Лекция 13

Ковариантный дифференциал.— Сравнение различных определений связности.—Группы Ли.— Примеры групп Ли.— Алгебра Ли группы Ли.— Касательное пространство в единице.— Формула для коммутатора.

Пусть $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$—произвольное гладкое $\mathbb{K}$-векторное расслоение ранга n над m-мерным гладким многообразием и пусть $\tau^*_{\mathscr{B}} = (\mathbf{T}^*\mathscr{B}, \pi, \mathscr{B})$ при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$—кокасательное расслоение над $\mathscr{B}$, а при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$—его комплексификация. Рассмотрим гладкое $\mathbb{K}$-векторное расслоение $\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi$ и $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$-модуль $\Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$ его гладких сечений.

Определение 1. Линейное (над полем $\mathbb{K}$) отображение

$$\nabla: \Gamma\xi \to \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$$

называется *ковариантным дифференцированием*, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница, т. е. если для любой функции $f \in \mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma\xi$ имеет место равенство

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s. \tag{1}$$

(Напомним, что df является сечением расслоения $\tau^*_{\mathscr{B}}$, и потому $df \otimes s$—сечение расслоения $\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi$.)

Сечение ∇s расслоения $\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi$ называется *ковариантным дифференциалом* сечения s.

Из формулы (1) уже известным нам способом следует — в случае, когда многообразие $\mathscr{B}$ хаусдорфово,—что *отображение ∇ обладает свойством локальности*, т. е. если сечения s_1 и s_2 равны вблизи точки $b_0 \in \mathscr{B}$, то сечения ∇s_1 и ∇s_2 также равны вблизи b_0. [Действительно, если $s_1 = s_2$ на окрестности U точки b_0 и если φ—гладкая функция на $\mathscr{B}$, равная единице на некоторой окрестности $W \subset U$ точки b_0 и равная нулю вне U, то сечение $\varphi \cdot (s_2 - s_1)$ тождественно равно нулю и, значит,

$$d\varphi \cdot (s_2 - s_1) + \varphi \cdot \nabla(s_2 - s_1) = 0 \text{ на } \mathscr{B}.$$

Поэтому $\nabla(s_2 - s_1) = 0$ на W.] В свою очередь, из свойства локальности следует (ср. лекцию 11), что для любого открытого множества $U \subset \mathscr{B}$ дифференцирование ∇ определяет дифференцирование $\nabla|_U$ для расслоения $\xi|_U$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\xi \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] & \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi) \arrow[d] \\
\Gamma(\xi|_U) \arrow[r, "\nabla|_U"] & \Gamma((\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi)|_U) = \Gamma(\tau^*_U\otimes(\xi|_U)),
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой являются отображениями ограничения. При этом для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия $\mathscr{B}$ дифференцирование ∇ однозначно восстанавливается по дифференцированиям $\nabla|_{U_\alpha}$.

С другой стороны, если U — тривиализирующая координатная окрестность в $\mathscr{B}$ и $\{s_i;\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ — базис $\mathsf{F}_{\mathbf{K}}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$, то $\{dx^k\otimes s_i;\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m\}$ — базис $\mathsf{F}_{\mathbf{K}}U$-модуля $\Gamma((\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi)|_U)$ и для каждого $j=1, \ldots, n$ имеет место равенство вида

$$\nabla s_j = \Gamma^i_{kj}dx^k\otimes s_i, \qquad \Gamma^i_{kj}\in\mathsf{F}_{\mathbf{K}}U, \tag{2}$$

т. е. равенство

$$\nabla s_j = \omega^i_j\otimes s_i, \qquad \omega^i_j = \Gamma^i_{kj}dx^k\in\Omega^1U \tag{2'}$$

(для сокращения формул мы вместо $\nabla|_U$ пишем ∇). При этом формы ω^i_j (или, что равносильно, функции Γ^i_{kj}) однозначно определяют (по формуле

$$\nabla s = (ds^i+\omega^i_js^j)\otimes s_i, \tag{3}$$

где $s=s^is_i$) дифференцирование ∇ (или, точнее, $\nabla|_U$).

Задача 1. Докажите, что для произвольных форм ω^i_j на U отображение ∇, определенное формулой (3), является ковариантным дифференцированием на U.

