Лекция 15

Замкнутые подгруппы групп Ли.— Теорема Картана.— Алгебраические группы.— Карты, согласованные с подгруппой Ли.— Слабейшая гладкость на подгруппе группы Ли.— Теорема Фрейденталя.— Теорема Адо и третья теорема Ли.— Локально изоморфные группы Ли.— Групповые накрытия.— Существование универсального группового накрытия.

Подгруппы Ли группы Ли, являющиеся вложенными подмногообразиями, имеют, конечно, наиболее важное значение. Мы будем называть такие подгруппы *замкнутыми*. Основанием этой терминологии служит следующее предложение:

Предложение 1. *Каждая замкнутая подгруппа Ли $\mathscr{H}$ группы Ли $\mathscr{G}$ является замкнутым подмножеством в $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Так как $\mathscr{H}$ вложено в $\mathscr{G}$, то точка $e \in \mathscr{H}$ обладает в $\mathscr{G}$ такой окрестностью U, что пересечение $U \cap \mathscr{H}$ замкнуто в U. Без ограничения общности можно считать, что $U^{-1} = U$. Пусть $a \in \overline{\mathscr{H}}$. Тогда $aU^{-1} \cap \cap \mathscr{H} \neq \varnothing$ и, значит, существует такая точка $b \in \mathscr{H}$, что $b \in aU^{-1}$. Так как левый сдвиг $q \mapsto bq$ является диффеоморфизмом многообразия $\mathscr{G}$, то множество $b(U \cap \mathscr{H}) = bU \cap \cap \mathscr{H}$ замкнуто в bU, т. е. $bU \cap \overline{bU \cap \mathscr{H}} = bU \cap \mathscr{H}$. С другой стороны, $a \in bU$ и потому $a \in bU \cap \overline{\mathscr{H}} \subset \overline{bU \cap \mathscr{H}}$. Следовательно, $a \in bU \cap \mathscr{H}$ и, значит, $a \in \mathscr{H}$. $\square$

Оказывается, что обратное утверждение также верно: *если подгруппа Ли $\mathscr{H}$ является в $\mathscr{G}$ замкнутым множеством, то она замкнута* (представляет собой вложенное подмногообразие). Мы докажем даже большее:

Теорема 1. *Если подмножество $\mathscr{H}$ группы Ли $\mathscr{G}$ является одновременно*

1) *абстрактной подгруппой группы $\mathscr{G}$,*

2) *замкнутым подмножеством топологического пространства $\mathscr{G}$,*

то $\mathscr{H}$ будет вложенным подмногообразием и, значит, замкнутой подгруппой Ли группы Ли $\mathscr{G}$.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько общих замечаний и лемм.

Пусть $\mathscr{G}$ — группа Ли и $\mathscr{H}$ — ее абстрактная подгруппа.

Мы скажем, что подгруппа $\mathscr{H}$ *удовлетворяет условию* (F), если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $\mathscr{G}$ существует такое подмножество $\mathfrak{h}$, что

а) подмножество $\mathfrak{h}$ является линейным подпространством;

б) если $A \in \mathfrak{h}$, то $\exp A \in \mathscr{H}$;

в) существует такая нормальная окрестность U_0 нуля линеала $\mathfrak{g}$, что для вектора $A \in U_0$ включение $A \in \mathfrak{h}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\exp A \in \mathscr{H}$.

Для каждой замкнутой (вложенной) подгруппы Ли $\mathscr{H}$ группы Ли $\mathscr{G}$ точка e обладает в $\mathscr{G}$ нормальной окрестностью U, пересечение $V = U \cap \mathscr{H}$ которой с $\mathscr{H}$ является нормальной окрестностью точки e в $\mathscr{H}$. Поэтому, приняв за $\mathfrak{h}$ алгебру Ли группы $\mathscr{H}$ и положив $U_0 = \exp^{-1} U$, мы немедленно получим, что *подгруппа $\mathscr{H}$ удовлетворяет условию* (F).

Для случая $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ подгруппы, удовлетворяющие условию (F),— это в точности матричные группы Ли в смысле определения 1 лекции III.11. Как мы знаем (см. предложение 1 лекции III.11 и замечание 1 лекции III.1), каждая такая подгруппа является гладкой подгруппой и одновременно вложенным подмногообразием, т. е. представляет собой замкнутую подгруппу Ли (с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$; см. замечание 2 лекции III.16). Но просмотрев заново доказательство предложения 1 лекции III.15, мы немедленно убедимся, что специфика группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ в нем фактически не используется и что оно практически дословно проходит для произвольной группы Ли $\mathscr{G}$. Поэтому *каждая подгруппа $\mathscr{H}$ группы Ли $\mathscr{G}$, удовлетворяющая условию* (F), *является замкнутой подгруппой Ли.*

Задача 1. Докажите аккуратно последнее утверждение. Докажите также, что $\mathfrak{h}$ будет алгеброй Ли группы Ли $\mathscr{H}$.

Таким образом, замкнутые подгруппы Ли — это в точности подгруппы, удовлетворяющие условию (F). Поэтому для доказательства теоремы 1 нам нужно только доказать, что подгруппа $\mathscr{H}$ из этой теоремы удовлетворяет условию (F). Для этого мы должны найти подмножество $\mathfrak{h}$, окрестность U_0 (или, что равносильно, окрестность $U = \exp U_0$) и проверить для них свойства а, б и в.

Если теорема 1 верна, то множеством $\mathfrak{h}$ должна быть алгебра Ли подгруппы $\mathscr{H}$, т. е. множество всех векторов $A \in \mathfrak{g}$, для которых $\exp tA \in \mathscr{H}$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Имея это в виду, мы определим $\mathfrak{h}$ как подмножество алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящее из всех таких векторов A.

