Лекция 16

Связности на расслоении реперов.— Сравнение со связностями на векторных расслоениях.— Явное построение связности на векторном расслоении.— Гладкие главные расслоения.— Фундаментальные вертикальные поля.— Горизонтальные формы.— Векториозначные дифференциальные формы

Напомним (см. пример 3 лекции 6), что каждое векторное расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ ассоциировано с главным *расслоением реперов* $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\pi}, \mathscr{B})$, тотальное пространство $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ которого состоит из реперов (базисов) вида

(1) $$\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n),$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — линейно независимые (и, следовательно, составляющие базис) векторы некоторого слоя $\mathscr{F}_b$ расслоения ξ. При этом $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p})=b$.

Если расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ гладко, то в $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ определены карты вида $(\boldsymbol{\mathcal{E}}_U, \boldsymbol{h})$, где U — тривиализирующая координатная окрестность в $\mathscr{B}$, а $\boldsymbol{h}$ — отображение множества $\boldsymbol{\mathcal{E}}_U=\boldsymbol{\pi}^{-1}U$ в $\mathbb{R}^{n^2+m}=\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^m$, определенное формулой

(2) $$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})=(C, h(b)),$$
$$\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)\in\boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad b=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}).$$

Здесь $h\colon U\to\mathbb{R}^m$ — координатное отображение окрестности U, а C — матрица, столбцы которой состоят из координат векторов $p_1, \ldots, p_n$ в тривиализирующем базисе $\boldsymbol{s}(b)=(s_1(b), \ldots, s_n(b))$ слоя $\mathscr{F}_b$. (Пространство квадратных матриц порядка n отождествляется здесь с пространством $\mathbb{R}^{n^2}$.)

В карте $(\boldsymbol{\mathcal{E}}_U, \boldsymbol{h})$ локальными координатами точки $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{\mathcal{E}}_U$ являются числа c_i^j, x^k, $1\leqslant i, j\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant m$, где x^k — локальные координаты точки $b=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p})$ в карте (U, h) многообразия $\mathscr{B}$, а c_i^j — элементы матрицы C, т. е. такие числа, что

$$p_i=c_i^j s_j(b)$$

для любого $i=1, \ldots, n$. (Заметим, что матрица C невырождена.)

Таким образом, координаты точки $\boldsymbol{p}$ составляют пару $(C, \boldsymbol{x})$, где C — матрица $\|c_i^j\|$, а $\boldsymbol{x}$ — строка $(x^1, \ldots, x^m)$.

Ясно, что все карты вида $(\boldsymbol{\mathcal{E}}_U, \boldsymbol{h})$ согласованы и, следовательно, определяют на $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ структуру (n^2+m)-мерного гладкого многообразия. При этом точку $p \in \mathscr{E}$ с координатами (C, x) отображение π переводит в точку $b \in \mathscr{B}$ с координатами x, и, значит, является субмерсией. Это означает, что *для гладкого векторного расслоения* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *расслоение реперов* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *также гладко.*

В частности, мы видим, что для любой точки $b \in \mathscr{B}$ слой $\mathscr{F}_b^{\xi} = \pi^{-1}(b)$ расслоения ξ представляет собой вложенное подмногообразие, и все сказанное в лекции 10 о вертикальных и горизонтальных подпространствах автоматически применимо к расслоению ξ.

Задача 1. Покажите, что *для любого поля*

$$H: p \longmapsto H_p, \qquad p \in \mathscr{E}, \tag{3}$$

горизонтальных подпространств на расслоении ξ *в каждой карте* $(\mathscr{E}_U, h)$ *существуют такие однозначно определенные формы*

$$\theta_j^i = dc_j^i + f_{jk}^i \, dx^k, \qquad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n, \tag{4}$$

где f_{jk}^i *— некоторые функции на координатной окрестности* $\mathscr{E}_U$ *(гладкие, если гладко поле* H*), что для любой точки* $p \in \mathscr{E}_U$ *подпространство* H_p *является аннулятором ковекторов* $(\theta_j^i)_p$. [Указание. Ср. предложение 3 лекции 10.]