Если U' — другая тривиализирующая координатная окрестность (с тривиализацией $s_{1'}, \ldots, s_{n'}$) и

$$\begin{aligned} &\nabla s_{j'} = \omega^{i'}_{j'}\otimes s_{i'} && \text{на } U', \\ &s_{i'} = \varphi^i_{i'}s_i, \quad s_i = \varphi^{i'}_is_{j} && \text{на } U\cap U', \end{aligned} \tag{2''}$$

то

$$\begin{aligned} \nabla s_{j'} &= d\varphi^i_{j'}\otimes s_i + \varphi^i_{j'}\nabla s_i = \\ &= d\varphi^i_{j'}\otimes s_i + \varphi^i_{j'}\omega^j_i\otimes s_j = \\ &= (d\varphi^i_{j'}+\varphi^j_{j'}\omega^i_j)\otimes(\varphi^{i'}_is_{i'}) = \\ &= \varphi^{i'}_i(d\varphi^i_{j'}+\varphi^j_{j'}\omega^i_j)\otimes s_{i'}, \end{aligned}$$

и значит

$$\omega_{j'}^{i'} = \varphi_i^{i'} \varphi_{j'}^j \omega_j^i + \varphi_i^{i'} \, d\varphi_{j'}^i. \tag{4}$$

Обратно, если на окрестностях U и U' заданы ковариантные дифференцирования, действующие соответственно по формулам (2′) и (2″), и если имеют место соотношения (4), то на пересечении $U \cap U'$ эти дифференцирования совпадают (т. е., точнее, совпадают их ограничения на $U \cap U'$).

Это означает, что справедливо следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть* $\{U_\alpha\}$ — *открытое покрытие хаусдорфова многообразия* $\mathscr{B}$, *состоящее из тривиализирующих координатных окрестностей. Тогда каждое ковариантное дифференцирование* ∇ *определяет для любого* α *формы* $\omega_j^i = \overset{(\alpha)}{\omega}{}_j^i$ *на окрестности* U_α, *причем для любых* α *и* β *эти формы на окрестностях* $U = U_\alpha$ *и* $U' = U_\beta$ *связаны на* $U \cap U'$ *соотношениями* (4).

Обратно, задание для любого α *форм* $\omega_j^i = \overset{(\alpha)}{\omega}{}_j^i$, *связанных соотношениями* (4), *однозначно определяет ковариантное дифференцирование* ∇, *действующее на каждой окрестности* U_α *по формуле* (3). $\square$

Но формулы (4) — это в точности формулы (17′) из лекции 10! Поэтому, сравнив предложение 1 с предложением 3 лекции 10, мы немедленно получим, что *ковариантные дифференцирования* ∇ *находятся в естественном биективном соответствии со связностями на расслоении* ξ (и потому могут быть с ними отождествлены).

Таким образом, фактически мы имеем три определения связности на гладком векторном расслоении ξ — как поля горизонтальных подпространств, как семейства операторов ∇_X и как дифференцирования ∇.

Взаимоотношения этих определений описываются формулами

$$H = \operatorname{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n),$$

где $\theta^i = da^i + \omega_j^i a^j = da^i + \Gamma_{kj}^i a^j \, dx^k$;

$$\nabla_X s = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) X^k s_i, \tag{5}$$

где $s = s^i s_i$ и $X = X^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$;

и

$$
\begin{aligned}
\nabla s &= (ds^i + \omega^i_j s^j) \otimes s_i = \\
&= (ds^i + \Gamma^i_{kj} s^j\, dx^k) \otimes s_i = \\
&= \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) dx^k \otimes s_i,
\end{aligned}
$$

имеющими место в произвольной тривиализирующей координатной окрестности U.

В одних вопросах удобнее одно определение, в других—другое, а в третьих—третье. Поэтому надо уметь легко и быстро переходить от каждого из этих определений к любому другому.

Задача 2. Покажите, что для любых линейных пространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ каждый элемент тензорного произведения $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}$, где $\mathcal{V}^*$ — пространство сопряженное к $\mathcal{V}$, естественным образом интерпретируется как линейное отображение $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$. [Например, для элемента вида $\theta \otimes c$, $\theta \in \mathcal{V}^*$, $c \in \mathcal{W}$ это делается по формуле

$$(\theta \otimes c)(x) = \theta(x)\, c,$$

где $x \in \mathcal{V}$.] В частности, значение $(\nabla s)_b$ сечения $\nabla s \in \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi)$ в точке $b \in \mathcal{B}$ является в силу этой интерпретации линейным отображением $\mathrm{T}_b\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}^\xi_b$, и значит для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ формула

$$(\nabla s)(X)_b = (\nabla s)_b (X_b), \qquad b \in \mathcal{B},$$

определяет некоторое—очевидно, гладкое—сечение $(\nabla s)(X)$ расслоения ξ. Покажите, что

$$(\nabla s)(X) = \nabla_X s. \tag{6}$$

Формула (6) устанавливает прямое—не использующее горизонтальных подпространств и тривиализирующих координатных окрестностей—соответствие между дифференцированиями ∇ и операторами ∇_X.

