Лекция 14

Однопараметрические подгруппы. — Экспоненциальное отображение и нормальные координаты.— Выражение умножения в группе Ли через умножение в ее алгебре Ли.— Дифференциал присоединенного представления.— Операции в алгебре Ли группы Ли и однопараметрические подгруппы.— Подгруппы Ли групп Ли.— Распределения и их интегральные подмногообразия.— Теорема Фробениуса.—Подмногообразия многообразий, удовлетворяющих второй аксиоме счетности.— Единственность структуры подалгебры Ли.

Определение 1. Гладкая кривая

$$\beta\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G},$$

определенная на всей оси $\mathbb{R}$, называется *однопараметрической подгруппой* группы Ли $\mathcal{G}$, если она является гомоморфизмом групп, т. е. если для любых s, $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\beta(s+t) = \beta(s)\beta(t).$$

Конечно, $\beta(0) = e$.

Подчеркнем, что однопараметрическая подгруппа является не множеством, а отображением.

Задача 1. Покажите, что любой гомоморфизм $\beta\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}$ является гладким отображением (и, значит, однопараметрической подгруппой). [Указание. Записав гомоморфизм β в локальных координатах, докажите сначала, что он является гладким отображением в точке 0.]

Пример 1. Однопараметрической подгруппой является постоянное отображение

$$\mathrm{const}_e\colon t \longmapsto e, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Пусть $\mathcal{G}$—матричная группа Ли и $\mathfrak{g}$— линейное подпространство пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, предусмотренное определением 1 лекции III.11 (см. пример 2 лекции 13). Тогда для любой матрицы $B \in \mathfrak{g}$ отображение

$$\beta\colon t \longmapsto e^{tB}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

будет, очевидно, однопараметрической подгруппой группы $\mathcal{G}$.

Задача 2. Покажите, что любая однопараметрическая подгруппа матричной группы Ли $\mathcal{G}$ имеет вид (1).

Задача 3. Покажите, что

а. Для любого элемента b конечномерной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ ряд

$$e^b = e + b + \frac{b^2}{2!} + \ldots + \frac{b^n}{n!} + \ldots$$

сходится.

б. Отображение

$$\beta\colon t \longmapsto e^{tb}, \qquad b \in \mathcal{A}, \tag{2}$$

является однопараметрической подгруппой группы Ли $\mathcal{A}^\circ$.

в. Каждая однопараметрическая подгруппа группы $\mathcal{A}^\circ$ имеет вид (2).

Оказывается, что аналогичное описание однопараметрических подгрупп возможно и для любых групп Ли $\mathcal{G}$. Из-за недостатка места мы изложим соответствующую конструкцию в серии задач.

Задача 4. Пусть $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — произвольное гладкое отображение гладких многообразий. Покажите, что *для любой кривой* $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ *в каждой точке* $t \in I$ *имеет место равенство*

$$(f \circ \gamma)^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = (df)_{\gamma(t)}\, \dot\gamma(t). \tag{3}$$

[Указание. Если в локальных координатах отображение f задается вектор-функцией $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$, а кривая γ — вектор-функцией $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, то

$$(f \circ \gamma)^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = \frac{dy^j(\boldsymbol{x}(t))}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{(f\circ\gamma)(t)} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(\gamma(t))} =$$
$$= \frac{dx^i}{dt}(df)_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)} = (df)_{\gamma(t)}\left(\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)}\right) = (df)_{\gamma(t)}\,\dot\gamma(t)$$

для всех $t \in I$.]

Задача 5. Покажите, что *каждая однопараметрическая подгруппа* β *группы Ли* $\mathcal{G}$ *является (очевидно, максимальной) интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля* $X \in \mathcal{G}$, *т. е.*

$$\dot\beta(t) = X_{\beta(t)} \qquad \text{для любого} \quad t \in \mathbb{R}.$$

[Указание. Поле X характеризуется условием $X_e = \dot\beta(0)$. Из формулы (2), примененной к отображению $L_a\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ и кривой β, следует, что

$$X_a = (dL_a)_e X_e = (dL_a)_e \dot\beta(0) = (L_a \circ \beta)^{\boldsymbol{\cdot}}(0)$$

для любой точки $a \in \mathcal{G}$. С другой стороны, если $a = \beta(t)$, то $L_a \circ \beta\colon s \longmapsto \beta(s+t)$ и, значит, $(L_a \circ \beta)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = \dot\beta(t)$.]

Задача 6. Покажите, что *каждая группа Ли $\mathcal{G}$ является хаусдорфовым многообразием.* [Указание. Диагональ Δ произведения $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ является прообразом единицы e группы $\mathcal{G}$ при непрерывном отображении $(a, b)\mapsto ab^{-1}$.]

Поэтому (см. теорему 1 лекции III.17) для каждого векторного поля X на $\mathcal{G}$ и любого элемента $a\in\mathcal{G}$ существует единственная максимальная интегральная кривая β_a: $I_a\to\mathcal{G}$ поля X, проходящая при $t=0$ через точку a. Пусть $I=I_e$ и $\beta=\beta_e$.

Задача 7. Покажите, что *если поле X левоинвариантно, то $\beta_a=L_a\circ\beta$.* [Указание. Так как

$$\begin{aligned}(L_a\circ\beta)^\circ(t)&=(dL_a)_{\beta(t)}\dot\beta(t)=\\&=(dL_a)_{\beta(t)}X_{\beta(t)}=X_{a\beta(t)}=\\&=X_{(L_a\circ\beta)(t)},\end{aligned}$$

то $L_a\circ\beta$ является—очевидно, максимальной—интегральной кривой поля X, проходящей при $t=0$ через точку a.]

Задача 8. Докажите, что если s, t, $s+t\in I$, то

$$\beta(s+t)=\beta(s)\beta(t). \tag{4}$$

[Указание. Обе кривые $t\mapsto\beta(s+t)$ и $t\mapsto\beta(s)\beta(t)$ являются интегральными кривыми левоинвариантного поля X, проходящими при $t=0$ через точку $\beta(s)$.]

Задача 9. Для любого числа $t\in\mathbb{R}$ существует такое целое число $n>0$, что $\frac{t}{n}\in I$. Покажите, что *формула*

$$\gamma(t)=\beta\left(\frac{t}{n}\right)^n \tag{5}$$

корректно определяет гладкую кривую γ: $\mathbb{R}\to\mathcal{G}$, являющуюся однопараметрической подгруппой. [Указание. Если $\frac{t}{n}\in I$ и $\frac{t}{m}\in I$, то $\frac{t}{nm}\in I$, и потому согласно формуле (4)

$$\beta\left(\frac{t}{n}\right)=\beta\left(\frac{t}{mn}\right)^m \quad\text{и}\quad \beta\left(\frac{t}{m}\right)=\beta\left(\frac{t}{mn}\right)^n.$$

Это дает корректность. Кроме того, если $\frac{t_0}{n_0}\in I$, то существует такое $\varepsilon>0$, что $\frac{t}{n_0}\in I$ для любого t такого, что $|t-t_0|<\varepsilon$. Это дает гладкость.]