Локальные координаты (C, x) карты $(\mathscr{E}_U, h)$ определяют в каждом касательном пространстве $\mathbf{T}_p\mathscr{E}$, $p \in \mathscr{E}_U$, базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial c_j^i}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p, \qquad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \ 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Поэтому любой вектор из $\mathbf{T}_p\mathscr{E}$ единственным образом представляется в виде

$$a_j^i \left(\frac{\partial}{\partial a_j^i}\right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p, \qquad \text{где} \quad a_j^i, u^k \in \mathbb{R}.$$

Мы будем отождествлять этот вектор с парой (A, u), где A — матрица $\| a_j^i \|$, а u — строка $(u^1, \ldots, u^m)$. Вектор (A, u) вертикален тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Ясно, что значения форм (4) на векторе (A, u) составляют матрицу

$$A + u^k F_k,$$

где $F_k = F_k(C, x)$ — матрицы $\|f^i_{jk}\|$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому $(A, u) \in H_p$ тогда и только тогда, когда

(5) $$A + u^k F_k = 0.$$

В частности, отсюда следует, что

(6) $$(A, u)^V = (A + u^k F_k, 0), \quad (A, u)^H = (-u^k F_k, u)$$

для любого вектора (A, u) из $\mathbf{T}_p\mathscr{E}$.

Каждый слой $\mathscr{F}^\xi_{b_0}$, $b_0 \in \mathscr{B}$, расслоения ξ является орбитой правого действия

$$(p, B) \mapsto pB, \quad p \in \mathscr{E}, B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}),$$

группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ на пространстве $\mathscr{E}$, определенного формулой

$$pB = q, \qquad q = (q_1, \ldots, q_n),$$

где

$$q_i = p_j b^j_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

при $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $B = \|b^j_i\|$. В координатах это действие записывается формулой

(7) $$(C, x) \mapsto (CB, x)$$

и, следовательно, является гладким действием. В частности, для любого элемента $B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ отображение

$$R_B \colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}, \quad p \mapsto pB, \qquad p \in \mathscr{E},$$

многообразия $\mathscr{E}$ в себя является диффеоморфизмом.

Так как диффеоморфизм R_B переводит каждый слой $\mathscr{F}^\xi_{b_0}$ в себя, то его дифференциал

$$(dR_B)_p \colon \mathbf{T}_p\mathscr{E} \to \mathbf{T}_{pB}\mathscr{E}$$

в каждой точке $p \in \mathscr{F}^\xi_{b_0}$ переводит вертикальное подпространство $\mathbf{T}_p\mathscr{F}^\xi_{b_0}$ в вертикальное подпространство $\mathbf{T}_{pB}\mathscr{F}^\xi_{b_0}$. Поэтому для любого поля H горизонтальных подпространств, любой точки $p \in \mathscr{E}$ и любого элемента $B \in \mathrm{GL}(n; R)$ отображение $(dR_B)_p$ переводит горизонтальное подпространство H_p в подпространство $(dR_B)_p H_p$, дополнительное к подпространству $\mathbf{T}_{pB}\mathscr{F}^\xi_{b_0}$. Если

(8) $$(dR_B)_p H_p = H_{pB},$$

то поле H горизонтальных подпространств называется *эквивариантным*.

Определение 1. *Связностью* на главном расслоении ξ $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ называется произвольное гладкое и эквивариантное поле H горизонтальных подпространств.

Заметим, что в отличие от связности на векторном расслоении $\overset{\circ}{\xi}$ связность на главном расслоении ξ определяется без обращения к тривиализирующим координатным окрестностям.

Предложение 1. *Связности H на главном расслоении ξ находятся в естественном биективном соответствии со связностями H на ассоциированном векторном расслоении $\overset{\circ}{\xi} = \xi[\mathbb{R}^n]$.*

Доказательство. Согласно формуле (7), если точка p координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ имеет координаты (C, x), то точка $q = R_B p$ имеет координаты (CB, x).