Задача 3. Пусть ξ—комплексное векторное расслоение и $I: \xi_{\mathbb{R}} \longrightarrow \xi_{\mathbb{R}}$—оператор комплексной структуры на его овеществлении $\xi_{\mathbb{R}}$ (см. лекцию 6). Пусть, далее, H—связность на расслоении $\xi_{\mathbb{R}}$, а $\nabla_X: \Gamma\xi_{\mathbb{R}} \longrightarrow \Gamma\xi_{\mathbb{R}}$, $\nabla: \Gamma\xi_{\mathbb{R}} \longrightarrow \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi_{\mathbb{R}})$—соответствующие ковариантные дифференцирования. Покажите, что *следующие условия равносильны*:

а. *Связность H является связностью на* ξ (см. лекцию 10).

б. *Для любого векторного поля X имеет место коммутативная* *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \Gamma\xi_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\nabla_X"] \arrow[d, "I_0"'] & \Gamma\xi_{\mathbb{R}} \arrow[d, "I_0"] \\ \Gamma\xi_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\nabla_X"] & \Gamma\xi_{\mathbb{R}}; \end{tikzcd}$$

в. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma\xi \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "I_0"'] & \Gamma(\tau'_{\mathcal{B}}\otimes\xi_{\mathbb{R}}) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes I)_0"] \\ \Gamma\xi \arrow[r, "\nabla"] & \Gamma(\tau'_{\mathcal{B}}\otimes\xi_{\mathbb{R}}) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

[Указание. Условие б равносильно линейности над $\mathbb{C}$ оператора ∇_X, а условие в — линейности над $\mathbb{C}$ оператора ∇.]

Более глубокая теория связностей на векторных расслоениях опирается на простейшие факты теории групп Ли и их подгрупп. Мы поэтому отставим временно в сторону дифференциальную геометрию и займемся группами Ли.

Напомним (см. лекцию 1), что *группой Ли* (или *гладкой группой*) называется группа $\mathcal{G}$, являющаяся одновременно гладким многообразием, в которой *отображение умножения*

$$m\colon \mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G},\quad m(a, b)=ab,\qquad a, b\in\mathcal{G}, \tag{7}$$

гладко. (В этом случае *отображение обращения*

$$\mathcal{G}\to\mathcal{G},\quad a\mapsto a^{-1},\qquad a\in\mathcal{G},$$

также гладко; см. задачу 1 лекции 1.)

Задача 4. Покажите, что отображение (7) тогда и только тогда гладко, когда оно гладко в точке (e, e), где e — единица группы $\mathcal{G}$.

Гладкость отображения (7) в точке (e, e) означает следующее. Во-первых, в $\mathcal{G}$ существуют такая карта $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$, содержащая точку e, и такая окрестность $V\subset U$ точки e, что

$$ab\in U \quad \text{для любых элементов} \quad a, b\in V.$$

Во-вторых, отображение (7) записывается в этой карте гладкими функциями, т. е. существует такая гладкая вектор-функция

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{a}=(a^1, \ldots, a^n),\quad \boldsymbol{b}=(b^1, \ldots, b^n)\quad \boldsymbol{c}=(c^1, \ldots, c^n),$$

осуществляющая отображение открытого множества $h(V)\times\times h(V)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{2n}$ в открытое множество $h(U)\subset\mathbb{R}^n$, что если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — строчки координат элементов $a, b\in V$, то $\boldsymbol{c}$ — строчка координат элемента $c=ab$.

Для определенности мы всегда будем предполагать, что карта (U, h) центрирована в e, т. е. что

$$h(e)=0.$$

Так как $m(a, e)=a$ и $m(e, b)=b$ для любых элементов $a, b\in\mathcal{G}$, то вектор-функция (8) удовлетворяет соотношениям $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, 0)=\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}(0, \boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$ и, следовательно, имеет вид

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\ldots,$$

где многоточие обозначает члены векторного ряда Тейлора степени $\geqslant 2$, *ни один из которых не зависит только от* $\boldsymbol{a}$ *или* $\boldsymbol{b}$. (Для простоты класс гладкости мы предполагаем здесь равным C^∞. При меньшей гладкости следует вместо ряда Тейлора рассматривать соответствующий многочлен Тейлора.)

