собой некоторое отображение

$$\mathrm{GL}(n; \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(m; \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(N; \mathbb{K}). \tag{18}$$

Мы будем называть функтор Φ *непрерывным*, если отображение (18) непрерывно, и при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — *гладким*, если отображение (18) гладко.

Все функторы из примеров 1—5 очевидным образом непрерывны, а при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — и гладки.

Пусть теперь $\xi = (\mathscr{E}^\xi, \pi^\xi, \mathscr{B})$ и η: $(\mathscr{E}^\eta, \pi^\eta, \mathscr{B})$ — векторные расслоения над полем $\mathbb{K}$ рангов n и m соответственно с одной и той же базой $\mathscr{B}$ (которую пока можно считать произвольным топологическим пространством) и пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства $\mathscr{B}$, состоящее из окрестностей, тривиализирующих каждое из этих расслоений (очевидно, что такое покрытие всегда существует). Пусть, далее,

$$\varphi_\alpha^\xi: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}^\xi \quad \text{и} \quad \varphi_\alpha^\eta: U_\alpha \times \mathbb{K}^m \to \mathscr{E}_{U_\alpha}^\eta$$

— тривиализации расслоений ξ и η над U_α, а

$$\varphi_{\beta\alpha}^\xi: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}) \quad \text{и} \quad \varphi_{\beta\alpha}^\eta: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{K})$$

— соответствующие отображения перехода.

Определим отображения

$$\varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(nm; \mathbb{K}),$$

положив для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$(\varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta)(b) = \varphi_{\beta\alpha}^\xi(b) \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta(b).$$

Эти отображения, очевидно, непрерывны (и гладки, если — в предположении, что $\mathscr{B}$ является многообразием — гладки отображения $\varphi_{\beta\alpha}^\xi$ и $\varphi_{\beta\alpha}^\eta$), а автоматическая проверка (использующая только функторные свойства операции $\otimes$) показывает, что они составляют коцикл покрытия $\{U_\alpha\}$ над группой $\mathrm{GL}(nm; \mathbb{K})$. Поэтому (см. предложение 2 лекции 6) существует такое векторное расслоение ζ ранга mn над полем $\mathbb{K}$ с тривиализирующим покрытием $\{U_\alpha\}$, что

$$\varphi_{\beta\alpha}^\zeta = \varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta$$

для любых α и β. Это расслоение гладко, если гладки расслоения ξ и η.

В построении векторного расслоения ζ участвует тривиализирующее покрытие $\{U_\alpha\}$. Поэтому надо рассмотреть вопрос, в какой мере расслоение ζ зависит от выбора этого покрытия.

По построению (см. лекцию 6) расслоение ζ возникает вместе с некоторыми тривиализациями

$$\varphi_\alpha^\zeta: U_\alpha \times \mathbb{K}^{nm} \to \mathscr{E}_{U_\alpha}^\zeta,$$

связанными с отображениями $\varphi_{\beta\alpha}^\zeta = \varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta$ формулами

$$\varphi_{\beta\alpha}^\zeta(b) = (\varphi_{\beta, b}^\zeta)^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^\zeta,$$

где, скажем, $\varphi^{\zeta}_{\alpha,b}$ — изоморфизм $\mathbb{K}^{nm} \to \mathcal{F}^{\zeta}_b$, $b \in U_\alpha$, определенный формулой

$$\varphi^{\zeta}_{\alpha,b}(x) = \varphi^{\zeta}_{\alpha}(b, x), \qquad x \in \mathbb{K}^{nm}.$$

Аналогично

$$\varphi^{\xi}_{\beta\alpha}(b) = (\varphi^{\xi}_{\beta,b})^{-1} \circ \varphi^{\xi}_{\alpha,b} \quad \text{и} \quad \varphi^{\eta}_{\beta\alpha} = (\varphi^{\eta}_{\beta,b})^{-1} \circ \varphi^{\eta}_{\alpha,b},$$

где, скажем,

$$\varphi^{\xi}_{\alpha,b}(x) = \varphi^{\xi}_{\alpha}(b, x), \qquad x \in \mathbb{K}^{n}.$$

Поэтому для отображения

$$(\varphi^{\xi}_{\alpha,b} \otimes \varphi^{\eta}_{\alpha,b}) \circ (\varphi^{\zeta}_{\alpha,b})^{-1} \colon \mathcal{F}^{\zeta}_b \to \mathcal{F}^{\xi}_b \otimes \mathcal{F}^{\eta}_b$$