Задача 10. Покажите, что *кривая* (5) *является — очевидно, максимальной — интегральной кривой левоинвариантного поля* X. [Указание. Так как кривая (5) является однопараметрической подгруппой, то для любой точки $a = \gamma(t)$ кривая $L_a \circ \gamma$: $s \longmapsto a\gamma(s)$ совпадает с кривой $s \longmapsto \gamma(s+t)$, и потому

$$\dot\gamma(t) = (L_a \circ \gamma)^{\cdot}(0) = (dL_a)_e \dot\gamma(0) =$$
$$= (dL_a)_e \dot\gamma(0) = (dL_a)_e X_e = X_a = X_{\gamma(t)}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$.]

Поскольку $\gamma(0) = e$ это доказывает, что $\gamma = \beta$ (и, в частности, — что $I = \mathbb{R}$).

В итоге мы получаем следующее предложение:

Предложение 1. *Однопараметрические подгруппы группы Ли* $\mathscr{G}$ *— это в точности проходящие при* $t = 0$ *через точку* e *максимальные интегральные кривые левоинвариантных векторных полей на* $\mathscr{G}$. ☐

Следствие. *Для любого вектора* $A \in \mathbf{T}_e\mathscr{G}$ *существует единственная однопараметрическая подгруппа* β, *для которой*

$$\dot\beta(0) = A. \ \square$$

Таким образом, однопараметрические подгруппы группы Ли $\mathscr{G}$ находятся в естественном биективном соответствии с элементами алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathscr{G})$.

Однопараметрическую подгруппу, отвечающую элементу $X \in \mathfrak{g}$, мы будем обозначать символом β_X или β_A, где $A = X_e$. Таким образом, по определению

$$\dot\beta_A(0) = A$$

для любого вектора $A \in \mathbf{T}_e\mathscr{G}$.

Определение 2. Отображение

$$\exp\colon \mathbf{T}_e\mathscr{G} \to \mathscr{G},$$

определенное формулой

$$\exp A = \beta_A(1), \qquad A \in \mathbf{T}_e\mathscr{G},$$

называется *экспоненциальным отображением.*

Очевидно, что для кривой $t \longmapsto \beta_A(\lambda t)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, касательным вектором в точке 0 является вектор $\lambda\dot\beta_A(0) = \lambda A$, и эта кривая также является однопараметрической подгруппой. Следовательно,

$$\beta_A(\lambda t) = \beta_{\lambda A}(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

При $t=1$ из формулы (6) следует, что $\beta_A(\lambda) = \beta_{\lambda A}(1)$, т. е.—после замены λ на t,—что

$$\beta_A(t) = \exp tA. \tag{7}$$

В свете примера 2 это означает, что отображение exp является обобщением на любые группы Ли $\mathcal{G}$ матричного отображения $A \longmapsto e^A$. Это объясняет как его название, так и обозначение.

Так как согласно формуле (7) $\beta_A(-1) = \exp(-A)$ и $\beta_A(-1)\beta_A(1) = \beta_A(0) = e$, то $\exp(-A) = \beta_A(1)^{-1}$, т. е.

$$\exp(-A) = (\exp A)^{-1}, \qquad A \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}. \tag{8}$$

В дальнейшем для упрощения формул вместо $(\exp A)^{-1}$ мы будем писать $\exp A^{-1}$.

Как мы знаем из лекции III.17, каждое векторное поле X определяет некоторый максимальный поток $\{\varphi_t\}$, для которого $\varphi_t(a) = \beta_a(t)$, где β_a—максимальная интегральная кривая поля X, проходящая при $t=0$ через точку a. Так как для левоинвариантного поля X кривые β_a определены на всей оси $\mathbb{R}$, то для каждого левоинвариантного поля X на группе Ли $\mathcal{G}$ поток $\{\varphi_t\}$ состоит из диффеоморфизмов $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (является, как говорят, *полным потоком*). Так как $\beta_a(t) = a\beta_X(t)$, то эти диффеоморфизмы действуют по формуле

$$\varphi_t(a) = a \cdot \exp tA, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{G},$$

где $A = X_e$, т. е. являются диффеоморфизмами $R_{\exp tA}$.

Так как $\beta_A(0) = e$ и $\dot{\beta}_A(0) = A$, то в произвольной карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$, центрированной в точке e, кривая β_A задается вектор-функцией $\boldsymbol{x}(t)$ вида

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{a})t^2 + \ldots + \boldsymbol{c}_m(\boldsymbol{a})t^m + \ldots,$$

где $\boldsymbol{a}$—строка координат вектора A в базисе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)$$

пространства $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, а $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{a}), \ldots, \boldsymbol{c}_m(\boldsymbol{a}), \ldots$—некоторые вектор-функции от $\boldsymbol{a}$ (гладкие в силу теоремы о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных). При этом, если $|\lambda|$ достаточно мало (чтобы в U существовала точка с координатами $x^i(\lambda t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$), то согласно формуле (6) тождественно по t должно иметь место равенство

$$\begin{aligned}(\lambda a)\,t + c_2(\lambda a)\,t^2 + \ldots + c_m(\lambda a)\,t^m + \ldots =\\ = a(\lambda t) + c_2(a)(\lambda t)^2 + \ldots + c_m(a)(\lambda t)^m + \ldots\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$c_2(\lambda a) = \lambda^2 c_2(a), \quad \ldots, \quad c_m(\lambda a) = \lambda^m c_m(a),$$

т. е. что *для любого* $m \geqslant 2$ *функция* $c_m(a)$ *является однородной функцией от* a *степени* m.

Задача 11. Покажите, что функции $c_m(a)$ являются многочленами от a (т. е. многочленами от $a^1, \ldots, a^n$ являются все их компоненты).

Поскольку

$$\lambda^m \frac{\partial c_m(a)}{\partial a^i} = \frac{\partial\,[\lambda^m c_m(a)]}{\partial a^i} = \lambda \frac{\partial c_m}{\partial a_i}(\lambda a),$$

все частные производные первого порядка каждой из функций c_m являются однородными функциями степени $m-1 \geqslant 1$, и значит их значения в точке 0 равны нулю:

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial c_m}{\partial a^i}\right)_0 = 0 \text{ для любого } m \geqslant 2 \text{ и любого } i = 1, \ldots, n.$$

С другой стороны, если вектор a достаточно мал (чтобы в U существовала точка с координатами $x^i(1)$), то точка $\exp A$ будет принадлежать окрестности U и согласно формуле (8) ее координаты x^i будут выражаться формулой

$$(10) \qquad x^i = a^i + c_2^i(a) + \ldots + c_m^i(a) + \ldots,$$

где a^i, $c_2^i(a)$, $\ldots$, $c_m^i(a)$, $\ldots$ — координаты векторов a, $c_2(a)$, $\ldots$, $c_m(a)$. По определению это означает, что *в некоторой окрестности точки* $0 \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ *отображение* exp *записывается в координатах функциями* (10).