Конечно, при таком определении выполнение условия **a** требует доказательства. Это доказательство основывается на следующей лемме:

Лемма 1. *Пусть $\{C_m\}$ — сходящаяся последовательность векторов линеала $\mathfrak{g}$ и пусть $C = \lim\limits_{m\to\infty} C_m$ — ее предел. Если существуют такие отличные от нуля числа t_m, что $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = 0$ и $\exp t_m C_m \in \mathscr{H}$ для любого $m \geqslant 1$, то $C \in \mathfrak{h}$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t_m > 0$. Имея это в виду, мы для каждого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через n_m целое число, удовлетворяющее соотношениям

$$\frac{t}{t_m} - 1 < n_m \leqslant \frac{t}{t_m}$$

(целую часть числа t/t_m). Так как $t - t_m < n_m t_m \leqslant t$ и $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty} n_m t_m = t$ и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} \exp(n_m t_m C_m) = \exp tC,$$

а так как

$$\exp(n_m t_m C_m) = (\exp t_m C_m)^{n_m},$$

то $\exp(n_m t_m C) \in \mathscr{H}$. Поскольку группа $\mathscr{H}$ по условию замкнута, отсюда следует, что $\exp tC \in \mathscr{H}$. Значит, $C \in \mathfrak{h}$. □

Проверка условия **a**. Ясно, что если $A \in \mathfrak{h}$, то $\lambda A \in \mathfrak{h}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ (ибо $\exp t(\lambda A) = \exp(t\lambda) A$). Поэтому нам надо лишь доказать, что $A + B \in \mathfrak{h}$ для любых векторов $A, B \in \mathfrak{h}$. Но согласно формуле (12) лекции 14 для любых векторов $A, B \in \mathfrak{g}$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\exp tA \cdot \exp tB = \exp t(A + B + X_t),$$

где $X_t = o(t)$. Пусть $t_m = 1/m$, $C = A + B$ и

$$C_m = A + B + X_{t_m}, \qquad 1 \leqslant m < \infty.$$

Тогда $t_m \to 0$, $C_m \to C$ и

$$\begin{aligned}\exp t_m C_m = \exp t_m (A + B + X_{t_m}) =\\ = \exp t_m A \exp t_m B \in \mathscr{H}\end{aligned}$$

(напомним, что по условию $\exp tA$, $\exp tB \in \mathscr{H}$ для любого $t \in \mathbb{R}$). Поэтому применима лемма 1, согласно которой $C \in \mathscr{H}$, т. е. $A + B \in \mathscr{H}$. □

Задача 2. Докажите аналогичным образом, что $\mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. (Для доказательства теоремы 1 этот факт не нужен.)

Так как условие **б** выполнено по определению, то для завершения доказательства теоремы 1 нам осталось проверить лишь условие **в**. Для этого нам понадобится еще одна общая конструкция.

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разложена в прямую сумму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k} \tag{1}$$

своих подпространств $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$. Тогда любой элемент $C \in \mathfrak{g}$ единственным образом представляется в виде $C = A + B$, где $A \in \mathfrak{h}$ и $B \in \mathfrak{k}$, и потому формула

$$\varphi(C) = \exp A \exp B$$

корректно определяет — очевидно гладкое — отображение

$$\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{G}. \tag{2}$$

Лемма 2. Отображение (2) *этально в точке* $0 \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Согласно формуле (12) лекции 14

$$\exp A \exp B = \exp(A + B + \ldots) = \exp(C + \ldots),$$

где многоточие означает члены степени $\geqslant 2$ по A и B. Поэтому дифференциал отображения (2) в точке 0 совпадает с дифференциалом отображения exp и, следовательно, является изоморфизмом (даже тождественным отображением). □

Нас, естественно, будет интересовать разложение (1) в случае, когда $\mathfrak{h}$ является построенным выше по подгруппе $\mathcal{H}$ подпространством алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (а $\mathfrak{k}$ — произвольным дополнительным подпространством). Оказывается, что в этом случае справедлива следующая лемма:

Лемма 3. В $\mathfrak{g}$ *существует такая окрестность* U_0 *точки* 0, *что*

$$\exp B \notin \mathcal{H}$$

для любого отличного от нуля вектора $B \in U_0 \cap \mathfrak{k}$.

Доказательство. Если утверждение леммы 3 не верно, то в $\mathfrak{k}$ существуют такие элементы B_m, что $B_m \to 0$ и $\exp B_m \in \mathcal{H}$. Выбрав в $\mathfrak{k}$ некоторую норму $\| \ \|$ (скажем, евклидову), найдем такие целые числа $n_m \to \infty$, что

$$1 \leqslant \| n_m B_m \| \leqslant 2$$

для любого $m=1, 2, \ldots$ (ясно, что это всегда можно сделать). Пусть $C_m = n_m B_m$ и $t_m = \frac{1}{n_m}$. Так как множество всех векторов C, для которых $1 \leqslant \|C\| \leqslant 2$, компактно, то без ограничения общности можно считать — перейдя, если нужно, к подпоследовательности, — что последовательность $\{C_m\}$ сходится. Поскольку $t_m \to 0$ и $\exp t_m C_m = \exp B_m \in \mathscr{H}$, эта последовательность удовлетворяет всем условиям леммы 1, и, значит, ее предел $C = \lim C_m$ принадлежит $\mathfrak{h}$. Но это невозможно, так как одновременно $C \in \mathfrak{k}$ (ибо $\mathfrak{k}$ замкнуто) и $C \neq 0$ (ибо $1 \leqslant \|C\| \leqslant 2$). Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Теперь мы уже можем непосредственно перейти к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Согласно сказанному выше нам осталось проверить лишь условие **в**. Мы покажем, что этому условию удовлетворяет нормальная окрестность U_0, на которой отображение (2) диффеоморфно и которая одновременно является окрестностью U_0 из леммы 3.

Пусть $A \in U_0$ и $\exp A \in \mathscr{H}$. Нам надо доказать, что $A \in \mathfrak{h}$. С этой целью мы заметим, что поскольку на U_0 отображение (1) является диффеоморфизмом, точку $\exp A \in U$ можно представить в виде $\exp A_1 \cdot \exp B_1$, где $A_1 \in \mathfrak{h}$ (и потому $\exp A_1 \in \mathscr{H}$), а $B_1 \in \mathfrak{k}$. Но если $\exp A = \exp A_1 \cdot \exp B_1$ и $\exp A \in \mathscr{H}$, то $\exp B_1 \in \mathscr{H}$, что согласно лемме 3 возможно только при $B_1 = 0$. Поэтому $\exp A = \exp A_1$, и, значит, поскольку окрестность U_0 нормальна, $A = A_1$. Следовательно, $A \in \mathfrak{h}$. $\square$

Таким образом, *замкнутые подгруппы Ли группы Ли $\mathscr{G}$ — это в точности ее подгруппы, являющиеся замкнутыми множествами*. Это полностью оправдывает нашу терминологию.

Теорема 1 принадлежит Картану. Она является одним из самых мощных орудий установления лиевости конкретных групп.

Пример 1. Подгруппа группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ (или группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$) называется *алгебраической группой*, если она является множеством всех невырожденных матриц, обращающих в нуль некоторую систему многочленов от их элементов. Так как такое множество заведомо замкнуто (в $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$), то согласно теореме Картана *любая алгебраическая группа является матричной группой Ли*.