при $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ будет иметь место равенство

$$\begin{aligned}
&(\varphi^{\xi}_{\alpha,b} \otimes \varphi^{\eta}_{\alpha,b}) \circ (\varphi^{\zeta}_{\alpha,b})^{-1} = \\
&= [(\varphi^{\xi}_{\beta,b} \circ \varphi^{\xi}_{\beta\alpha}(b)) \otimes (\varphi^{\eta}_{\beta,b} \circ \varphi^{\eta}_{\beta\alpha}(b))] \circ [(\varphi^{\zeta}_{\beta\alpha}(b))^{-1} \circ (\varphi^{\zeta}_{\beta,b})^{-1}] = \\
&= (\varphi^{\xi}_{\beta,b} \otimes \varphi^{\eta}_{\beta,b}) \circ [(\varphi^{\xi}_{\beta\alpha}(b) \otimes \varphi^{\eta}_{\beta\alpha}(b)) \circ (\varphi^{\zeta}_{\beta\alpha}(b))^{-1}] \circ (\varphi^{\zeta}_{\beta,b})^{-1} = \\
&= (\varphi^{\xi}_{\beta,b} \otimes \varphi^{\eta}_{\beta,b}) \circ (\varphi^{\zeta}_{\beta,b})^{-1}
\end{aligned}$$

(напомним, что по определению $\varphi^{\zeta}_{\beta\alpha}(b) = \varphi^{\xi}_{\beta\alpha}(b) \otimes \varphi^{\eta}_{\beta\alpha}(b)$).

Это показывает, что формула

$$f(p) = (\varphi^{\xi}_{\alpha,b} \otimes \varphi^{\eta}_{\alpha,b}) \circ (\varphi^{\zeta}_{\alpha,b})^{-1}(p),$$

в которой $p \in U_\alpha$, $b = \pi(p)$, корректно определяет — очевидно, биективное — отображение

$$f \colon \mathcal{E}^{\zeta} \to \mathcal{E},$$

где

$$\mathcal{E} = \coprod_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{F}^{\xi}_b \otimes \mathcal{F}^{\eta}_b$$

— дизъюнктное объединение линейных пространств $\mathcal{F}^{\xi}_b \otimes \mathcal{F}^{\eta}_b$, $b \in \mathcal{B}$. (Заметим, что каждый слой $\mathcal{F}^{\zeta}_b$ отображение f изоморфно отображает на пространство $\mathcal{F}^{\xi}_b \otimes \mathcal{F}^{\eta}_b$.)

Посредством отображения f мы можем перенести из $\mathcal{E}^{\zeta}$ в $\mathcal{E}$ топологию (а когда расслоения ξ и η гладки — и гладкость). Ясно, что тогда тройка $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, где $\pi \colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ — естественная проекция, будет векторным расслоением (с тривиализациями вида $f \circ \varphi^{\zeta}_{\alpha}$), а отображение f — изоморфизмом векторных расслоений.

В пространстве $\mathscr{E}^\zeta$ множество открыто тогда и только тогда, когда открыто (в $\mathscr{E}^\zeta_{U_\alpha}$) его пересечение с каждым из множеств $\mathscr{E}^\zeta_{U_\alpha} = (\pi^\zeta)^{-1} U_\alpha$, и значит (докажите!) тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subset \mathscr{B}$, над которым тривиальны оба расслоения ξ и η, открыто в $\mathscr{E}^\zeta_U = (\pi^\zeta)^{-1} U$ его пересечение с $\mathscr{E}^\zeta_U$. Поэтому в пространстве $\mathscr{E}$ множество открыто тогда и только тогда, когда для любого такого U открыто в $\mathscr{E}_U = \pi^{-1} U$ его пересечение с $\mathscr{E}_U$.

Поскольку топология пространства $\mathscr{E}_U$ является (докажите!) прямым произведением топологий пространства U и $\mathbb{K}^n$, этим доказано, что топология в пространстве $\mathscr{E}$ не зависит от выбора покрытия $\{U_\alpha\}$. Следовательно — так как все остальное в расслоении $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ заведомо обладает этим свойством, — *расслоение* $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *определено корректно* (не зависит от выбора покрытия $\{U_\alpha\}$).