Поскольку в силу формул (9) значения частных производных функций (10) в точке 0 выражаются формулой

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^j}\right)_0 = \delta^i_j,$$

т. е. составляют единичную матрицу E, отсюда следует, что дифференциал $d\exp_0$ отображения exp в точке $0 \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$, рассматриваемый в силу отождествления $\mathbf{T}_0(\mathbf{T}_e\mathcal{G}) = \mathbf{T}_e\mathcal{G}$

как отображение

$$d\exp_0\colon \mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathbf{T}_e\mathcal{G},$$

является тождественным отображением.

Поэтому *отображение*

$$\exp\colon \mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

в точке 0 *этально*, т. е. диффеоморфно отображает окрестность точки 0 в алгебре Ли $\mathbf{T}_e\mathcal{G} = \mathfrak{g}$ на окрестность точки e в группе Ли $\mathcal{G}$.

Эти окрестности называются *нормальными окрестностями* (точек 0 и e соответственно). [Впрочем, от нормальных окрестностей $U^{(0)}$ в $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ обычно еще требуется выполнения условия *звездности* (если $A \in U^{(0)}$, то $\lambda A \in U^{(0)}$ для любого λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$).]

Для любой нормальной окрестности U точки e в группе $\mathcal{G}$ композиция h отображения $\exp^{-1}\colon U \to \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ и произвольного координатного изоморфизма $\mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ является диффеоморфным отображением окрестности U на открытое множество $h(U) \subset \mathbb{R}^n$. По определению это означает, что *пара* (U, h) *является картой в точке* e *группы Ли* $\mathcal{G}$.

Карты такого вида называются *нормальными картами*, а соответствующие локальные координаты — *нормальными координатами*. (Употребляется также термин — *канонические координаты первого рода*.)

Нормальные координаты характеризуются, очевидно, тем, что однопараметрические подгруппы задаются в них линейными функциями.

Задача 12. Докажите, что *связная топологическая группа порождается любой окрестностью единицы* U. [Указание. Множество, состоящее из всевозможных произведений элементов из U, одновременно замкнуто и открыто.]

В частности, если группа Ли $\mathcal{G}$ связна, то она порождается любой нормальной окрестностью единицы U. Поскольку $U \subset \exp\mathfrak{g}$, отсюда следует, что *каждая связная группа Ли* $\mathcal{G}$ *порождается множеством* $\exp\mathfrak{g}$. (Заметим, что, вообще говоря, $\exp\mathfrak{g} \neq \mathcal{G}$.)

Задача 13. Опишите множество $\exp\mathfrak{g}$ для алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ и $\mathfrak{so}(n)$ и удостоверьтесь, что группы $GL^+(n; \mathbb{R})$ и $SO(n)$ действительно порождаются этими множествами (при этом $\exp\mathfrak{so}(n) = SO(n)$).

Произвольная нормальная окрестность U_0 точки $0 \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ содержит (докажите!) такую окрестность V_0, что для любых векторов $A, B \in V_0$ точка $\exp A \cdot \exp B$ принадлежит окрестности $U = \exp U_0$ точки $e \in \mathscr{G}$ и, значит, имеет вид $\exp C$, где $C \in U_0$. Мы положим

$$C = m(A, B). \tag{11}$$

Таким образом, по определению

$$\exp A \cdot \exp B = \exp m(A, B)$$

для любых векторов $A, B \in U_0$.

Образ $\boldsymbol{a}$ вектора A при произвольном координатном изоморфизме $\mathsf{T}_e\mathscr{G} \to \mathbb{R}^n$ является не чем иным, как вектором нормальных координат точки $a = \exp A$ в соответствующей нормальной карте (U, h). Поэтому вектор-функция $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, выражающая в карте (U, h) умножение в группе $\mathscr{G}$ (см. формулу (8) лекции 13), выражает в координатах операцию (11). Следовательно,

$$m(A, B) = A + B + A * B + \ldots,$$

где $*$ — операция $*$ из формулы (9) лекции 13, перенесенная в $\mathsf{T}_e\mathscr{G}$ посредством изоморфизма $(dh)_e$: $\mathsf{T}_e\mathscr{G} \to \mathbb{R}^n$ (т. е. операция из предложения 3 лекции 13, построенная с помощью нормальной карты (U, h)).

Как мы знаем (см. формулу (10) лекции 13), для любой карты (U, h), центрированной в точке e, вектор $\boldsymbol{a}^{-1}$ координат точки a^{-1} выражается формулой

$$\boldsymbol{a}^{-1} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} * \boldsymbol{a} + \ldots$$

С другой стороны, согласно формуле (8), если карта (U, h) нормальна, то $\boldsymbol{a}^{-1} = -\boldsymbol{a}$. Это доказывает, что $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{a} = 0$, т. е. что *построенная с помощью нормальных координат операция $*$ антикоммутативна* (в пространстве $\mathbb{R}^n$, а, значит, и в пространстве $\mathsf{T}_e\mathscr{G}$) и потому (см. замечание 1 лекции 13) выражается через умножение в алгебре Ли:

$$A * B = \frac{1}{2}[A, B].$$

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_e\mathscr{G}$ из некоторой окрестности нулевого вектора имеет место формула*

$$\exp A \cdot \exp B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \ldots\right), \tag{12}$$

где многоточие обозначает члены степени $\geqslant 3$. □

Согласно этой теореме умножение в группе Ли $\mathcal{G}$ вблизи точки e однозначно восстанавливается — по крайней мере, с точностью до членов порядка $\geqslant 3$ — по умножению в ее алгебре Ли $\mathcal{G}$.

Замечание 1. На самом деле *это восстановление полное*, т. е. члены всех степеней в формуле (12) выражаются через операцию $[\ ,\ ]$, но доказательство требует вычислений, далеко выходящих за рамки этого курса.

Теорема 1 имеет много важных следствий. За недостатком места мы изложим их в виде серии задач.