Задача 2. Выведите отсюда, что линейное отображение $(dR_B)_p$ действует по формуле

$$(dR_B)_p(A, u) = (AB, u), \qquad (A, u) \in \mathsf{T}_p\mathcal{E}.$$

В силу формулы (5) отсюда следует, что если поле H является на $\mathcal{E}_U$ аннулятором форм (4), то подпространство $(dR_B)_p H_p$ состоит из векторов вида (AB, u), где u — произвольный вектор из $\mathbb{R}^m$, а

$$A = -F_k(C, x)\, u^k.$$

С другой стороны, так как точка $q = R_B p$ имеет координаты (CB, x), то согласно той же формуле (5) подпространство H_q состоит из векторов вида $(-F_k(CB, x)\, u^k, u)$. Следовательно, поле H горизонтальных подпространств тогда и только тогда эквивариантно (является связностью), когда для любых элементов B, C группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ и любых векторов $x, u \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$-F_k(C, x)\, Bu^k = -F_k(CB, x)\, u^k.$$

В силу произвольности вектора u последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$F_k(C, x)\, B = F_k(CB, x) \tag{9}$$

для любого $k = 1, \ldots, m$.

Полагая здесь $C = E$ и обозначая матрицу B через C, мы немедленно получим, что

$$F_k(C, x) = \Gamma_k C, \qquad k = 1, \ldots, m; \tag{10}$$

где $\Gamma_k=\Gamma_k(x)$ — матрица $F_k(E, x)$, т. е. что

$$f^i_{jk}=\Gamma^i_{ks}c^s_j, \qquad \|\Gamma^i_{ks}\|=\Gamma_k.$$

Поскольку матрицы вида (10) удовлетворяют — при любых матрицах Γ_k — соотношениям (9), мы получаем, следовательно, что *поле* $\boldsymbol{H}$ *тогда и только тогда является связностью на* ξ, *когда на каждой координатной окрестности* $\mathcal{E}_U$ *оно представляет собой аннулятор форм вида*

$$(11) \qquad \theta^i_j=dc^i_j+\Gamma^i_{ks}c^s_j\,dx^k,$$

где Γ^i_{ks} — *некоторые гладкие функции на окрестности* U.

Задача 3. Покажите, что функции Γ^i_{jk} удовлетворяют соотношениям (17) лекции 10 и, значит, являются коэффициентами некоторой связности H на векторном расслоении ξ.

Таким образом, по данной связности $\boldsymbol{H}$ на ξ мы построили связность H на ξ. Обратно, если H — произвольная связность на ξ, то по ее коэффициентам Γ^i_{kj} мы можем на каждой координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ построить формы (11) и, значит, некоторую связность $\boldsymbol{H}_U$.

Задача 4. Покажите, что связности $\boldsymbol{H}_U$ согласованы на пересечениях $\mathcal{E}_U\cap\mathcal{E}_{U'}$ и, значит, определяют связность $\boldsymbol{H}$ на всем $\mathcal{E}$.

Это, очевидно, доказывает предложение 1. □

По ходу дела мы также доказали, что *на каждой координатной окрестности* $\mathcal{E}_U$ *связности на* ξ *задаются формами вида* (11). Можно, конечно, вместо этих форм использовать линейно эквивалентные формам (11) формы

$$(12) \qquad \theta^i_j={}'c^i_t\,dc^t_j+{}'c^i_t\,\Gamma^t_{sk}c^s_j\,dx^k, \quad i, j=1, \ldots, n,$$

где ${}'c^i_t$ — элементы матрицы C^{-1}, обратной к матрице $C=\|c^i_j\|$. (Поскольку формы (11) нам больше не нужны, мы, чтобы не вводить новых обозначений, обозначаем формы (12) теми же символами θ^i_j, что и формы (11).) Матрицу $\theta=\|\theta^i_j\|$, состоящую из форм (12), можно условно записать в виде

$$(12') \qquad \theta=C^{-1}dC+C^{-1}\omega C,$$

где dC — матрица $\|dc^i_j\|$, а ω — матрица $\|\omega^i_j\|=\|\Gamma^i_{kj}\,dx^k\|$. Над любой другой координатной тривиализирующей окрестностью U' связность будет задаваться формами $\theta^{i'}_{j'}$, составляющими матрицу

$$\theta'=C'^{-1}dC'+C'^{-1}\omega'C'.$$

При этом, если $\varphi=\varphi_{\beta\alpha}$—соответствующее отображение перехода, то на $U\cap U'$ будет иметь место равенство