Сумму членов степени 2 ряда Тейлора функции $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ мы будем обозначать символом $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$. Согласно сказанному эта сумма билинейно зависит от $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. операция $*$ является умножением на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Мы будем называть операцию $*$ *главной билинейной частью* умножения (7) в группе Ли $\mathcal{G}$.

Таким образом, по определению

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}+\ldots, \tag{9}$$

где многоточие обозначает члены степени $\geqslant 3$.

Если $\boldsymbol{a}^{-1}$ — строка координат элемента a^{-1} (для элемента a, достаточно близкого к e), то $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^{-1})=0$ и, значит, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}^{-1}+\ldots=0$. Следовательно,

$$\boldsymbol{a}^{-1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}+\ldots, \tag{10}$$

где снова многоточие обозначает члены степени $\geqslant 3$.

Примеры групп Ли.

Пример 1. Полная линейная группа $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, будучи открытым подмножеством линейного пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц порядка n, является гладким многообразием. Центрированными в единице E этой группы координатами матрицы $A\in\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ являются элементы матрицы $A-E$. Поскольку

$$AB-E=(A-E)+(B-E)+(A-E)(B-E),$$

мы видим, что для группы $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ функция (8) выражается формулой

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$ — развернутые в строки матрицы $A-E$, $B-E$ и $(A-E)(B-E)$. Следовательно, эта функция гладка, и значит группа $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ является группой Ли.

Группой Ли будет и ее компонента единицы $\mathrm{GL}^+(n;\ \mathbb{R})$, состоящая из матриц с положительным определителем.

Пример 2. (Ср. замечание 1 лекции III.15.) Согласно определению 1 лекции III.11 подгруппа $\mathcal{G}$ группы $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ является *матричной группой Ли*, если существует такое линейное подпространство $\mathfrak{g}\subset\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, что

1° $e^B\in\mathcal{G}$ для любой матрицы $B\in\mathfrak{g}$;

2° если $e^B\in\mathcal{G}$ и $|B|<\ln 2$, то $B\in\mathfrak{g}$ (здесь $|B|=n\cdot\max|b_j^i|$, $B=\|b_j^i\|$).

Такая группа является гладким многообразием (предложение 1 лекции III.11) с картами вида $(CU_0,\ h_C)$, где $C\in\mathcal{G}$, U_0 — окрестность единичной матрицы E в группе $\mathcal{G}$, состоящая из матриц $e^B\in\mathcal{G}$, для которых $|B|<\ln 2$, а h_C — отображение $CU_0\to\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n^2}$, определенное формулой

$$h_C(CA)=\ln A,\qquad A\in U_0.$$

Так как для любых матриц $A_1,\ A_2\in U_0$ матрица $\ln(A_1A_2)$ является гладкой функцией матриц $B_1=\ln A_1$ и $B_2=\ln A_2$ (докажите!), то по отношению к этой гладкости умножение (7) гладко.

Следовательно, *любая матричная группа Ли является группой Ли.*

В частности (см. лекцию III.11), группами Ли будут группы $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(p,\ q)$, а также группы $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ и $\mathrm{Sp}(m)$. Группы же $\mathrm{O}(n;\ \mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{C})$ будут *комплексными группами Ли* (комплексно-аналитическими многообразиями, являющимися одновременно группами, для которых отображение (7) комплексно-аналитично).

Группа Ли $\mathcal{H}$ называется *подгруппой Ли* (или *гладкой подгруппой*) группы Ли $\mathcal{G}$, если $\mathcal{H}$ является подгруппой группы $\mathcal{G}$ (т. е. $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$ и $ab^{-1}\in\mathcal{H}$ для любых элементов $a,\ b\in\mathcal{H}$) и одновременно подмногообразием (вообще говоря, погруженным) многообразия $\mathcal{G}$. Иначе говоря, группа

Ли $\mathscr{H}$ представляет собой подгруппу Ли, если $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ и вложение $\iota: \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ является гомоморфизмом и одновременно погружением (в каждой точке $a \in \mathscr{H}$).

Задача 5. Пусть подгруппа $\mathscr{H}$ группы Ли $\mathscr{G}$ снабжена гладкостью, относительно которой она является группой Ли, и пусть вложение $\iota: \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ гладко в единице e группы $\mathscr{G}$ и является в e погружением. Покажите, что тогда $\mathscr{H}$ будет гладкой подгруппой группы $\mathscr{G}$. [Указание. Для любого элемента $a \in \mathscr{H}$ имеет место коммутативная диаграмма

(11)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H} & \xrightarrow{L_a} & \mathscr{H} \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathscr{G} & \xrightarrow{L_a} & \mathscr{G}, \end{array}$$

горизонтальные стрелки L_a которой представляют собой диффеоморфизмы $x \mapsto ax$, где $x \in \mathscr{H}$ для верхней стрелки и $x \in \mathscr{G}$ для нижней.]