Для каждого элемента a группы $\mathcal{G}$ — очевидно, гладкое — отображение

$$\operatorname{int}_a\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G},\quad x\mapsto axa^{-1},\qquad x\in\mathcal{G}, \tag{13}$$

является автоморфизмом группы $\mathcal{G}$, называемым *внутренним автоморфизмом, порожденным элементом* a. Дифференциал $d(\operatorname{int}_a)_e$ автоморфизма int_a в точке e представляет собой обратимый линейный оператор $\mathrm{T}_e\mathcal{G}\to\mathrm{T}_e\mathcal{G}$ и обозначается символом $\operatorname{Ad} a$. Отображение

$$\operatorname{Ad}\colon a\mapsto \operatorname{Ad} a \tag{14}$$

является — очевидно, гомоморфным — отображением группы $\mathcal{G}$ в группу $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ всех обратимых линейных операторов линеала $\mathfrak{g}=\mathrm{T}_e\mathcal{G}$. Оно называется *присоединенным представлением* группы Ли $\mathcal{G}$.

Задача 14. Покажите, что *отображение* Ad *гладко*.

Дифференциал отображения Ad в точке e обозначается символом ad. Он является линейным отображением

$$\mathfrak{g}\to\operatorname{End}\mathfrak{g}$$

линеала $\mathfrak{g}$ в линеал $\mathfrak{l}(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})=\operatorname{End}\mathfrak{g}$ всех линейных отображений $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$.

Задача 15. Покажите, что *для любых элементов* $A, B\in\mathfrak{g}$ *имеет место равенство*

$$(\operatorname{ad} A)B=[A, B]. \tag{15}$$

[Указание. Так как отображение $s\mapsto\operatorname{Ad}(\beta_A(s))B$ является кривой в линейном пространстве, то

$$[(\operatorname{Ad}\circ\beta_A)^{\boldsymbol\cdot}(0)]\,B=\lim_{s\to 0}\frac{\operatorname{Ad}(\beta_A(s))-\operatorname{Ad} e}{s}\,B,$$

а в силу общей формулы (3) $\operatorname{ad} A=(\operatorname{Ad}\circ\beta_A)^{\boldsymbol\cdot}(0)$,

$$\operatorname{Ad}(\beta_A(s))B=(\operatorname{int}_{\beta_A(s)}\circ\beta_B)^{\boldsymbol\cdot}(0).$$

С другой стороны, согласно формуле (12)

(16) $$(\mathrm{int}_{\beta_A(s)} \circ \beta_B)(t) = (\exp sA)(\exp tB)(\exp sA)^{-1} = \\ = \exp(tB + st[A, B] + \dots)$$

и, значнт, $\mathrm{Ad}(\beta_A(s))B = B + s[A, B] + \dots$]

Задача 16. Выведите отсюда, что

(17) $$\mathrm{Ad}(\exp A) = e^{\mathrm{ad}\,A}$$

для любого элемента $A \in \mathfrak{g}$. [Указание. Обе кривые

$$t \mapsto \mathrm{Ad}(t \exp A) \quad \text{и} \quad t \mapsto e^{t\,\mathrm{ad}\,A}$$

являются однопараметрическими подгруппами группы Ли $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_{\text{лин}}$, имеющими при $t = 0$ один и тот же касательный вектор $(d\,\mathrm{Ad})_e A = \mathrm{ad}\,A$.]

Задача 17. Пусть u_A и u_B — кривые в группе $\mathcal{G}$, проходящие при $t = 0$ через точку e и имеющие при $t = 0$ касательные векторы A и B соответственно. Покажите, что кривая

$$t \mapsto u_A(t)\, u_B(t)$$

имеет при $t = 0$ касательный вектор $A + B$, а кривая

$$t \mapsto u_A(\tau)\, u_B(\tau)\, u_A(\tau)^{-1}\, u_B(\tau)^{-1},$$

где $\tau = \operatorname{sign} t \cdot \sqrt{|t|}$, — касательный вектор $[A, B]$ (и, значит, является в точке $t = 0$ гладкой — класса C^1 — кривой). [Указание. По условию

$$u_A(t) = \exp(tA + \dots) \quad \text{и} \quad u_B(t) = \exp(tB + \dots).$$

Следовательно, согласно формуле (12)

$$u_A(t)\, u_B(t) = \exp(t(A + B) + \dots)$$

и

$$u_A(\tau)\, u_B(\tau)\, u_A(\tau)^{-1}\, u_B(\tau)^{-1} = \exp(t[A, B] + \dots).]$$

В частности, отсюда следует, что для любых элементов $A \in \mathfrak{g}$ и $B \in \mathfrak{g}$ элементы $A + B$ и $[A, B]$ являются касательными векторами в точке $t = 0$ к кривым

$$t \mapsto \beta_A(t)\, \beta_B(t) \quad \text{и} \quad t \mapsto \beta_A(\tau)\, \beta_B(\tau)\, \beta_A(\tau)^{-1}\, \beta_B(\tau)^{-1},$$

где β_A и β_B — однопараметрические подгруппы, отвечающие элементам A и B. Это (вместе с формулой (5)) описывает операции в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ в терминах однопараметрических подгрупп.

Напомним (см. лекцию 13), что группа Ли $\mathcal{H}$ называется *подгруппой Ли* (или *гладкой подгруппой*) группы Ли $\mathcal{G}$, если $\mathcal{H}$ содержится в $\mathcal{G}$ и является в $\mathcal{G}$ подгруппой и одновременно подмногообразием, т. е. иными словами, если вложение $\iota\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ гомоморфно, гладко и является погружением.

При обсуждении этого понятия удобно иметь специальное название для подмножеств группы Ли $\mathcal{G}$, являющихся ее подгруппами как абстрактной группы, безотносительно к топологии и гладкости. За отсутствием лучшего термина мы будем называть такие подмножества *абстрактными подгруппами.*

Таким образом, по определению подмножество $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда представляет собой подгруппу Ли, когда оно является

а) абстрактной подгруппой;

б) подмногообразием, т. е. лежащим в $\mathcal{G}$ многообразием, для которого вложение $\iota\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ представляет собой

б$_1$) гладкое отображение,

б$_2$) погружение (обладает тем свойством, что для любой точки $p \in \mathcal{H}$ линейное отображение $(d\iota)_p\colon \mathsf{T}_p\mathcal{H} \to \mathsf{T}_p\mathcal{G}$ мономорфно);

в) группой Ли (умножение $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является гладким отображением).

Оказывается, что эти условия не независимы и некоторые из них могут быть выведены из других (или существенно ослаблены). Например, мы знаем (см. задачу 5 лекции 13), что выполнения условий б$_1$ и б$_2$ можно требовать лишь в единице e группы $\mathcal{G}$ (абстрактная подгруппа $\mathcal{H}$, являющаяся группой Ли, будет подгруппой Ли, если вложение $\iota\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ гладко в точке e и является в этой точке погружением).