Пример 2. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная конечномерная алгебра над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (вообще говоря, не ассоциативная и не лиева) и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ее базис. Ясно, что обратимое линейное отображение $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ тогда и только тогда является автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$, когда $\varphi(e_ie_j) = \varphi(e_i)\varphi(e_j)$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Следовательно, если $\varphi(e_i) = x_i^k e_k$ и $e_ie_j = c_{ij}^k e_k$ и, значит,

$$\varphi(e_ie_j) = \varphi(c_{ij}^k e_k) = c_{ij}^k x_k^l e_l,$$

$$\varphi(e_i)\varphi(e_j) = x_i^p e_p \cdot x_j^q e_q = c_{pq}^l x_i^p x_j^q e_l,$$

то φ тогда и только тогда является автоморфизмом, когда

$$c_{ij}^k x_k^l = c_{pq}^l x_i^p x_j^q$$

для любых $i, j, l = 1, \ldots, n$. Это означает, что матрицы $\|x_i^j\|$, отвечающие автоморфизмам алгебры $\mathcal{A}$, составляют алгебраическую, а потому и лиеву группу. Это вносит в группу $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ всех автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ структуру группы Ли, не зависящую, очевидно, от выбора базиса.

Таким образом, *группа* $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ *автоморфизмов произвольной конечномерной алгебры* $\mathcal{A}$ *является группой Ли.*

Задача 3. Докажите, что *алгебра Ли группы Ли* $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ *естественно изоморфна алгебре* $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ *всех дифференцирований алгебры* $\mathcal{A}$ (таких линейных отображений $D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, что $D(ab) = Da\cdot b + a\cdot Db$ для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$).

Вернемся теперь к произвольным (не обязательно замкнутым) подгруппам Ли $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$. Пусть $m = \dim\mathcal{H}$ и $n = \dim\mathcal{G}$.

Карту $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ в группе Ли $\mathcal{G}$ мы назовем *согласованной с подгруппой* $\mathcal{H}$, если она согласована в смысле лекции III.13 со всеми подмногообразиями вида $L_a\mathcal{H} = a\mathcal{H}$, $a \in \mathcal{G}$, т. е. если для любого $a \in \mathcal{G}$ существует — в случае, когда пересечение $U \cap a\mathcal{H}$ непусто — такое открытое в $a\mathcal{H}$ множество $V_a \subset U \cap a\mathcal{H}$, что, во-первых, функции

$$y^1 = x^1|_{V_a}, \ \ldots, \ y^m = x^m|_{V_a}$$

являются локальными координатами на V_a в $a\mathcal{H}$, а, во-вторых, множество V_a (но не $a\mathcal{H}$!) задается в U уравнениями вида

$$x^{m+1} = c^1, \ \ldots, \ x^n = c^{n-m}, \tag{3}$$

где $c^1, \ldots, c^{n-m}$ — некоторые постоянные числа (зависящие только от a).

Из утверждения **б** задачи 25 лекции 14 немедленно следует, что *для любой точки $a \in \mathcal{G}$ существует в $\mathcal{G}$ согласованная с $\mathcal{H}$ карта (U, h), центрированная в a.*

Другое доказательство. Ясно, что такую карту достаточно построить только при $a = e$ (если карта (U, h) согласована с $\mathcal{H}$ и центрирована в e, то карта $(aU, h \circ L_a^{-1})$ согласована с $\mathcal{H}$ и центрирована в a). Имея это в виду, рассмотрим отображение (2), построенное для разложения (1), где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы Ли $\mathcal{H}$, а $\mathfrak{k}$ — произвольное дополнительное подпространство. Так как согласно лемме 2 это отображение этально в 0, то точка $e \in \mathcal{G}$ обладает окрестностью U, на которой определено отображение φ^{-1}: $U \longrightarrow \mathfrak{g}$. Пусть h: $U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — композиция отображения φ^{-1} и координатного изоморфизма $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, согласованного с разложением (1), т. е. отвечающего такому базису линеала $\mathfrak{g}$, что первые m векторов его принадлежат подалгебре $\mathfrak{h}$, а остальные $n-m$ векторов — подпространству $\mathfrak{k}$. Тогда пара (U, h) будет центрированной в e картой, согласованной с $\mathcal{H}$. $\square$

Если подгруппа $\mathcal{H}$ замкнута (является вложенным подмногообразием), то карту (U, h) можно выбрать так, чтобы уравнения вида (3) задавали в U все пересечение $U \cap a\mathcal{H}$.

Задача 4. Пользуясь этим, докажите, что для любой замкнутой подгруппы $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$ факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (множество смежных классов $a\mathcal{H}$) обладает естественной гладкостью, по отношению к которой каноническая проекция

$$\pi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}, \quad a \longmapsto a\mathcal{H}, \qquad a \in \mathcal{G},$$

является гладким отображением, а тройка $(\mathcal{G}, \pi, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ гладким локально тривиальным расслоением.

Задача 5. Докажите, что

а. Для любой замкнутой подгруппы $\mathcal{H}$ компонента единицы $\mathcal{H}_e$ также замкнута.

б. Если группа Ли $\mathcal{G}$ связна, то естественное отображение

$$\mathcal{G}/\mathcal{H}_e \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H},$$

индуцированное вложением смежных классов, является накрытием.

Задача 6 (обобщение и уточнение задач 4 и 5). Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ — замкнутые подгруппы группы Ли $\mathcal{G}$ и пусть $\mathcal{K}_0$ — наибольшая инвариантная подгруппа, содержащаяся в $\mathcal{K}$. Докажите, что индуцированное вложением смежных классов отображение

$$\pi: \mathcal{G}/\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$$

гладко и является проекцией гладкого и локально тривиального расслоения со слоем $\mathcal{H}/\mathcal{K}$ и со структурной группой $\mathcal{H}/\mathcal{K}_0$, действующей в $\mathcal{H}/\mathcal{K}$ посредством левых сдвигов.

Превратить в подгруппу Ли можно, собственно говоря, любую абстрактную подгруппу $\mathcal{H}$ — достаточно ввести в нее структуру нульмерного многообразия (с дискретной топологией). Однако на практике интересна, конечно, более содержательная — и желательно, единственная — гладкость, топология которой по возможности наиболее близка к индуцированной. (Напомним — см. лекцию III.13, — что топология подмногообразия единственным образом определяет его гладкость.)

Мы будем говорить, что гладкость (топология) подмногообразия $\mathscr{H}$ является *слабейшей*, если для любой другой гладкости на $\mathscr{H}$, т. е. для любого подмногообразия $\mathscr{H}_1$ с тем же множеством точек, тождественное отображение $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}$ гладко. Слабейшая гладкость, конечно, единственна, но существует не всегда. Если $\mathscr{H}$ допускает гладкость, по отношению к которой оно является консервативным (в частности, вложенным) подмногообразием, то эта гладкость будет слабейшей.