Определение 4. Векторное расслоение $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ обозначается символом $\xi \otimes \eta$ и называется *тензорным произведением* расслоений ξ и η. Оно гладко, если гладки расслоения ξ и η.

Слоем расслоения $\xi \otimes \eta$ над произвольной точкой $b \in \mathscr{B}$ является тензорное произведение слоев расслоений ξ и η:

$$\mathscr{F}_b^{\xi \otimes \eta} = \mathscr{F}_b^\xi \otimes \mathscr{F}_b^\eta.$$

Построенное выше расслоение ζ изоморфно расслоению $\xi \otimes \eta$, и значит его отображения перехода $\varphi^\zeta_{\beta\alpha}$ являются также и отображениями перехода расслоения $\xi \otimes \eta$.

Конструкция расслоения $\xi \otimes \eta$ немедленно обобщается на любые непрерывные функторы.

Задача 11. Для произвольного k-местного непрерывного функтора Φ на категории линейных пространств (по одним аргументам ковариантного, а по другим — контравариантного) и любых векторных расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_k$ над $\mathscr{B}$ постройте векторное расслоение $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, слоем которого над произвольной точкой $b \in \mathscr{B}$ является линейное пространство $\Phi(\mathscr{F}_b^{\xi_1}, \ldots, \mathscr{F}_b^{\xi_k})$. Специально рассмотрите расслоения ξ^*, $\Lambda^p \xi$, $\xi \oplus \eta$ и $\operatorname{Hom}(\xi, \eta)$, для которых соответственно

$$\mathscr{F}_b^{\xi^*} = (\mathscr{F}_b^\xi)^*, \quad \mathscr{F}_b^{\Lambda^p \xi} = \Lambda^p \mathscr{F}_b^\xi, \quad \mathscr{F}_b^{\xi \oplus \eta} = \mathscr{F}_b^\xi \oplus \mathscr{F}_b^\eta$$

и

$$\mathcal{F}_b^{\mathrm{Hom}(\xi,\,\eta)} = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_b^{\xi}, \mathcal{F}_b^{\eta}).$$

Докажите, что расслоение $\xi \oplus \eta$ является не чем иным, как суммой Уитни расслоений ξ и η, построенной в примере 2 лекции 7.

Пример 6. Для произвольного гладкого многообразия $\mathcal{X}$ определено гладкое векторное расслоение

$$\tau_{\mathcal{X}}^{*} = \tau^{*}\mathcal{X} = (\mathbf{T}^{*}\mathcal{X}, \pi, \mathcal{X}),$$

слоями которого являются кокасательные пространства $\mathbf{T}_p^{*}\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{X}$. Это расслоение называется *кокасательным расслоением над* $\mathcal{X}$. Каждая карта $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$ определяет тривиализацию $\varphi\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{T}^{*}U$ расслоения $\tau_{\mathcal{X}}^{*}$ над U, для которой

$$\varphi(p, \boldsymbol{a}) = a_i (dx^i)_p,$$

где $p \in U$ и $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Сечениями этого расслоения являются линейные дифференциальные формы на $\mathcal{X}$.

Пример 7. Более общим образом, мы для каждого $r \geqslant 0$ можем рассмотреть над $\mathcal{X}$ расслоение $\Lambda^r\tau^{*}\mathcal{X}$.

Задача 12. Покажите, что сечения расслоения $\Lambda^r\tau^{*}\mathcal{X}$ — это в точности дифференциальные формы на $\mathcal{X}$ степени r.

Задача 13. Покажите, что расслоения $\Lambda^r\tau^{*}\mathcal{X}$ и $(\Lambda^r\tau\mathcal{X})^{*}$ естественно изоморфны. [Указание. Для любого линеала $\mathcal{V}$ линеал $\Lambda^r\mathcal{V}'$ естественно изоморфен линеалу $(\Lambda^r\tau\mathcal{X})^{*}$.]

Пример 8. Пусть $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ — целые неотрицательные числа. Расслоение

$$\underbrace{\tau_{\mathcal{X}}^{*} \otimes \ldots \otimes \tau_{\mathcal{X}}^{*}}_{r \text{ раз}} \otimes \underbrace{\tau_{\mathcal{X}} \otimes \ldots \otimes \tau_{\mathcal{X}}}_{s \text{ раз}}$$

обозначается символом $\tau_r^s\mathcal{X}$ и называется *тензорным расслоением типа* (r, s) *над* $\mathcal{X}$. Его сечениями являются тензорные поля типа (r, s) на $\mathcal{X}$ (см. лекцию III.16).