Задача 18. Докажите, что *абстрактная подгруппа, являющаяся связным подмногообразием, будет подгруппой Ли* (в предположении связности условие в вытекает из условий а и б). [Указание. Ср. предложение 2 лекции 15.]

Задача 19. Докажите, что *условие б$_2$ вытекает из условий* а, б$_1$ и в. [Указание. Ясно, что для любой однопараметрической подгруппы $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{H}$ отображение $\iota\circ\beta\colon \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ представляет собой — при выполнении условия б$_1$ — однопараметрическую подгруппу группы Ли $\mathcal{G}$. Отсюда следует, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_e\mathscr{H} \arrow[r, "(d\iota)_e"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathsf{T}_e\mathscr{G} \arrow[d, "\exp"] \\
\mathscr{H} \arrow[r, "\iota"] & \mathscr{G}
\end{tikzcd}$$

Поэтому если отображение $(d\iota)_e$ не мономорфно, то существует вектор $A \neq 0$, принадлежащий нормальной окрестности нуля линеала $\mathsf{T}_e\mathscr{H}$, для которого $\exp A = e$, что невозможно.]

Как всегда, мы будем считать мономорфизм $(d\iota)_e\colon \mathsf{T}_e\mathscr{H} \to \mathsf{T}_e\mathscr{G}$ вложением, т. е. будем считать, что $\mathsf{T}_e\mathscr{H} \subset \mathsf{T}_e\mathscr{G}$.

Задача 20. Докажите, что *алгебра Ли* $\mathfrak{h} = \mathsf{T}_e\mathscr{H}$ *является подалгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathsf{T}_e\mathscr{G}$.

Если $\mathscr{H}_e$ — компонента единицы группы Ли $\mathscr{H}$ (и, значит, связная группа Ли), то, конечно, $\mathsf{T}_e\mathscr{H}_e = \mathsf{T}_e\mathscr{H}$. Таким образом, *если подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathsf{T}_e\mathscr{G}$ *является алгеброй Ли некоторой подгруппы Ли, то она будет алгеброй Ли и некоторой связной подгруппы.*

Оказывается, что связные подгруппы Ли группы Ли $\mathscr{G}$ и подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathsf{T}_e\mathscr{G}$ взаимно однозначно друг другу соответствуют.

Теорема 2. *Соответствие*

подгруппа Ли $\Rightarrow$ *ее алгебра Ли*

между множеством связных подгрупп Ли группы Ли $\mathscr{G}$ *и множеством всех подалгебр алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathsf{T}_e\mathscr{G}$ *биективно.*

Иными словами, для любой подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ существует — и только одна! — связная подгруппа Ли $\mathscr{H}$, для которой $\mathsf{T}_e\mathscr{H} = \mathfrak{h}$.

Доказательство теоремы 2, хотя идейно и простое, технически довольно сложно. Поэтому мы изложим лишь его основные этапы, относя подробности в задачи и мелкий шрифт.

Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное гладкое многообразие. Гладкое векторное расслоение $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ называется *подрасслоением* гладкого векторного расслоения $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{X})$, если $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'$ и $\pi = \pi'|_{\mathscr{E}}$. Подрасслоение однозначно определено многообразием $\mathscr{E}$ и, как правило, с ним отождествляется.

Особое значение имеют подрасслоения касательного расслоения $\tau_{\mathscr{X}} = (\mathsf{T}\mathscr{X}, \pi, \mathscr{X})$. Они называются *распределениями на* $\mathscr{X}$. Слой произвольного распределения $\mathscr{E}$ над точкой $p \in \mathscr{X}$ представляет собой подпространство $\mathsf{T}_p\mathscr{X} \cap \mathscr{E}$

касательного пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$. Мы будем обозначать его символом $\mathscr{E}_p$.

В соответствии с общей терминологией теории векторных расслоений (см. лекцию 6) размерность пространств $\mathscr{E}_p$ (одна и та же для всех p) называется *рангом* распределения $\mathscr{E}$.

Каждое распределение $\mathscr{E}$ определяет на $\mathscr{X}$ поле $p \mapsto \mathscr{E}_p$ подпространств $\mathscr{E}_p \subset \mathbf{T}_p\mathscr{X}$.

Задача 21. Покажите, что это устанавливает биективное соответствие между распределениями ранга n и гладкими полями n-мерных подпространств.

Таким образом, *распределения и гладкие поля подпространств—это фактически одно и то же*. [Например, каждую связность мы можем рассматривать как распределение (на тотальном пространстве $\mathscr{E}$ расслоения ξ).]

Подмногообразие $\mathscr{Y}$ многообразия $\mathscr{X}$ (вообще говоря, лишь погруженное) называется *интегральным многообразием* распределения $\mathscr{E}$, если $\mathbf{T}_p\mathscr{Y} \subset \mathscr{E}_p$ для любой точки $p \in \mathscr{Y}$. Связное интегральное многообразие называется *максимальным*, если оно не содержится ни в каком большом связном интегральном многообразии. Распределение $\mathscr{E}$ ранга n называется *вполне интегрируемым*, если через каждую точку многообразия $\mathscr{Y}$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие $\mathscr{Y}$ этого распределения, имеющее размерность n (т. е. такое, что $\mathbf{T}_p\mathscr{Y} = \mathscr{E}_p$).

Пусть $\mathfrak{h}$—произвольная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathscr{G}$. Так как $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, то элементами алгебры $\mathfrak{h}$ мы можем считать левоинвариантные векторные поля на группе $\mathscr{G}$. Поэтому, для любой точки $p \in \mathscr{G}$ в касательном пространстве $\mathbf{T}_p\mathscr{G}$ будет определено подпространство $\mathfrak{h}_p$, состоящее из всех векторов вида X_p, где $X \in \mathfrak{h}$. (При интерпретации $\mathfrak{h}$ как подпространства касательного пространства $\mathbf{T}_e\mathscr{G}$ подпространство $\mathfrak{h}_p$ будет не чем иным, как образом $(dL_p)_e\mathfrak{h}$ подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathbf{T}_e\mathscr{G}$ при отображении $(dL_p)_e \colon \mathbf{T}_e\mathscr{G} \to \mathbf{T}_p\mathscr{G}$.)

Задача 22. Докажите, что *объединение $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ всех подпространств $\mathfrak{h}_p$ является распределением на $\mathscr{G}$ (со слоями $\mathfrak{h}_p$)*.

Если $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли связной подгруппы Ли $\mathscr{H}$, то подгруппа $\mathscr{H}$ и все ее смежные классы $a\mathscr{H}$ будут, очевидно, максимальными интегральными многообразиями распределения $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ и, значит, в этом случае распределение $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ вполне интегрируемо.