В индуцированной топологии каждая абстрактная подгруппа $\mathscr{H}$ группы Ли $\mathscr{G}$ является, конечно, топологической группой. Пусть $\mathscr{H}_e$ — компонента линейной связности группы $\mathscr{H}$, содержащая единицу e. По определению элемент $a \in \mathscr{H}$ тогда и только тогда принадлежит $\mathscr{H}_e$, когда в $\mathscr{G}$ существует путь $u\colon I \to \mathscr{G}$, соединяющий e с a и целиком лежащий в $\mathscr{H}$ (т. е. такой, что $u(t) \in \mathscr{H}$ для любого $t \in I$).

З а д а ч а 7. Покажите, что $\mathscr{H}_e$ является инвариантной подгруппой (нормальным делителем) в $\mathscr{H}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{H}$ — абстрактная подгруппа группы Ли $\mathscr{G}$. Если факторгруппа $\mathscr{H}/\mathscr{H}_e$ счетна (или конечна), то подгруппа $\mathscr{H}$ обладает слабейшей гладкостью и по отношению к этой гладкости является подгруппой Ли. Компоненты линейной связности относительно этой гладкости совпадают с компонентами линейной связности в индуцированной топологии (т. е. со смежными классами $a\mathscr{H}_e$ по $\mathscr{H}_e$). В частности, подгруппа $\mathscr{H}_e$ является компонентой единицы группы Ли $\mathscr{H}$ и, значит, представляет собой связную подгруппу Ли группы Ли $\mathscr{G}$.*

Эта теорема в литературе обычно называется т е о р е м о й Я м а б е.

Общий случай теоремы Ямабе легко сводится к частному случаю линейно связной подгруппы $\mathscr{H}$. Действительно, пусть в этом случае теорема уже доказана. Это означает, что для любой подгруппы $\mathscr{H}$ мы можем ввести в компоненту $\mathscr{H}_e$ структуру связного подмногообразия, по отношению к которой $\mathscr{H}_e$ будет подгруппой Ли и, значит, максимальным инвариантным многообразием соответствующего распределения $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$. Тогда каждый смежный класс $a\mathscr{H}_e$, $a\in\mathscr{H}$, также будет максимальным интегральным подмногообразием распределения $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$. Поскольку $\mathscr{H}$ является дизъюнктным объединением смежных классов $a\mathscr{H}_e$, это вместе с условием, что каждый из этих классов является компонентой, однозначно определяет в $\mathscr{H}$ некоторую топологию и гладкость. (Заметим, что условие счетности факторгруппы $\mathscr{H}/\mathscr{H}_e$ для построения этой гладкости не требуется.)

По отношению к построенной гладкости $\mathscr{H}$ является, очевидно, подгруппой Ли (проверьте!) с компонентами вида $a\mathscr{H}_e$, $a\in\mathscr{H}$. Так как, по условию, множество $\mathscr{H}/\mathscr{H}_e$ всех этих компонент не более чем счетно, то согласно предложению 3 лекции 14 гладкость на $\mathscr{H}$ консервативна и, значит, является слабейшей гладкостью. □

Таким образом теорему Ямабе достаточно доказать лишь для линейно связной подгруппы $\mathscr{H}$. Мы сделаем это в следующем ослабленном варианте, известном как т е о р е м а Ф р е й д е н т а л я и, как правило, вполне достаточном для всех геометрических рассмотрений.

Предложение 2. *Если каждый элемент a абстрактной подгруппы $\mathscr{H}$ групп Ли $\mathscr{G}$ можно соединить с e гладкой (или хотя бы кусочно гладкой) кривой $u\colon I\to\mathscr{G}$, целиком лежащей в $\mathscr{H}$, то $\mathscr{H}$ обладает слабейшей гладкостью и по отношению к этой гладкости является связной подгруппой Ли.*

Для доказательства предложения 2 естественно ввести в рассмотрение подмножество $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathbf{T}_e\mathscr{G}$, состоящее из векторов $A\in\mathbf{T}_e\mathscr{G}$, для которых существует такая гладкая кривая $u\colon I\to\mathscr{G}$, проходящая при $t=0$ через точку e и целиком лежащая в $\mathscr{H}$, что $\dot{u}(0)=A$. (Если $\mathscr{H}$ является подгруппой Ли, то, конечно, $\mathfrak{h}=\mathfrak{l}(\mathscr{H})$.)

Лемма 4. *Подмножество $\mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathscr{G}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если проходящая при $t=0$ через точку e кривая u целиком лежит в $\mathscr{H}$, то для каждого $\lambda\in\mathbb{R}$ кривая $t\longmapsto u(\lambda t)$ также лежит в $\mathscr{H}$ (и при $t=0$ проходит через точку e). При этом ее касательный вектор при $t=0$ равен λA, где A — касательный вектор $\dot{u}(0)$ кривой u. Таким образом, если $A\in\mathfrak{h}$, то $\lambda A\in\mathfrak{h}$ при любом $\lambda\in\mathbb{R}$. Если проходящие при $t=0$ через точку e кривые u и v целиком принадлежат $\mathscr{H}$, то кривые $t\longmapsto u(t)v(t)$ и

$t \mapsto u(\tau)v(\tau)u(\tau)^{-1}v(\tau)^{-1}$, где $\tau = \operatorname{sign} t \cdot \sqrt{|t|}$, также проходят при $t=0$ через точку e и принадлежат $\mathscr{H}$. С другой стороны, согласно утверждению задачи 17 лекции 14 касательными векторами при $t=0$ к этим кривым служат векторы $A+B$ и $[A, B]$, где $A=\dot{u}(0)$ и $B=\dot{v}(0)$. Следовательно, если $A, B \in \mathfrak{h}$, то $A+B \in \mathfrak{h}$ и $[A, B] \in \mathfrak{h}$. □

Пусть $\mathscr{K}^\circ$ — связная подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Предложение 2 будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что $\mathscr{K}^\circ = \mathscr{H}$. Для этого нам понадобится еще две леммы.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — произвольный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathscr{G}$ и пусть $u_1, \ldots, u_n$ — такие гладкие кривые в $\mathscr{G}$, что $u_i(0)=e$ и $\dot{u}_i(0)=A_i$ для любого $i=1, \ldots, n$. (Таким образом, $u_i(t)=\exp(tH_i+\ldots)$, где многоточие обозначает члены степени $\geqslant 2$ по t.)

Тогда формула

$$\varphi(A)=u_1(a^1)u_2(a^2)\ldots u_n(a^n), \qquad A \in \mathfrak{g},$$

где $a^1, \ldots, a^n$ — координаты вектора A в базисе $A_1, \ldots, A_n$ (т. е. такие числа, что $A=a^1A_1+\ldots+a^nA_n$), определяет — очевидно гладкое — отображение

$$\varphi\colon U_0 \to \mathscr{G} \tag{4}$$

некоторой окрестности U_0 нуля линеала $\mathfrak{g}$ в группу $\mathscr{G}$. (Если кривые u_i, $i=1, \ldots, n$, определены для всех t, то $U_0=\mathfrak{g}$).