$$\omega'=\varphi^{-1}\omega\varphi+\varphi'\,d\varphi$$

(см. формулу (17") лекции 10), а также равенство

$$C'=\varphi^{-1}C$$

(докажите!). Поэтому на $U\cap U'$

$$\begin{aligned}\theta' &= C^{-1}\varphi\, d(\varphi^{-1}C)+C^{-1}\varphi(\varphi^{-1}\omega\varphi+\varphi^{-1}\,d\varphi)\,\varphi^{-1}C=\\ &= C^{-1}\varphi\,(d\varphi^{-1})\,C+C^{-1}(\varphi\varphi^{-1})\,dC+C^{-1}\omega C+C^{-1}\,d\varphi\varphi^{-1}C=\\ &= -C^{-1}\varphi(\varphi^{-1}\,d\varphi\,\varphi^{-1})C+C^{-1}\,dC+C^{-1}\omega C+C^{-1}d\varphi\varphi^{-1}C=\\ &= C^{-1}\,dC+C^{-1}\omega C=\\ &= \theta\end{aligned}$$

(как известно, $d\varphi^{-1}=-\varphi^{-1}\,d\varphi\,\varphi^{-1}$). Значит, формы (12) согласованы на пересечениях и, следовательно, составляют глобальные формы θ^i_j, определенные на всем многообразии $\mathcal{E}$. Таким образом, мы видим, что *любая связность на* ξ *является аннулятором форм* θ^i_j, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$, *определенных на всем многообразии* $\mathcal{E}$ (и в каждой карте $(\mathcal{E}_U, \boldsymbol{h})$ имеющих вид (12)). Это выгодно отличает связности на ξ от связностей на ξ, для которых аналогичные формы θ^i, $1\leqslant i\leqslant n$, определены лишь локально.

Изложенное выше доказательство предложения 1 обладает тем недостатком, что в нем не дается прямой геометрической конструкции связности H по связности $\boldsymbol{H}$. Это можно исправить (и тем самым фактически получить еще одно доказательство предложения 1).

Так как компоненты $p_1, \ldots, p_n$ произвольной точки $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$ пространства $\mathcal{E}$ принадлежат, по определению, одному слою $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ, то для любого вектора $\boldsymbol{y}=(y', \ldots, y^n)\in\mathbb{R}^n$ определена точка $p_iy^i\in\mathcal{F}_b$. Следовательно, формула

$$f_y(\boldsymbol{p})=p_iy^i,$$
$$\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n),\quad \boldsymbol{y}=(y^1, \ldots, y^n),$$

определяет—очевидно, гладкое,—отображение

$$f_y\colon \mathcal{E}\to\mathscr{E}.$$

Пусть

$$(df_y)_{\boldsymbol{p}}\colon \mathbf{T}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{E}\to\mathbf{T}_p\mathscr{E},\qquad p=p_iy^i,$$

—дифференциал этого отображения в точке $\boldsymbol{p}\in\mathcal{E}$.

Предложение 2. *Для произвольной связности H на ξ формула*

(13) $$H_p = (df_y)_p \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{p}}, \quad p = f_y(\boldsymbol{p}),$$

корректно определяет некоторую связность H на ξ.

Доказательство. В первую очередь надо проверить корректность формулы (13), т. е. что ее правая часть зависит только от точки p. Для этого нам надо доказать, что если

(14) $$f_y(\boldsymbol{p}) = f_z(\boldsymbol{q}), \quad \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n, \ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{E},$$

то

$$(df_y)_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{p}} = (df_z)_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{q}}.$$

Равенство (14) возможно, конечно, лишь тогда, когда $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ принадлежат одному слою расслоения ξ и, значит, в группе $GL(n; \mathbb{K})$ существует такой элемент $B = \|b_i^j\|$, что $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}B$, т. е. $q_i = p_j b_i^j$. Но тогда

$$f_z(\boldsymbol{q}) = q_i z^i = p_j b_i^j z^i, \qquad \boldsymbol{z} = (z^1, \ldots, z^n),$$