Ниже мы докажем, что

А. *Распределение $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ вполне интегрируемо для любой подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$.*

Имея это в виду, рассмотрим максимальное интегральное подмногообразие $\mathscr{H}$ распределения $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$, содержащее точку e.

Так как для любого элемента $a\in\mathscr{H}$ подмногообразие $a\mathscr{H}=L_a\mathscr{H}$ является максимальным интегральным подмногообразием распределения $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$, содержащим элемент a, то в силу единственности максимальных интегральных подмногообразий вполне интегрируемых распределений должно иметь место равенство $a\mathscr{H}=\mathscr{H}$. Это означает, что $\mathscr{H}$ *является абстрактной подгруппой группы Ли* $\mathscr{G}$.

Подмногообразие $\mathscr{Y}$ многообразия $\mathscr{X}$ называется *консервативным*, если для любого гладкого многообразия $\mathscr{Z}$ каждое отображение $\varphi\colon \mathscr{Z}\to\mathscr{Y}$ гладко тогда и только тогда, когда оно гладко как отображение в $\mathscr{X}$ (т. е. гладко отображение $\iota\circ\varphi\colon \mathscr{Z}\to\mathscr{X}$, где $\iota\colon \mathscr{Y}\to\mathscr{X}$ — вложение).

Ясно, что *каждое вложенное подмногообразие консервативно*, но существуют и консервативные погруженные подмногообразия. Именно, ниже мы докажем, что

Б. *В любой группе Ли $\mathscr{G}$ каждое максимальное интегральное подмногообразие произвольного вполне интегрируемого распределения консервативно.*

В частности, консервативным подмногообразием является подгруппа $\mathscr{H}$. Следовательно, умножение

$$\mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathscr{H}$$

является гладким отображением (потому что гладким отображением является его композиция с вложением $\mathscr{H}\to\mathscr{G}$), т. е. *подгруппа $\mathscr{H}$ является подгруппой Ли.*

Так как по построению алгеброй Ли группы $\mathscr{H}$ является подалгебра $\mathfrak{h}$, то это, очевидно, доказывает теорему 2. ☐

Таким образом, нам остается лишь доказать утверждения **А** и **Б**.

Мы начнем с утверждения **А**.

Пусть $\mathscr{E}$ — произвольное распределение на гладком многообразии $\mathscr{X}$ и пусть $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ — совокупность всех векторных полей $X\in\mathfrak{a}\mathscr{X}$, обладающих тем свойством, что $X_p\in\mathscr{E}_p$ для любой точки $p\in\mathscr{X}$. Ясно, что $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ является подмодулем алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathscr{X}$ всех векторных полей на $\mathscr{X}$. Распределение $\mathscr{E}$ называется *инволютивным*, если $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathscr{X}$, т. е. если $[X, Y] \in \mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}[\mathscr{E}]$.

Задача 23. Покажите, что *для любой подалгебры* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *распределение* $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ *инволютивно.*

Задача 24. Покажите, что *для любого распределения* $\mathscr{E}$ *ранга* n *модуль* $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ *является локально свободным модулем ранга* n, т. е. многообразие $\mathscr{X}$ обладает открытым покрытием $\{U\}$, над любым элементом U которого $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}U$-модуль $\mathfrak{a}[\mathscr{E}|_U]$, где $\mathscr{E}|_U$ — ограничение распределения $\mathscr{E}$ над U, является свободным модулем ранга n над алгеброй $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}U$. [Указание. Примите за U окрестности, тривиализирующие расслоение $\mathscr{E}$.]

Базисы $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}U$-модуля $\mathfrak{a}[\mathscr{E}|_U]$ называются *базисами над* U модуля $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$.

Задача 25. Докажите, что *следующие свойства распределения* $\mathscr{E}$ *равносильны:*

а. *Распределение* $\mathscr{E}$ *вполне интегрируемо.*

б. *Многообразие* $\mathscr{X}$ *обладает атласом, состоящим из таких карт* $(U, x^1, \ldots, x^m)$, $m = \dim\mathscr{X}$, *что каждое подмногообразие в* U, *задаваемое уравнениями*

$$x^{n+1} = \text{const}, \ \ldots, \ x^m = \text{const}, \tag{18}$$

является интегральным многообразием распределения $\mathscr{E}$.

в. *Многообразие* $\mathscr{X}$ *обладает атласом, состоящим из таких карт* $(U, x^1, \ldots, x^m)$, *что векторные поля*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x^n}$$

составляют базис над U *модуля* $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$.

[Указание. Утверждения **б** и **в** являются очевидными переформулировками один другого. Импликация **а** $\Rightarrow$ **б** легко вытекает из установленных в лекции III.13 общих свойств подмногообразий. Для доказательства импликации **б** $\Rightarrow$ **а** введите на $\mathscr{X}$ топологию, база открытых множеств которой состоит из интегральных многообразий распределения $\mathscr{E}$, и рассмотрите компоненты многообразия $\mathscr{X}$ в этой топологии.]

Задача 26. Покажите, что *распределение* $\mathscr{E}$ *тогда и только тогда инволютивно, когда существует открытое покрытие* $\{U\}$ *многообразия* $\mathscr{X}$, *над каждым элементом* U *которого модуль* $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ *обладает таким базисом* $X_1, \ldots, X_n$, *что*

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k \ \text{на} \ U, \tag{19}$$

где f_{ij}^k — *некоторые гладкие функции на* U.

Утверждения задач 23 и 24 показывают, что, как свойство быть вполне интегрируемым, так и свойство быть инволютивным, являются *локальными свойствами* (верными всюду, если они верны в окрестности каждой точки).

Задача 27. Докажите, что *любое вполне интегрируемое распределение инволютивно.* [Указание. Если поля X и Y касаются подмногообразия, то и поле $[X, Y]$ обладает этим свойством.]

Оказывается, что обратное утверждение также верно:

Теорема 3. *Каждое инволютивное распределение вполне интегрируемо.*

Эта теорема известна как теорема Фробениуса. Нужное нам утверждение **А** является ее непосредственным следствием (см. задачу 23). Поэтому нам остается только доказать теорему 3.

Так как свойства полной интегрируемости и инволютивности являются локальными свойствами, то для доказательства теоремы 3 достаточно доказать следующее утверждение чисто аналитического характера:

(★) *Пусть в области U пространства $\mathbb{R}^m$, содержащей точку 0, задано n векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, линейно независимых над алгеброй $\mathsf{F}U$ и удовлетворяющих условию* (19). *Тогда в некоторой окрестности $V \subset U$ точки 0 существуют такие координаты $x^1, \ldots, x^m$, что на V поля $X_1, \ldots, X_n$ линейно выражаются (над $\mathsf{F}V$) через поля* $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$.