Пример 3 (продолжение примера 2). Для матричной группы Ли $\mathscr{G}$ вложение $\mathscr{G} \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ в окрестности единичной матрицы E задается в координатах отображением $B \to e^B$, где матрица B координат матрицы $A \in \mathscr{G}$ равна $\ln A$. Так как

$$\left(\frac{\partial e^B}{\partial b^i_j}\right)_0 = \lim_{t \to 0} \frac{e^{tE^i_j} - E}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tE^i_j + O(t^2)}{t} = E^i_j,$$

где E^i_j—матричная (i, j)-единица (матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента на пересечении i-й строки и j-го столбца, который равен единице), то это вложение в точке E является погружением. Поэтому группа $\mathscr{G}$ является гладкой подгруппой группы Ли $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$.

Пример 4 (обобщение примера 1). Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная конечномерная *ассоциативная алгебра* над полем $\mathbb{R}$ с единицей e, т. е. конечномерное линейное пространство, одновременно являющееся ассоциативным кольцом с единицей e, умножение в котором однородно (удовлетворяет соотношению

$$\lambda(ab) = (\lambda a) b = a(\lambda b)$$

для любых элементов $a, b \in \mathscr{A}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$). Если a^i, b^i и c^i, $1 \leqslant i \leqslant n$,— координаты элементов a, b и $c = ab$ в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ линеала $\mathscr{A}$, то

(12)
$$c^i = \gamma^i_{jk} a^j b^k,$$

где γ^i_{jk}—некоторые числа (называемые *структурными константами* алгебры $\mathscr{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$).

Каждый элемент a алгебры $\mathcal{A}$ определяет линейный оператор

$$L_a\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto ax, \qquad x \in \mathcal{A}$$

(имеющий в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрицу $\|\gamma^i_{jk} a^j\|$) и формула $a \mapsto L_a$ задает гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\operatorname{End} \mathcal{A}$ всех линейных операторов на пространстве $\mathcal{A}$, являющийся, очевидно, мономорфизмом (если $L_a = 0$, то $a = L_a e = 0$).

В частности, элемент $a \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда обратим (существует такой элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$), когда обратим (невырожден) оператор L_a. Поэтому множество $\mathcal{A}^\circ$ всех обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}$,—являющееся, очевидно, группой по умножению,—открыто в $\mathcal{A}$ и, значит, является гладким многообразием. А так как центрированными в e координатами элемента $a \in \mathcal{A}$ являются координаты в базисе $e_1, \ldots, e_n$ элемента $a - e$ и так как

$$ab - e = (a-e) + (b-e) + (a-e)(b-e), \tag{13}$$

то *группа $\mathcal{A}^\circ$ является группой Ли.*

При $\mathcal{A} = \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ мы возвращаемся к группе $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$.

Для группы $\mathcal{A}^\circ$ координатами $a^1, \ldots, a^n$ элемента $a \in \mathcal{A}^\circ$ являются линейные координаты элемента $a - e$. Поэтому строчку $\boldsymbol{a}$ координат $a^1, \ldots, a^n$ мы можем отождествлять с элементом $a - e$. В силу этого отождествления главная билинейная часть умножения в $\mathcal{A}^\circ$ будет выражаться формулой

$$a * b = ab - a - b.$$

Эта операция играет важную роль в теории алгебр и называется *умножением Джекобсона.*

Заметим, что для алгебры $\mathcal{A}^\circ$ в формуле (9) члены первой степени отсутствуют. (Но в формуле (10) они присутствуют!)

Так как для каждого элемента a произвольной группы Ли $\mathcal{G}$ отображение (11) является диффеоморфизмом, то для любого векторного поля X на $\mathcal{G}$ определено векторное поле

$$L_a^* X\colon b \mapsto (dL_a)_b^{-1} X_{ab}, \qquad b \in \mathcal{G}$$

(см. формулу (9) лекции III.17).

Определение 2. Векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$ называется *левоинвариантным*, если

$$L_a^* X = X \qquad \text{для любого элемента } a \in \mathcal{G},$$

т. е. если

(14) $\qquad X_{ab}=(dL_a)_b X_b \qquad$ для любых элементов $a, b \in \mathscr{G}$.