Лемма 5. *Отображение* (4) *этально в точке* $0 \in \mathfrak{g}$.

Доказательство (ср. доказательство леммы 2). Так как $u_i(t)=\exp(tA_i+\ldots)$, то согласно формуле (12) лекции 14

$$\varphi(A)=\exp(a^1A_1+\ldots+a^nA_n+\ldots)=\exp(A+\ldots),$$

где многоточие обозначает члены степени $\geqslant 2$ по $a^1, \ldots, a^n$. Поэтому дифференциал отображения (4) в точке 0 совпадает с дифференциалом отображения exp и, значит, является изоморфизмом. □

Из леммы 5 следует, что *числа $a^1, \ldots, a^n$ являются локальными координатами на группе $\mathscr{G}$, центрированными в точке e.*

Обычно рассматривается случай, когда кривые u_i являются однопараметрическими подгруппами $\beta_i\colon t \mapsto \exp tA_i$. В этом случае координаты $a^1, \ldots, a^n$ называются *каноническими координатами второго рода.*

Вторая нужная нам лемма относится к произвольной подалгебре $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathcal{G}$ (трактуемой как множество левоинвариантных векторных полей). Для каждой точки $a \in \mathcal{G}$ мы, как и при доказательстве теоремы 1, обозначим через $\mathfrak{h}_a$ подпространство касательного пространства $\mathbf{T}_a\mathcal{G}$, состоящее из всех векторов вида X_a, где X — левоинвариантное векторное поле на группе $\mathcal{G}$, принадлежащее $\mathfrak{h}$. [Если $\mathcal{K}^\circ$ — подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h}_a = \mathbf{T}_a\mathcal{K}^\circ$ при $a \in \mathcal{K}^\circ$ (и, в частности, $\mathfrak{h} = \mathbf{T}_e\mathcal{K}^\circ$), но $\mathfrak{h}_a$ определено и при $a \notin \mathcal{K}^\circ$.] При этом в силу левоинвариантности полей X для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$\mathfrak{h}_a = (dL_a)_e\, \mathbf{T}_e\mathcal{K}^\circ = \mathbf{T}_a(a\mathcal{K}^\circ).$$

Лемма 6. *Пусть $u\colon I \to \mathcal{G}$ — такая гладкая кривая в группе Ли $\mathcal{G}$, проходящая при $t = 0$ через точку e, что*

$$\dot u(t) \in \mathfrak{h}_{u(t)} \quad \text{для любого } t \in I. \tag{5}$$

Тогда $u(t) \in \mathcal{K}^\circ$ для всех $t \in I$ (т. е. кривая u целиком лежит в подгруппе Ли $\mathcal{K}^\circ$).

Доказательство. Пусть C — множество всех точек $t \in I$, для которых $u(t) \in \mathcal{K}^\circ$. По условию $0 \in C$.

Пусть $t_0 \in I$ и $a_0 = u(t_0)$. Рассмотрим центрированную в точке a_0 карту $(U, x^1, \ldots, x^n)$, согласованную с подгруппой Ли $\mathcal{K}^\circ$. Поскольку отображение u непрерывно, существует такое $\delta > 0$, что $u(t) \in U$ при $|t - t_0| < \delta$. Пусть $x^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — функции, задающие в карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ ограничение кривой u на интервале $|t - t_0| < \delta$. Так как для любой точки $a \in U$ окрестность V_a точки a в подмногообразии $a\mathcal{H}$ задается уравнениями вида

$$x^{m+1} = \text{const}, \ \ldots, \ x^n = \text{const},$$

то пространство $\mathfrak{h}_a = \mathbf{T}_a(a\mathcal{K}^\circ)$ пространства $\mathbf{T}_a\mathcal{G}$ натянуто на первые m векторов

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$$

координатного базиса пространства $\mathbf{T}_a\mathcal{G}$. В частности, это означает, что при $|t - t_0| < \delta$ вектор $\dot u(t)$ выражается только через векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{u(t)}, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{u(t)}.$$

Поэтому $\dot x^{m+1}(t) = 0, \ldots, \dot x^n(t) = 0$ при $|t - t_0| < \delta$ и, значит, $x^{m+1}(t) = 0, \ldots, x^n(t) = 0$ при $|t - t_0| < \delta$ (напомним, что по условию $x^{m+1}(t_0) = 0, \ldots, x^n(t_0) = 0$).

Если теперь $t_0 \in C$, т. е. $a_0 \in \mathscr{H}$, то уравнения $x^{m+1}=0, \ldots$ $\ldots, x^n=0$ будут задавать в U некоторую окрестность $V \subset U \cap \mathscr{H}$ точки a_0 в $\mathscr{H}$. Следовательно, при $|t-t_0|<\delta$ будет иметь место включение $u(t) \in V \subset \mathscr{H}$. Поэтому $t \in C$. Это означает, что точка t_0 является внутренней точкой множества C, т. е.— в силу произвольности точки t_0,— что множество C открыто.

Пусть $t_0 \in \overline{C}$. Тогда $t_0 = \lim t_k$, где $t_k \in C$. В частности, существует такое k_0, что $|t_{k_0}-t_0|<\delta$. Тогда

$$x^{m+1}(t_{k_0})=0, \ \ldots, \ x^n(t_{k_0})=0.$$

В силу согласованности карты $(U, x^1, \ldots, x^n)$ с подгруппой $\mathscr{H}$ это означает, что уравнения $x^{m+1}=0, \ldots, x^n=0$ определяют некоторую окрестность точки $u(t_{k_0})$ в $u(t_{k_0})\mathscr{H}$. Но поскольку $u(t_{k_0}) \in \mathscr{H}$, смежный класс $u(t_{k_0})\mathscr{H}$ совпадает с $\mathscr{H}$. Следовательно, все точки из U, для которых $x^{m+1}=0, \ldots, x^n=0$, принадлежат $\mathscr{H}$. В частности, $a_0 \in \mathscr{H}$ и, значит, $t_0 \in C$. Этим доказано, что $\overline{C} \subset C$, т. е. что множество C замкнуто.

Являясь непустым замкнутым и одновременно открытым подмножество интервала I, множество C совпадает со всем I. Следовательно, $u(t) \in \mathscr{K}^e$ для любого $t \in I$. □

Теперь мы уже можем доказать предложение 2.

Доказательство предложения 2. Нам надо доказать, что $\mathscr{H} = \mathscr{K}^e$. Мы докажем сначала включение $\mathscr{H} \subset \mathscr{K}^e$, а затем включение $\mathscr{K}^e \subset \mathscr{H}$.