Доказательство. Предположим, что в U существуют такие координаты $x^1, \ldots, x^m$, что

а. Поля $X_1, \ldots, X_{n-1}$ выражаются лишь через поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}.$$

б. При $x^m = 0$ компоненты $X_1^k, \ldots, X_{n-1}^k$ этих полей с $n \leqslant k \leqslant m$ тождественно равны нулю.

в. Для поля X_n имеет место равенство

$$X_n = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Оказывается, что тогда поля $X_1, \ldots, X_n$ линейно выражаются (над $\mathsf{F}U$) через поля $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \dfrac{\partial}{\partial x^m}$.

Действительно, так как согласно **в** $X_n^l = \delta_m^l$, то

$$[X_n, X_j]^k = X_n^l \frac{\partial X_j^k}{\partial x^l} - X_j^l \frac{\partial X_n^l}{\partial x^l} = \frac{\partial X_j^k}{\partial x^m}, \quad \begin{array}{r} 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ 1 \leqslant k \leqslant m, \end{array}$$

а так как согласно а и в

$$[X_n, X_j] = f_{nj}^1 X_1 + \ldots + f_{nj}^{n-1} X_{n-1},$$

то компоненты X_j^k, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, полей $X_1, \ldots, X_{n-1}$ удовлетворяют (как функции от x_m) системе однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial X_j^k}{\partial x^m} = f_{nj}^1 X_1^k + \ldots + f_{nj}^{n-1} X_{n-1}^k.$$

Но согласно б при $x^m = 0$ эти функции с $n \leqslant k \leqslant m$ равны нулю. Поэтому они равны нулю тождественно. Значит, поля $X_1, \ldots, X_{n-1}$ линейно выражаются через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}$, а потому поля $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n$ — через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^m}$.

Таким образом, для доказательства утверждения (★) достаточно доказать существование координат $x^1, \ldots, x^m$, обладающих свойствами а, б и в (и затем x^m обозначить через x^n). Мы сделаем это индукцией по n.

При $n = 1$ условия а, б бессодержательны (так же как и условие инволютивности (19)). Поэтому в этом случае надо лишь доказать, что для произвольного поля X, отличного от нуля в точке 0, существует такая центрированная в точке 0 карта $(V, x^1, \ldots, x^m)$, что

$$X = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Пусть $x^1, \ldots, x^m$ — произвольные координаты на $\mathbb{R}^m$ (или хотя бы на U). Без ограничения общности можно предполагать, что m-я компонента X^m поля X отлична от нуля в точке 0. Выбрав число $\varepsilon > 0$, рассмотрим такую окрестность W точки 0 пространства $\mathbb{R}^{m-1}$ (отождествленного с подпространством $x^m = 0$ пространства $\mathbb{R}^m$), что $W \subset \mathbb{R}^{m-1} \cap U$ и для любой точки $w \in W$, $w = (w^1, \ldots, w^{m-1})$, интегральная кривая γ_w поля X, проходящая при $t = 0$ через точку $(w, 0) \in \mathbb{R}^m$, определена при $|t| < \varepsilon$. (Окрестность W существует в силу стандартных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений.) Отображение $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, переводящее точку (w, t) в точку $\gamma\ (t)$, гладко и его якобиева матрица в точке $(0, 0)$ имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} & \cdot & X^1(0) \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ E & \cdot & \cdot \\ & \cdot & X^{m-1}(0) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ 0 \ldots 0 & & X^m(0) \end{array} \right\|.$$

Поэтому в силу условия $X^m(0)\neq 0$ отображение $(w, t)\longmapsto\gamma_w(t)$ этально в точке $(0, 0)$, и, значит, в $\mathbb{R}^m$ существует окрестность V точки 0, в которой числа $w^1, \ldots, w^{m-1}, t$ являются локальными координатами. При этом в V будет иметь место равенство $X=\dfrac{\partial}{\partial t}$. Для завершения доказательства остается теперь лишь соответствующим образом переобозначить координаты $w^1, \ldots, w^{m-1}, t$.

[Фактически мы воспроизвели стандартное доказательство **теоремы о выпрямляемости** траекторий векторного поля в окрестности любой точки, в которой оно отлично от нуля.]

Предположив теперь, что для $n-1$ полей утверждение (★) уже доказано, докажем, что для n полей $X_1, \ldots, X_n$ существуют координаты $x^1, \ldots, x^m$, удовлетворяющие условиям **а**, **б** и **в**.

Применив к полю X_n уже доказанный случай теоремы, мы немедленно можем добиться выполнения условия **в**. Заменив затем поля $X_1, \ldots, X_{n-1}$ полями

$$X_1-X_1^m\frac{\partial}{\partial x^m}=X_1-X_1^mX_n, \ldots, X_{n-1}-X_{n-1}^m\frac{\partial}{\partial x^m}=X_{n-1}-X_{n-1}^mX_n,$$

мы добьемся выполнения и условия **а**. Следовательно, без ограничения общности мы с самого начала можем считать условия **а** и **в** выполненными, и задача состоит только в том, чтобы добиться выполнения условия **б**.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$—ограничения полей $X_1, \ldots, X_{n-1}$ на $U\cap\mathbb{R}^{m-1}$ (т. е. их значения при $x^m=0$). Так как эти поля, очевидно, удовлетворяют (на $U\cap\mathbb{R}^{m-1}$) условию (19), то по предположению индукции существует такая карта $(W, y^1, \ldots, y^{m-1})$ с $W\subset U\cap\mathbb{R}^{m-1}$, что поля $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ линейно выражаются на W через поля $\dfrac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y^{n-1}}$ и, значит, их компоненты $Y_1^k, \ldots, Y_{n-1}^k$ в координатах $y^1, \ldots, y^{m-1}$ $\left(\text{т. е. в базисе } \dfrac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y^{m-1}}\right)$ при $n\leqslant k\leqslant m-1$ тождественно равны нулю. Для полей $X_1, \ldots, X_{n-1}$ это означает, что компоненты $X_1^k, \ldots, X_{n-1}^k$, $n\leqslant k\leqslant m-1$, в координатах $y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m$ (определенных на множестве V вида $W\times(-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon>0$—достаточно малое число) равны нулю при $x^m=0$, т. е. что для координат $y^1, \ldots, y^{m-1}, X^n$ условие **б** выполнено. Поскольку условия **а** и **в** для координат $y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m$ остаются, очевидно, выполненными, теорема Фробениуса тем самым полностью доказана. ☐

Замечание 2. Поскольку в условии инволютивности речь идет о подалгебрах алгебр Ли $\mathfrak{a}\mathscr{X}$, многообразие $\mathscr{X}$ в теореме Фробениуса мы предполагали многообразием класса C^∞. Однако *теорема Фробениуса справедлива и для* *многообразий класса* C^r, $r \geqslant 2$; нужно только под инволютивностью понимать выполнение условия (19) с функциями f_{ij}^k класса C^{r-1}.