Ясно, что множество $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных векторных полей на $\mathscr{G}$ является линейным подпространством алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathscr{G}$ всех векторных полей на $\mathscr{G}$. Более того, так как для любых векторных полей X и Y на $\mathscr{G}$

$$L_a^*[X, Y]=[L_a^*X, L_a^*Y]$$

(см. замечание 1 лекции III.17), то это подпространство является даже подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}\mathscr{G}$ и, следовательно, алгеброй Ли.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли* группы Ли $\mathscr{G}$.

Для обозначения этой алгебры мы будем использовать также символ $\mathfrak{l}(\mathscr{G})$ (или $\mathfrak{l}\mathscr{G}$).

Пример 5. Так как для любой ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ группа Ли $\mathscr{A}^\circ$ является открытым подмногообразием линейного пространства $\mathscr{A}$, то касательное пространство $\mathbf{T}_a\mathscr{A}$ этой группы в произвольной точке $a \in \mathscr{A}^\circ$ естественным образом отождествляется с $\mathscr{A}$, причем, если $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$ — координаты в $\mathscr{A}$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$, то в этом отождествлении базису

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a$$

пространства $\mathbf{T}_a\mathscr{A}$ отвечает как раз базис $e_1, \ldots, e_n$. Следовательно, каждое векторное поле X на $\mathscr{A}^\circ$ можно интерпретировать как отображение

(15) $$X\colon \mathscr{A}^\circ \to \mathscr{A}.$$

Так как отображение $L_a\colon \mathscr{A}^\circ \to \mathscr{A}^\circ$, $x \mapsto ax$, $a \in A^\circ$, в координатах $x^1, \ldots, x^n$ записывается формулами

$$y^i = \gamma^i_{jk} a^j x^k$$

и так как

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \gamma^i_{jk} a^j,$$

то отображение $(dL_a)_b\colon \mathbf{T}_b\mathscr{A}^\circ \to \mathbf{T}_{ab}\mathscr{A}^\circ$, рассматриваемое в силу отождествлений $\mathbf{T}_b\mathscr{A}^\circ = \mathscr{A}$ и $\mathbf{T}_{ab}\mathscr{A}^\circ = \mathscr{A}$ как отображение $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$, будет совпадать с отображением L_a (главная линейная часть линейной функции совпадает с ней самой). Поэтому условие (14) левоинвариантности поля (15) имеет вид

$$X \circ L_a = L_a \circ X,$$

т. е. вид

(16) $$X(ab) = aX(b), \qquad a, b \in \mathcal{A}^\circ.$$

Положив $c = X(e)$, получим

(17) $$X(a) = ac, \qquad c \in \mathcal{A}.$$

Поскольку любое отображение вида (17) удовлетворяет, очевидно, соотношению (16), этим доказано, что *левоинвариантные векторные поля на группе Ли $\mathcal{A}^\circ$ находятся в естественном биективном соответствии с элементами алгебры $\mathcal{A}$.* Элементу $c \in \mathcal{A}$ соответствует при этом поле X, для которого

(18) $$X_a = (ac)^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$$

в любой точке $a \in \mathcal{A}^\circ$, где $(ac)^i$—координаты элемента ac.

Формула (18) означает, что компоненты X^i векторного поля X в карте $(\mathcal{A}^\circ, x^1, \ldots, x^n)$ выражаются формулами

$$X^i = (xc)^i = \gamma^i_{jk} x^j c^k,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \gamma^i_{jk} c^k.$$

Поэтому если Y—другое левоинвариантное векторное поле на $\mathcal{G}$ и если оно отвечает элементу $d \in \mathcal{A}$, то (см. формулу (22) лекции III.16) для компонент $[X, Y]^i$ поля $[X, Y]$ будет иметь место формула

$$\begin{aligned}[X, Y]^i &= X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \\ &= \gamma^j_{lk} x^l c^k \gamma^i_{js} d^s - \gamma^j_{lk} x^l d^k \gamma^i_{js} c^s = \\ &= \gamma^i_{js} (xc)^j d^s - \gamma^i_{js} (xd)^j c^s = \\ &= (xcd)^i - (xdc)^i = (x[c, d])^i,\end{aligned}$$

где $[c, d] = cd - dc$. Следовательно, полю $[X, Y]$ будет отвечать элемент $[c, d]$.

Относительно операции $c, d \mapsto [c, d]$ линейное пространство $\mathcal{A}$ является (проверьте!) алгеброй Ли. Эта алгебра называется *коммутаторной алгеброй Ли* ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ и обозначается символом $[\mathcal{A}]$.