Включение $\mathscr{H} \subset \mathscr{K}^e$. Пусть $a \in \mathscr{H}$. По условию в $\mathscr{G}$ существует гладкая кривая $u\colon I \to \mathscr{G}$, соединяющая e с a и целиком лежащая в $\mathscr{H}$. Пусть для определенности $I=$ $=[0, 1]$. Для любого $t \in I$ кривая

$$v(s)=u(t)^{-1}u(s+t), \qquad -t \leqslant s \leqslant 1-t,$$

проходит при $s=0$ через точку e и целиком лежит в $\mathscr{H}$. Следовательно, по определению, $\dot{v}(0) \in \mathfrak{h}$, или, точнее,— поскольку мы сейчас трактуем $\mathfrak{h}$ как множество левоинвариантных векторных полей,— $\dot{v}(0) \in \mathfrak{h}_e = \mathrm{T}_e\mathscr{K}^e$.

С другой стороны, легко видеть (см. формулу (3) лекции 14), что

$$\dot{u}(t)=(dL_{u(t)})_e\,\dot{v}(0).$$

Следовательно, $\dot{u}(t) \in (dL_{u(t)})_e \mathrm{T}_e\mathscr{K}^e = \mathfrak{h}_{u(t)}$, т. е. кривая u удовлетворяет условию (5) леммы 6. Следовательно, согласно этой лемме $u(t) \in \mathscr{K}^\bullet$ для всех $t \in I$. В частности, $u(1) \in \mathscr{K}^\bullet$, т. е. $a \in \mathscr{K}^\bullet$. Значит, $\mathscr{H} \subset \mathscr{K}^\bullet$.

Включение $\mathscr{K}^\bullet \subset \mathscr{H}$. Выбрав в $\mathfrak{h}$ базис $A_1, \ldots, A_m$ (мы теперь трактуем $\mathfrak{h}$ как подпространство в $\mathrm{T}_e\mathscr{G}$), рассмотрим в $\mathscr{G}$ соответствующие кривые $u_1, \ldots, u_m$ (т. е. такие кривые, целиком лежащие в $\mathscr{H}$, что $u_i(0) = e$ и $\dot{u}_i(0) = A_i$, $i = 1, \ldots, m$). Поскольку $\mathscr{H} \subset \mathscr{K}^\bullet$, мы можем рассматривать эти кривые как кривые в группе Ли $\mathscr{K}^\bullet$. (Контрольный вопрос: Почему кривые $u_1, \ldots, u_m$, рассматриваемые как кривые в $\mathscr{K}^\bullet$, будут гладки?) Пусть φ — отображение (4), построенное с помощью кривых $u_1, \ldots, u_m$ (т. е. по формуле

$$\varphi(A) = u_1(a^1) \ldots u_m(a^m),$$

где $A = a^i A_i$ — вектор из $\mathfrak{h}$, достаточно близкий к 0). Согласно лемме 5 на некоторой окрестности U_0 точки $0 \in \mathfrak{h}$ это отображение является диффеоморфизмом на окрестность $U = \varphi U_0$ точки e в $\mathscr{K}^\bullet$. При этом, так как группа Ли $\mathscr{K}^\bullet$, по построению, связна, то она порождается окрестностью U (см. задачу 12 лекции 14). С другой стороны, так как все кривые $u_1, \ldots, u_m$ лежат в $\mathscr{H}$, то $U = \varphi U_0 \subset \mathscr{H}$. Значит, $\mathscr{K}^\bullet \subset \mathscr{H}$. □

В заключение этой лекции мы вкратце обсудим два вопроса, естественно возникающих в связи с соответствием

(6) группа Ли $\Longrightarrow$ ее алгебра Ли.

Любая ли (конечномерная) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли $\mathscr{G}$? Как связаны между собой группы Ли, алгебры Ли которых изоморфны?

Если алгебра $\mathfrak{g}$ является матричной алгеброй Ли (подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$), то существование группы Ли $\mathscr{G}$ обеспечивается теоремой 1 лекции 14 (и эта группа будет подгруппой матричной группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$). С другой стороны, в теории алгебр Ли доказывается теорема Адо, согласно которой *любая конечномерная алгебра Ли изоморфна некоторой матричной алгебре Ли* (имеет, как говорят, точное матричное представление). Поэтому ответ на первый вопрос утвердителен — *для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует группа Ли $\mathscr{G}$, алгебра Ли $\mathfrak{l}\mathscr{G}$ которой изоморфна алгебре* $\mathfrak{g}$. (Этот факт впервые был доказан Картаном, но по традиции обычно называется третьей теоремой Ли.) Однако теорема Адо доказывается весьма сложно, и все остальные подходы к доказательству существования группы $\mathcal{G}$ — их пока известно еще только два — если и проще, то незначительно. Вместе с тем хотя теорема Ли безусловно играет в теории групп Ли основополагающую роль, но в приложениях ее значение ограничено тем, что на практике алгебры Ли возникают обычно вместе с соответствующими группами Ли, беспокоиться о существовании которых поэтому не приходится. Например, в этом семестре теорема Ли нам ни разу не понадобится. Поэтому заниматься ею мы здесь не будем.

Ответ на второй вопрос существенно проще. Однако он нам тоже пока не понадобится и поэтому мы изложим его, опуская почти все доказательства.

Поскольку алгебры Ли группы Ли $\mathcal{G}$ и ее компоненты единицы $\mathcal{G}_e$ совпадают, мы без ограничения общности можем считать все рассматриваемые группы Ли связными.

Определение 1. Две группы Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называются *локально изоморфными*, если существуют такие окрестности единицы $U \subset \mathcal{G}$ и $V \subset \mathcal{H}$ и такой диффеоморфизм $\varphi\colon U \to V$, что для любых элементов $a, b \in U$, удовлетворяющих соотношению $ab \in U$, элемент $\varphi(a)\varphi(b)$ принадлежит V и имеет место равенство

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab).$$

Ясно, что *алгебры Ли локально изоморфных групп Ли изоморфны* (изоморфизм осуществляется отображением $(d\varphi)_e$).

Оказывается, что и обратно, *группы Ли локально изоморфны, если изоморфны их алгебры Ли.*

[Это является точным выражением сделанного в замечании 1 лекции 14 утверждения о полной восстанавливаемости умножения в окрестности единицы группы Ли по операции [,] в ее алгебре Ли. По указанной там причине мы его здесь не доказываем.]

Таким образом, *алгебры Ли двух групп Ли тогда и только тогда одинаковы* (= *изоморфны*), *когда эти группы локально изоморфны.*

Конечно, это еще не ответ на наш вопрос, а лишь его редукция к вопросу о том, когда группы Ли локально изоморфны.