Обратимся теперь к утверждению **Б**.

Задача 28. Докажите, что *максимальное интегральное многообразие* $\mathcal{Y}$ *вполне интегрируемого распределения, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, консервативно.* [Указание. Каждая точка $p \in \mathcal{Y}$ обладает в $\mathcal{X}$ такой координатной окрестностью, что компоненты пересечения $U \cap \mathcal{Y}$ (в топологии многообразия $\mathcal{Y}$) задаются уравнениями вида (18), причем число этих компонент не более чем счетно. Поэтому они являются компонентами пересечений $U \cap \mathcal{Y}$ и в топологии многообразия $\mathcal{X}$.]

Задача 29. Докажите, что *любая связная группа Ли удовлетворяет второй аксиоме счетности.* [Указание. Выбрав в некоторой окрестности единицы U счетное всюду плотное множество C, рассмотрите всевозможные окрестности вида gV, где $V \subset U$, а g — произвольное произведение элементов из C.]

Из утверждений задач 28 и 29 немедленно вытекает, что для доказательства утверждения **Б** достаточно доказать следующее предложение, имеющее, конечно, и самостоятельный интерес:

Предложение 2. *Пусть* $\mathcal{Y}$ *— подмногообразие многообразия* $\mathcal{X}$. *Если*

а) *подмногообразие* $\mathcal{Y}$ *связно;*

б) *многообразие* $\mathcal{X}$ *удовлетворяет второй аксиоме счетности, то подмногообразие* $\mathcal{Y}$ *также удовлетворяет этой аксиоме.*

Конечно, центр тяжести этого предложения — это случай погруженного подмногообразия $\mathcal{Y}$, поскольку для вложенных подмногообразий оно тривиально (каждое подпространство пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, очевидным образом также удовлетворяет этой аксиоме). Мы также разобьем доказательство предложения 2 в серию задач.

Задача 30. Докажите, что *если связное топологическое пространство* $\mathcal{X}$ *обладает таким открытым покрытием* $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$, *что*

1° *каждое множество* U_α *удовлетворяет в индуцированной топологии второй аксиоме счетности;*

2° *для любого* α *семейство всех элементов покрытия* $\mathfrak{U}$, *пересекающихся с* U_α, *счетно (или конечно),* *то пространство $\mathscr{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.* [Указание. Произвольно выберите в $\mathfrak{U}$ элемент U_{α_0} и рассмотрите всевозможные конечные последовательности $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ элементов покрытия $\mathfrak{U}$, обладающих тем свойством, что $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i-1}} \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Покажите, что объединение всех элементов всех таких последовательностей удовлетворяет второй аксиоме счетности и совпадает с $\mathscr{X}$.]

Задача 31. Докажите, что *если связное топологическое пространство $\mathscr{X}$ обладает счетным открытым покрытием $\{U_i\}$, каждый элемент U_i которого является объединением непересекающихся открытых множеств U_{i,α_i}, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, то само пространство $\mathscr{X}$ также удовлетворяет этой аксиоме.* [Указание. Покрытие $\{U_{i,\alpha_i}\}$, состоящее из всех множеств U_{i,α_i}, удовлетворяет условиям задачи 30.]

Замечание 3. Отсюда немедленно следует, что *любое пространство $\mathscr{E}$, накрывающее пространство $\mathscr{B}$, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, также удовлетворяет этой аксиоме.* (Прообразы элементов счетного покрытия пространства $\mathscr{B}$, состоящего из равно накрытых множеств, составляют покрытие пространства $\mathscr{E}$, обладающее указанными в задаче 31 свойствами.)

Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ называется *локально гомеоморфным*, если пространство $\mathscr{X}$ обладает таким открытым покрытием $\{U_\alpha\}$, что для любого α

а) множество $f(U_\alpha)$ открыто в $\mathscr{Y}$;

б) отображение f на U_α является гомеоморфизмом $U_\alpha \to f(U_\alpha)$.

Задача 32. Докажите, что *если для связного топологического пространства $\mathscr{X}$ существует локально гомеоморфное отображение*

$$f\colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}^n,$$

то пространство $\mathscr{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. [Указание. Пусть $\{V_i\}$ — счетная база пространства $\mathbb{R}^n$, состоящая из связных открытых множеств, и пусть U_i — подмножество пространства $\mathscr{X}$ (возможно, пустое), являющееся объединением множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается посредством f на V_i. Подмножества U_i составляют покрытие пространства $\mathscr{X}$, удовлетворяющее условиям задачи 31.]

Задача 33. Пользуясь утверждением задачи 32, докажите предложение 1 сначала при $\mathscr{X}=\mathbb{R}^n$, а затем в общем случае. [Указание. В последнем выводе воспользуйтесь утверждением задачи 30.]

Тем самым утверждения **А** и **Б**, и вместе с ними теорема **3**, полностью доказаны. □

Из того, что каждая подгруппа Ли является интегральным многообразием вполне интегрируемого распределения, немедленно вытекает также следующее утверждение, которое мы для удобства ссылок выделим в качестве отдельного предложения:

Предложение 3. *Каждая имеющая не более чем счетное множество компонент подгруппа Ли является консервативным подмногообразием.* □

Пример взятой в дискретной топологии подгруппы $\mathbb{R}$ группы $\mathbb{R}^2$ показывает, что условие счетности множества компонент здесь необходимо.

Отметим два непосредственных следствия этого предложения.

Следствие 1 (теорема единственности). *Если в абстрактную подгруппу $\mathscr{H}$ группы Ли $\mathscr{G}$ можно ввести структуру подмногообразия, имеющего не более счетного множества компонент, относительно которой $\mathscr{H}$ является подгруппой Ли, то это можно сделать только одним способом.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$—две подгруппы Ли, совпадающие как подмножества с $\mathscr{H}$ и имеющие счетное (или конечное) множество компонент. Нам нужно доказать, что $\mathscr{H}_1=\mathscr{H}_2$, т. е. что гладкости на $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ одинаковы. Для этого достаточно доказать, что оба тождественных отображения $\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_2\to\mathscr{H}_1$ гладки. Но это немедленно обеспечивается предложением 3. □

Следствие 2. *Отображение $\beta\colon \mathbb{R}\to\mathscr{H}$ тогда и только тогда является однопараметрической подгруппой подгруппы Ли $\mathscr{H}$, когда отображение $\iota\circ\beta\colon \mathbb{R}\to\mathscr{G}$ представляет собой однопараметрическую подгруппу группы Ли.* □

Задача 34. Дайте прямое доказательство последнего утверждения. [Указание. Воспользуйтесь нормальными координатами.]