и потому равенство (13) означает — напомним, что векторы $p_1, \ldots, p_n$ линеала $\mathcal{T}_b$, по условию, линейно независимы —, что $y^j = b_i^j z^i$, т. е. что $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{z}$ (где $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ рассматриваются как столбцы). Следовательно, мы можем записать равенство (14) в следующем виде:

$$f_{Bz}(\boldsymbol{p}) = (f_z \circ R_B)(\boldsymbol{p}).$$

Здесь важно отметить, что для любых B и $\boldsymbol{z}$ это равенство имеет место тождественно по $\boldsymbol{p}$. Поэтому для данного $\boldsymbol{p}$

(15) $$(df_y)_{\boldsymbol{p}} = (df_{Bz})_{\boldsymbol{p}} = (df_z)_{\boldsymbol{q}} \circ (dR_B)_{\boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}B, \ \boldsymbol{y} = B\boldsymbol{z},$$

и, значит, как и утверждалось,

$$(df_y)_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{p}} = (df_z)_{\boldsymbol{q}} ((dR_B)_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{p}}) = (df_z)_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{q}},$$

так как в силу эквивариантности $(dR_B)_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{p}B} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{q}}$.

Задача 5. Напомним, что вектор

$$a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial c_i^j}\right)_{\boldsymbol{p}} + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\boldsymbol{p}},$$

$$1 \leqslant i, \quad j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

пространства $\mathsf{T}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{E}$ мы условились обозначать через $(A, \boldsymbol{u})$, где $A = \|a_i^j\|$ и $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^n)$. Аналогично вектор

$$c^i \left(\frac{\partial}{\partial a^i}\right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant k \leqslant m,$$

пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{E}$ мы будем обозначать через (c, u), где $c=(c^1, \ldots, c^n)$ и $u=(u^1, \ldots, u^n)$. Покажите, что в этих обозначениях дифференциал

$$(df_y)_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{E} \to \mathbf{T}_{p'}\mathscr{E}, \qquad p'=f_y(p),$$

отображения f_y действует по формуле

$$(df_y)_p(A, u)=(Ay, u),$$

где y и Ay рассматриваются как столбцы. Выведите отсюда формулу (14).

Таким образом, для каждой связности H на ξ формула (13) корректно определяет на ξ поле подпространств H_p.

Задача 6. Покажите, что это поле гладко.

Ясно, что $\pi\circ f_y=\pi$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[rr, "f_y"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{E} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathscr{B} & \end{tikzcd}$$

коммутативна (отображение f_y является морфизмом расслоений). Поэтому для любых точек $p\in\mathscr{E}$ и $y\in\mathbb{R}^n$ коммутативна и диаграмма дифференциалов

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_p\mathscr{E} \arrow[rr, "(df_y)_p"] \arrow[dr, "(d\pi)_p"'] & & \mathbf{T}_{p'}\mathscr{E} \arrow[dl, "(d\pi)_{p'}"] \\ & \mathbf{T}_b\mathscr{B} & \end{tikzcd}, \quad b=\pi(p)=\pi(p')$$

Задача 7. Выведите отсюда, что поле H является полем горизонтальных подпространств.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 2 нам надо лишь доказать, что поле H задается формами, линейно зависящими от координат по слою. Для этого мы вычислим его в координатах (что, в частности, немедленно даст нам решение задач 6 и 7).

Пусть, как всегда, U — тривиализирующая координатная окрестность в многообразии $\mathscr{B}$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что для точек $p\in\mathscr{E}_U$ подпространство H_p задается формулой

$$H_p=(df_a)_{p_0}H_{p_0},$$

где $p_0 = s(b)$, $b = \pi(p)$ (и, значит, a — столбец координат точки p в базисе $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ слоя $\mathcal{F}_b$). Так как $(d\pi)_{p_0}$ на H_{p_0} является изоморфизмом на $\mathsf{T}_b\mathcal{B}$, то подпространство H_{p_0} обладает базисом вида

$$(16) \qquad (A_1, e_1), \ \ldots, \ (A_m, e_m)$$

и, следовательно, подпространство H_p — базисом

$$(A_1 c, e_1), \ \ldots, \ (A_m c, e_m),$$

где

$$A_1 = \|a^i_{1j}\|, \ \ldots, \ A_m = \|a^i_{mj}\|, \qquad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n,$$

— некоторые квадратные матрицы порядка n, гладко зависящие от точки $b \in U$.