В этой терминологии доказанное утверждение означает, что *алгебра Ли* $\mathfrak{l}(\mathcal{A}^\circ)$ *группы Ли* $\mathcal{A}^\circ$ *естественным образом отождествляется с алгеброй Ли* $[\mathcal{A}]$:

$$\mathfrak{l}(\mathcal{A}^\circ)=[\mathcal{A}].$$

В частности $\mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}))=[\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})]$.

На этом основании алгебра Ли $[\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})]$ обычно обозначается символом $\mathfrak{gl}(n;\ \mathbb{R})$ или просто $\mathfrak{gl}(n)$; ср. лекцию III.11.

[Обратим внимание, что в лекции III.11 алгебры Ли вводились — только для матричных групп! — совсем другим способом. Мы видим, что для группы $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ оба способа приводят к одному результату. Ниже мы покажем, что будет и для произвольных матричных групп Ли.]

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ — касательное пространство к $\mathcal{G}$ в точке $e\in\mathcal{G}$. Рассмотрим отображение

$$\mathfrak{g}\to\mathbf{T}_e\mathcal{G},\quad X\mapsto X_e, \tag{19}$$

сопоставляющее каждому векторному полю $X\in\mathfrak{g}$ его значение X_e в e. Очевидно, что это отображение линейно.

Предложение 2. *Отображение* (19) *является изоморфизмом линейных пространств.*

Доказательство. Пусть A — произвольный вектор из $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$. Для каждой точки $a\in\mathcal{G}$ положим

$$X_a=(dL_a)_e A.$$

Предложение 2 будет доказано, если мы докажем, что

а. Отображение $a\mapsto X_a$ гладко, и, значит, (поскольку $X_a\in\mathbf{T}_a\mathcal{G}$) является векторным полем на $\mathcal{G}$.

б. Это поле левоинвариантно (принадлежит $\mathfrak{g}$).

в. Отображение

$$\mathbf{T}_e\mathcal{G}\to\mathfrak{g},\quad A\mapsto X, \tag{20}$$

обратно отображению (19).

Для доказательства утверждения **в** достаточно заметить, что, во-первых, по построению $X_e=A$ и, во-вторых, что для любого левоинвариантного векторного поля X

$$X_a=(dL_a)_e X_e.$$

Утверждение **б** также проверяется без труда: так как $L_a\circ L_b=L_{ab}$ и, значит, $(dL_a)_b\circ(dL_b)_e=(dL_{ab})_e$, то

$$(dL_a)_b X_b=(dL_a)_b((dL_b)_e A)=(dL_{ab})_e A=X_{ab}.$$

Для проверки утверждения **а** найдем компоненты вектора X_a в локальных координатах.

Пусть U и V — рассмотренные выше координатные окрестности, в которых умножение в $\mathcal{G}$ записывается вектор-функцией (8). Тогда при $a \in V$ отображение L_a на V будет задаваться функцией $\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, и значит отображение $(dL_a)_e$ будет действовать по формуле

$$(dL_a)_e\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_e = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $m^i = m^i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Следовательно, компоненты X^i поля X на окрестности V будут задаваться формулами

$$X^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0 A^j, \tag{21}$$

где A^j — компоненты вектора A в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$, и, значит, будут гладкими функциями от a. Это доказывает, что *на окрестности V поле X гладко*.

С другой стороны, для любого элемента $g \in \mathcal{G}$ множество $gV = L_g V$ открыто и пара $(gV, h \circ L_g^{-1})$ является картой. При этом, в силу левоинвариантности, если X^i — компоненты поля X в карте (V, h), то $X^i \circ L_g$ — компоненты поля X в карте $(gV, h \circ L_g^{-1})$. Поэтому поле X гладко и на любом множестве вида gV. Для завершения доказательства остается заметить, что множества вида gV, $g \in \mathcal{G}$, покрывают всю группу $\mathcal{G}$. □

Для групп Ли вида $\mathcal{A}^\circ$ предложение 2 непосредственно вытекает также из результатов примера 5.

Следствие. *Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathcal{G})$ конечномерна и ее размерность равна размерности n группы $\mathcal{G}$.*

Мы перенесем лиеву операцию в линеал $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, положив для любых векторов $A, B \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$

$$[A, B] = [X, Y]_e, \tag{22}$$

где X и Y — такие левоинвариантные векторные поля на $\mathcal{G}$, что $X_e = A$ и $Y_e = B$.