Может случиться, что предусмотренный определением 1 диффеоморфизм φ является ограничением на U некоторого гомоморфизма $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ (который мы будем обозначать той же буквой φ).

Задача 8. Докажите, что в этом случае гомоморфизм φ является накрытием в смысле определения 1 лекции 2. (Напомним, что группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ предполагаются связными.)

Гомоморфизмы $\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, являющиеся одновременно накрытиями, называются *групповыми накрытиями*. Ясно, что если окрестность U единицы группы $\mathcal{G}$ равно накрывает окрестность V единицы группы $\mathcal{H}$, то ограничение накрытия φ на U будет диффеоморфизмом $U \to V$, обладающим указанными в определении 1 свойствами. Таким образом, *для любого группового накрытия* $\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *группы* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{H}$ *локально изоморфны.*

Задача 9. Докажите, что *гомоморфизм* $\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *топологических групп тогда и только тогда является накрытием, когда его ядро* K *дискретно.*

Задача 10. Докажите, что *каждая дискретная инвариантная подгруппа* K *топологической группы* $\mathcal{G}$ *принадлежит центру этой группы* (*и, следовательно, абелева*). [Указание. Пусть $a \in \mathcal{G}$ и пусть U и V — такие окрестности единицы группы $\mathcal{G}$, что $U \cap K = \{e\}$ и $VaV^{-1} \subset U$. Тогда V порождает $\mathcal{G}$ (задача 12 лекции 14), и вместе с тем, если $a \in K$, то $VaV^{-1} \subset U \cap K = \{e\}$, и, значит, любой элемент из V перестановочен с a.]

Таким образом, *для любого группового накрытия* $\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *группа* $\mathcal{H}$ *изоморфна факторгруппе группы* $\mathcal{G}$ *по абелевой инвариантной подгруппе центра.*

Оказывается, что

А. *Для любой связной группы Ли* $\mathcal{G}$ *существует групповое накрытие* $\varphi: \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ *с односвязной группой* $\tilde{\mathcal{G}}$.

Б. *Если связные группы Ли* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{H}$ *локально изоморфны и группа* $\mathcal{G}$ *односвязна, то существует групповое накрытие* $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$, *являющееся распространением диффеоморфизма* φ *из определения* 1.

Задача 11. Докажите, что *с точностью до изоморфизма группа* $\tilde{\mathcal{G}}$ *из утверждения* **А** *единственна.*

Эта группа называется *универсально накрывающей группой* группы Ли $\mathcal{G}$. Она локально изоморфна группе $\mathcal{G}$. Поэтому связные группы Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, имеющие изоморфные универсально накрывающие группы, локально изоморфны.

Обратно, если группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ локально изоморфны, то группа $\mathcal{H}$ локально изоморфна универсально накрывающей группе $\tilde{\mathcal{G}}$ и, значит, согласно утверждению **Б** существует групповое накрытие $\tilde{\mathscr{G}} \to \mathscr{H}$, т. е. $\tilde{\mathscr{G}}$ универсально накрывает и группу $\mathscr{H}$.

Таким образом, *связные группы Ли тогда и только тогда локально изоморфны, когда изоморфны их универсально накрывающие группы.*

Резюмируя, мы видим, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Соответствие* (6) *между* (*рассматриваемыми с точностью до изоморфизма*) *связными и односвязными группами Ли и конечномерными вещественными алгебрами Ли биективно.*

Две связные группы Ли тогда и только тогда имеют изоморфные алгебры Ли, когда их универсально накрывающие группы изоморфны.

Из утверждений, на которые опирается эта теорема, мы докажем здесь лишь утверждение **А**, как самое простое. (Доказательство утверждения **Б**, хотя по идее и просто, но аккуратное его проведение требует слишком много хлопот.)

Утверждение, что отображение $\varphi\colon \tilde{\mathscr{G}} \to \mathscr{G}$ является гомоморфизмом,. равносильно утверждению о коммутативности диаграммы

(7)
$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathscr{G}}\times\tilde{\mathscr{G}} \arrow[r, "\tilde{m}"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] \arrow[dr, dashed] & \tilde{\mathscr{G}} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathscr{G}\times\mathscr{G} \arrow[r, "m"'] & \mathscr{G}
\end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой представляют собой умножения в группах $\tilde{\mathscr{G}}$ и $\mathscr{G}$ соответственно. С другой стороны, коммутативность диаграммы (7), по определению, означает, что умножение $\tilde{m}$ является поднятием на $\tilde{\mathscr{G}}$ отображения

(8) $$m\circ(\varphi\times\varphi)\colon\ \tilde{\mathscr{G}}\times\tilde{\mathscr{G}} \to \mathscr{G}$$

(изображенного на диаграмме (7) пунктирной стрелкой). Таким образом, *для любого группового накрытия* $\varphi\colon \tilde{\mathscr{G}} \to \mathscr{G}$ *умножение* $\tilde{m}$ *является поднятием отображения* (8). Это поднятие удовлетворяет соотношению $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, где $\tilde{e}$ — единица группы $\tilde{\mathscr{G}}$, которое его однозначно характеризует.

Аналогично показывается, что отображение $\tilde{\nu}$: $\tilde{a} \mapsto \tilde{a}^{-1}$ группы $\tilde{\mathcal{G}}$ на себя является удовлетворяющим соотношению $\tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e}$ поднятием отображения

$$\nu \circ \varphi: \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}, \tag{9}$$

где ν: $a \mapsto a^{-1}$, $a \in \mathcal{G}$.

Обратно, пусть для некоторого (не группового) гладкого накрытия φ: $\tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ группы Ли $\mathcal{G}$ существуют поднятия $\tilde{m}$ и $\tilde{\nu}$ отображений (8) и (9), удовлетворяющие соотношениям $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$ и $\tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e}$, где $\tilde{e}$—некоторая точка из $\varphi^{-1}(e)$.

Задача 12. Докажите, что отображения $\tilde{m}$ и $\tilde{\nu}$ гладки.

Рассмотрим отображения

$$f, g: \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G},$$

определенные соответственно формулами

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \tilde{m}(\tilde{m}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2), \tilde{a}_3),$$
$$g(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \tilde{m}(a_1, \tilde{m}(a_2, a_3)).$$

Оба отображения f и g являются, очевидно, поднятиями одного и того же отображения

$$\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}, \quad (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) \mapsto a_1 a_2 a_3,$$

где $a_i = \varphi(\tilde{a}_i)$, $i = 1, 2, 3$, с одним и тем же начальным условием $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e}) \mapsto \tilde{e}$. Поэтому в силу свойства единственности поднятий (см. теорему 1 лекции 4) эти отображения совпадают. Таким образом, умножение $\tilde{m}$ ассоциативно.