Более общим образом, для любого векторного расслоения ξ полагают

$$T_r^s\xi = \underbrace{\xi^{*} \otimes \ldots \otimes \xi^{*}}_{r \text{ раз}} \otimes \underbrace{\xi \otimes \ldots \otimes \xi}_{s \text{ раз}}.$$

Таким образом, $\tau_r^s\mathcal{X} = T_r^s\tau\mathcal{X}$.

Замечание 3. Сечения расслоения $T^s_r\xi$ — это в точности введенные выше ξ-тензорные поля типа (r, s) на многообразии $\mathscr{B}$. Поэтому введенные там же модули $\Gamma^s_r\xi$ — это модули сечений $\Gamma T^s_r\xi$ расслоения $T^s_r\xi$:

$$\Gamma^s_r\xi = \Gamma T^s_r\xi,$$

а дифференцирования ∇ на этих модулях — это ковариантные дифференцирования в смысле лекции 12 (что, в частности, делает очевидной — и ненужной! — задачу 4).

С этой точки зрения предложения 1 и 2 представляют собой утверждения о существовании (и единственности) связностей на расслоениях ξ^* и $T^s_r\xi$, находящихся с данной связностью ∇ на ξ в соотношениях (9) и (12).

Задача 14. Каждое сечение s расслоения $\operatorname{Hom}(\xi, \eta)$ произвольной точке $b \in \mathscr{B}$ ставит в соответствие линейное отображение $s(b)\colon \mathscr{F}^\xi_b \longrightarrow \mathscr{F}^\eta_b$, и потому формула

$$s^\#(p) = s(b)\,p, \quad p \in \mathscr{E}^\xi,$$

где $b = \pi(p)$, определяет отображение $s^\#\colon \mathscr{E}^\xi \longrightarrow \mathscr{E}^\eta$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}^\xi \arrow[rr, "s^\#"] \arrow[dr] & & \mathscr{E}^\eta \arrow[dl] \\
& \mathscr{B} &
\end{tikzcd}$$

Покажите, что отображение $s^\#$ непрерывно (и гладко, если сечение s гладко), т. е. что оно является морфизмом $\xi \longrightarrow \eta$. Покажите также, что *соответствие*

$$s \longmapsto s^\#$$

определяет изоморфизм $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathscr{B}$*-модуля* $\Gamma(\operatorname{Hom}(\xi, \eta))$ *всех сечений расслоения* $\operatorname{Hom}(\xi, \eta)$ *на* $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathscr{B}$*-модуль* $\operatorname{Mor}(\xi, \eta)$ *всех морфизмов* $\xi \longrightarrow \eta$.

Таким образом,

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{Mor}(\xi, \eta) = \Gamma(\operatorname{Hom}(\xi, \eta))$$

и морфизмы $\xi \longrightarrow \eta$ являются не чем иным, как сечениями расслоения $\operatorname{Hom}(\xi, \eta)$.

Для любых двух сечений $s^\xi\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{E}^\xi$ и $s^\eta\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{E}^\eta$ расслоений ξ и η формула

$$(s^\xi \otimes s^\eta)(b) = s^\xi(b) \otimes s^\eta(b), \quad b \in \mathscr{B},$$

определяет сечение

$$s^\xi \otimes s^\eta\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{E}^{\xi \otimes \eta}$$

расслоения $\xi\otimes\eta$, называемое *тензорным произведением* сечений s^ξ и s^η.

Если расслоения ξ и η тривиальны над открытым множеством U, то для любых базисов

$$s_1^\xi, \ldots, s_n^\xi \quad \text{и} \quad s_1^\eta, \ldots, s_m^\eta$$

$\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathscr{B}$-модулей $\Gamma\xi$ и $\Gamma\eta$ над U сечения

$$s_i^\xi \otimes s_k^\eta, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m,$$

образуют, очевидно, базис $\mathsf{F}_\mathsf{K}\mathscr{B}$-модуля $\Gamma(\xi\otimes\eta)$ над U. Поэтому *любое сечение расслоения $\xi\otimes\eta$ над U единственным образом представляется в виде*

$$s^k \otimes s_k^\eta, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

где s^k—некоторые сечения расслоения ξ над U.

Задача 15. Покажите, что последнее утверждение остается справедливым и в случае, когда расслоение ξ нетривиально над U.