В силу этого соглашения пространство $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ будет алгеброй Ли, естественно изоморфной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Как правило, мы будем отождествлять ее с $\mathfrak{g}$.

Замечательно, что для произведения (22) векторов A, $B \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ существует простая явная формула, выражающая его через умножение (7) в группе Ли $\mathcal{G}$ или — точнее — через его главную билинейную часть $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$.

По определению действующая в пространстве $\mathbb{R}^n$ операция $*$ строится с помощью некоторой центрированной в e карты $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$. От этой же карты зависит и базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_e, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_e \tag{23}$$

пространства $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, т. е. координатный изоморфизм $\mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ (являющийся в силу отождествления $\mathbf{T}_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ не чем иным, как дифференциалом $(dh)_e$ в точке e координатного отображения $h: U \to \mathbb{R}^n$). Мы перенесем посредством изоморфизма $(dh)_e$ операцию $*$ из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $T_e\mathcal{G}$, т. е. для любых векторов $A, B \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ примем за $A * B$ вектор, имеющий в базисе (23) координаты, составляющие строку $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — строки координат векторов A и B соответственно.

Подчеркнем, что операция $*$ и в пространстве $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ зависит от выбора карты (U, h).

Оказывается, что операция (22) очень просто выражается через операцию $*$ в $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$.

Предложение 3. *Для любых векторов $A, B \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ имеет место равенство*

$$[A, B] = A * B - B * A. \tag{24}$$

Доказательство. По определению $[A, B] = [X, Y]_e$, где X и Y — такие левоинвариантные векторные поля, что $X_e = A$ и $X_e = B$. При этом согласно формуле (21) компоненты X^i и Y^i полей X и Y в произвольной карте $(U, x^1, \ldots$ $\ldots, x^n)$ задаются формулами

$$X^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0 A^j, \quad Y^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0 B^j,$$

где $\left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0$ — значения в точке $(0, 0)$ частных производных компонент $m^i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ вектор-функции $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ по компонентам b^j вектора $\boldsymbol{b}$. Следовательно (см. формулу (22) лекции III.16), для компонент $[X, Y]_e^i = [A, B]^i$ вектора $[A, B]$ будет иметь место формула

$$[A, B]^i = \left(\frac{\partial m^j}{\partial b^k}\right)_0 A^k \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l}\right) B^l - \left(\frac{\partial m^j}{\partial b^k}\right)_0 B^k \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l}\right)_0 A^l =$$
$$= (A^k B^l - B^k A^l) \left(\frac{\partial m^j}{\partial b^k}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l}\right)_0.$$

Но, согласно формуле (9)

$$m^i(a,\ b) = a^i + b^i + \gamma^i_{kl} a^k b^l + \ldots,$$

где $\gamma^i_{kl} a^k b^l$ — компоненты вектора $a * b$. Следовательно,

$$\frac{\partial m^i}{\partial b^l} = \delta^i_l + \gamma^i_{kl} a^k + \ldots, \quad \frac{\partial^2 m^i}{\partial a^k\, \partial b^l} = \gamma^i_{kl} + \ldots,$$

и потому

$$\left(\frac{\partial m^i}{\partial b^l}\right)_0 = \delta^i_l, \quad \frac{\partial^2 m^i}{\partial a^k\, \partial b^l} = \gamma^i_{kl}.$$

Значит,

$$\begin{aligned}[A,\ B]^i &= (A^k B^l - B^k A^l)\, \delta^j_k \gamma^i_{jl} = \\ &= \gamma^i_{kl} A^k B^l - \gamma^i_{kl} B^k A^l = \\ &= (A * B)^i - (B * A)^i,\end{aligned}$$

что и доказывает формулу (24). □

Замечание 1. Операция $*$ единственным образом представляется в виде суммы двух операций

$$A * B = A \underset{1}{*} B + A \underset{2}{*} B,$$

первая из которых коммутативна, а вторая антикоммутативна. Предложение 3 означает, что антикоммутативная часть $\underset{2}{*}$ операции выражается через операцию Ли:

$$A \underset{2}{*} B = \frac{1}{2}[A,\ B],$$

и поэтому не зависит от выбора карты $(U,\ h)$. [Напротив как мы покажем ниже, карту $(U,\ h)$ можно выбрать так, чтобы коммутативная часть $A \underset{1}{*} B$ произведения $A * B$ была тождественно равна нулю.]

Задача 6. Исследуйте, как меняется операция $*$ при замене карты $(U,\ h)$, и, в частности, проверьте, что антикоммутативная часть этой операции при замене карты $(U,\ h)$ остается прежней.