Аналогично доказывается, что по отношению к умножению $\tilde{m}$ отображение $\tilde{\nu}$ является отображением обращения. Следовательно, относительно этого умножения многообразие $\tilde{\mathcal{G}}$ является группой Ли (с единицей $\tilde{e}$), а накрытие φ: $\tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$—групповым накрытием.

С другой стороны, мы знаем (см. ту же теорему 1 лекции 4), что для существования поднятий $\tilde{m}$ и $\tilde{\nu}$ необходимо и достаточно, чтобы имели место включения

$$(m \circ (\varphi \times \varphi))_* (\pi_1(\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}})) \subset \varphi_* (\pi_1 \tilde{\mathcal{G}}), \tag{10}$$

$$(\nu \circ \varphi)_* (\pi_1 \tilde{\mathcal{G}}) \subset \varphi_* (\pi_1 \tilde{\mathcal{G}}), \tag{11}$$

где $\pi_1(\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}}) = \pi_1(\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}}, (\tilde{e}, \tilde{e}))$ и $\pi_1 \tilde{\mathcal{G}} = \pi_1(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{e})$.

Пользуясь этим, мы теперь можем доказать следующее основное предложение:

Предложение 3. *Пусть* $\varphi\colon \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ *— произвольное гладкое накрытие связной группы Ли* $\mathcal{G}$ *с единицей* e *и пусть* $\tilde{e} \in \varphi^{-1}(e)$. *Тогда в* $\tilde{\mathcal{G}}$ *существует единственное умножение с единицей* $\tilde{e}$, *по отношению к которому* $\tilde{\mathcal{G}}$ *является группой Ли, а отображение* φ *— групповым накрытием.*

Доказательство. Согласно сказанному, для доказательства предложения 3 достаточно доказать включения (10) и (11).

Задача 13. Проверьте, что для любых двух петель $u, v\colon I \to \mathcal{G}$ в точке e формула

(12) $F(t, \tau) =$

$$= \begin{cases} u\left(\dfrac{t}{1-t}(1-t+2\tau t)\right) v(t(1-2\tau)), & \text{если } 0 \leqslant t,\ \tau \leqslant 1/2, \\ u(t+2\tau(1-t))\, v\left(\dfrac{(1-2\tau)t^2+2\tau(2t-1)}{t}\right), & \\ & \text{если } 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \\ u\left(\dfrac{2t}{1-t}(t+\tau-2\tau t)\right), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ v\left(\dfrac{2t-1}{t}(2-t-2\tau(1-t))\right), & \text{если } 1/2 \leqslant t,\ \tau \leqslant 1, \end{cases}$$

корректно определяет гомотопию в $\mathcal{G}$, связывающую петлю

$$t \mapsto u(t)\,v(t), \qquad t \in I, \tag{13}$$

с петлей $uv\colon I \to \mathcal{G}$, определенной формулой

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ v(2t-1), & \text{если } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Задача 14. Формула (12) получена на основе простой элементарно геометрической конструкции. Найдите эту конструкцию.

При $v = \nu \circ u$ (т. е. при $v(t) = u^{-1}(t)$) петля (13) является постоянной петлей. Поэтому в этом случае $[u]\cdot[v] = 1$ в группе $\pi_1\mathcal{G}$. Поскольку же $[v] = \nu_*[u]$, это доказывает, что *гомоморфизм*

$$\nu_*\colon \pi_1\mathcal{G} \to \pi_1\mathcal{G}$$

является отображением обращения $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ *в группе* $\pi_1\mathcal{G}$.

В частности, отсюда следует, что гомоморфизм ν_* переводит любую подгруппу группы $\pi_1\mathcal{G}$ в себя. Применительно к подгруппе $\varphi_*(\pi_1\mathscr{G})$ это — в силу равенства $(\nu\circ\varphi)_* = \nu_*\circ\varphi_*$ — немедленно дает включение (11).

Любая петля $w\colon I\to\mathscr{G}\times\mathscr{G}$ в группе $\mathscr{G}\times\mathscr{G}$ задается формулой

$$w(t)=(u(t),\ v(t)),\qquad t\in I,$$

где $u\colon I\to\mathscr{G}$, $v\colon I\to\mathscr{G}$ — некоторые петли в группе $\mathscr{G}$.

Задача 15. Покажите, что *формула*

$$\Delta[w]=([u],\ [v])$$

корректно определяет изоморфизм

$$\Delta\colon \pi_1(\mathscr{G}\times\mathscr{G})\to\pi_1\mathscr{G}\times\pi_1\mathscr{G}.$$

(Впрочем, нам нужно лишь утверждение о корректности определения гомоморфизма Δ.)

Из утверждения задачи 13 следует, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(\mathscr{G}\times\mathscr{G}) & \xrightarrow{m_*} & \pi_1\mathscr{G}\\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \|\\ \pi_1\mathscr{G}\times\pi_1\mathscr{G} & \xrightarrow{\mu} & \pi_1\mathscr{G},\end{array}\tag{14}$$

где μ — умножение в группе $\pi_1\mathscr{G}$. Поэтому

$$(m\circ(\varphi\times\varphi))_* = m_*\circ(\varphi\times\varphi)_* = \mu\circ\Delta\circ(\varphi\times\varphi)_*.$$

С другой стороны, если $w\colon I\to\tilde{\mathscr{G}}\times\tilde{\mathscr{G}}$ — петля в $\tilde{\mathscr{G}}\times\tilde{\mathscr{G}}$ и $w(t)=u(t)v(t)$, где u, $v\colon I\to\tilde{\mathscr{G}}$ — петли в $\tilde{\mathscr{G}}$, то

$$((\varphi\times\varphi)\circ w)(t)=((\varphi\circ u)(t),\ (\varphi\circ v)(t)),\qquad t\in I,$$

и, значит,

$$(\Delta\circ(\varphi\times\varphi)_*)[w]=(\varphi_*[u],\ \varphi_*[v]).$$

Так как φ_* является гомоморфизмом, отсюда следует, что

$$(m\circ(\varphi\times\varphi))_*[w]=\varphi_*([u])\cdot\varphi_*([v])=\varphi([u]\cdot[v])\in\varphi_*(\pi_1\tilde{\mathscr{G}}).$$

Этим доказано и включение (10). □

Применив предложение 3 к универсальному накрытию $\varphi\colon\tilde{\mathscr{G}}\to\mathscr{G}$ (существующему в силу общей теоремы 1 лекции 5), мы и получим утверждение A.

Замечание 1. Коммутативность диаграммы (14) означает, что *умножение в группе $\pi_1\mathscr{G}$ индуцировано умножением в группе $\mathscr{G}$.*