Рассмотрим на $\mathcal{E}_U$ — очевидно, гладкие — дифференциальные формы

$$\theta^i = da^i - a^i_{kj} a^j \, dx^k, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Так как в любой точке $p \in \mathcal{E}_U$ ковекторы $(da^i)_p$ и $a^i_{kj} a^j (dx^k)_p$ принимают на векторах

$$(A_k c, e_k) = a^i_{kj} c^j \left(\frac{\partial}{\partial a^j} \right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p$$

пространства H_p одно и то же значение $a^i_{kj} c^j$, то все ковекторы θ^i_p, $p \in \mathcal{E}_U$, равны нулю на H_p, и, значит, $H_p \subset \operatorname{Ann}(\theta^1_p, \ldots, \theta^n_p)$. Поскольку же эти ковекторы, очевидно, линейно независимы, а $\dim H_p = m$, то здесь имеет место не включение, а равенство. Таким образом,

$$H = \operatorname{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n) \qquad \text{на } \mathcal{E}_U$$

и, значит, поле $H\colon p \mapsto H_p$ действительно является связностью (с коэффициентами $\Gamma^i_{kj} = -a^i_{kj}$). □

Поскольку векторы (16) составляют базис подпространства H_{p_0}, то (см. задачу 2) для любого элемента $B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ векторы

$$(A_1 B, e_1), \ \ldots, \ (A_m B, e_m)$$

будут составлять базис подпространства H_p, $p = p_0 A$.

Задача 8. Выведите отсюда, что подпространство H_p является аннулятором в точке p форм

$$\theta^i_j = dc^i_j - a^i_{ks} c^s_j \, dx^k, \qquad 1 \leqslant i, \ \ j \leqslant n.$$

Это, очевидно, доказывает, что построенное в предложении 2 соответствие $\boldsymbol{H} \Rightarrow H$ совпадает с соответствием из предложения 1 (и тем самым дает новое доказательство предложения 1).

Согласно предложению 1 связности на ξ можно отождествлять со связностями на ξ.

Это не только дает новое (и инвариантное!) определение связностей на векторных расслоениях, но и открывает возможность немедленных широких обобщений.

Пусть группа Ли $\mathcal{G}$ гладко действует справа на гладком многообразии $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}\times\mathcal{G}\to\mathcal{E}. \tag{17}$$

Предположим, что

а) пространство $\mathcal{B}=\mathcal{E}/\mathcal{G}$ является гладким многообразием;

б) отображение

$$\pi\colon \mathcal{E}\to\mathcal{B},\quad p\mapsto p\mathcal{G},\qquad p\in\mathcal{E}, \tag{18}$$

гладко;

в) для некоторого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ существуют эквивариантные (и, значит, послойные) диффеоморфизмы

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha\times\mathcal{G}\to\mathcal{E}_{U_\alpha}=\pi^{-1}(U_\alpha)$$

(удовлетворяющие соотношению $\varphi_\alpha(b, a)g=\varphi_\alpha(b, ag)$ для любых точек $b\in U_\alpha$ и a, $g\in\mathcal{G}$).

Задача 9. Докажите, что гладкое действие (17) тогда и только тогда является главным действием в смысле определения 2 лекции 1, когда оно обладает свойствами **а**, **б** и **в**. (Основную трудность здесь представляет, конечно, доказательство свойства локальной тривиальности **в**.)

Не имея в виду явно пользоваться этим утверждением, мы не мудрствуя лукаво будем в дальнейшем называть гладкое действие (17), обладающее свойствами **а**, **б** и **в**, *главным*. В соответствии с этим тройку $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, где π — отображение (18), мы будем называть *гладким главным $\mathcal{G}$-расслоением*. [Таким образом, согласно этому определению *каждое гладкое главное расслоение локально тривиально*.]

Задача 10. Покажите, что *для любого гладкого главного расслоения ξ отображение сдвига*

$$\tau\colon \mathcal{E}^*\to\mathcal{G}$$

(см. лекцию 1, стр. 19) *является гладким отображением*

Задача 11. Покажите, что рассмотренное выше расслоение реперов является гладким главным $GL(n; \mathbb{K})$-расслоением.

Так как в силу условия **в** отображение $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ является субмерсией, то каждое гладкое главное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ является гладким расслоением в смысле лекции 10 и потому для него мы можем говорить о вертикальных векторах и гладких полях горизонтальных подпространств.

Займемся сначала вертикальными векторами.

Векторное поле X на $\mathcal{E}$, состоящее из вертикальных векторов, т. е. такое, что для любой точки $p \in \mathcal{E}$ вектор X_p вертикален, мы будем называть *вертикальным полем*.

Для каждой точки $p \in \mathcal{E}$ отображение

$$L_p: \mathcal{G} \to \mathcal{E}, \quad a \mapsto pa, \qquad a \in \mathcal{G},$$

является, очевидно, диффеоморфизмом группы $\mathcal{G}$ на слой $p\mathcal{G} = \mathcal{F}_b^\xi$, $b = \pi(p)$ расслоения ξ, переводящим единицу e группы $\mathcal{G}$ в точку p. Поэтому для любого вектора $A \in \mathfrak{g}$ формула

$$A_p^\# = (dL_p)_e A, \qquad p \in \mathcal{E}, \tag{19}$$

определяет на $\mathcal{E}$ некоторое вертикальное векторное поле

$$A^\#: p \mapsto A_p^\#.$$

Задача 12. Покажите, что поле $A^\#$ гладко.

Поле $A^\#$ называется *фундаментальным вертикальным полем*, отвечающим вектору $A \in \mathfrak{g}$.

Так как отображение L_p является диффеоморфизмом, то при $A \neq 0$ все векторы $A_p^\#$ отличны от нуля:

$$A_p^\# \neq 0 \quad \text{в каждой точке } p \in \mathcal{E}.$$

В частности, мы видим, что — очевидно, линейное — отображение

$$\#: A \to A^\# \tag{20}$$

представляет собой мономорфизм линеала $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ в линеал $\mathfrak{a}\mathcal{E}$ всех векторных полей на многообразии $\mathcal{E}$.

Задача 13. Покажите, что *для любого вертикального вектора $B \in \mathbf{T}_{p_0}\mathcal{E}$ существует единственный элемент $A \in \mathfrak{g}$, обладающий тем свойством, что*

$$A_{p_0}^\# = B.$$

Задача 14. Пусть $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — расслоение реперов векторного расслоения ξ. Так как касательные векторы в точке e к группе $\mathcal{G}$ GL $(n; \mathbb{R})$ естественным образом отождествляются с квадратными матрицами порядка n, то каждая матрица $A\in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ определяет на пространстве $\mathcal{E}$ вертикальное векторное поле $A^\#$. Покажите, что в каждой карте $(\mathcal{E}_U, h)$ это поле задается формулой

$$A^\#_p = (AC, 0),$$

где (C, x) — координаты точки p.

Легко видеть, что *для каждой точки $p_0\in\mathcal{E}$ кривая*

$$\beta\colon\ t\mapsto p_0 \exp tA = R_{\exp tA}\, p_0,$$

$-\infty < t < +\infty$, *является интегральной кривой поля $A^\#$, проходящей при $t=0$ через точку p_0*. Действительно, пусть $t_0\in\mathbb{R}$. Так как

$$\begin{aligned}\beta(t) &= p_0 \exp t_0A \exp(t-t_0)A = \\ &= L_{p_0 \exp t_0A}(\exp(t-t_0)A) = \\ &= L_{\beta(t_0)}(\exp(t-t_0)A)\end{aligned}$$

и так как касательным вектором к кривой $t\mapsto \exp(t-t_0)A$ в точке t_0 является вектор A, то

$$\dot\beta(t_0) = (dL_{\beta(t_0)})_e A = A^\#_{\beta(t_0)}. \ \square$$

Поскольку $[A^\#, X] = \mathfrak{L}_{A^\#}X$ (см. формулу (18) лекции III.17), отсюда следует, что

$$[A^\#, X] = \lim_{t\to 0}\frac{R^*_{\exp tA}X - X}{t} \tag{21}$$

для каждого векторного поля $X\in\mathfrak{a}\mathcal{E}$. [Напомним — см. лекцию III.17, — что символом φ^*X, где X — векторное поле на гладком многообразии $\mathscr{X}$, а φ — произвольный диффеоморфизм $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, обозначается векторное поле на $\mathscr{X}$, определенное формулой $(\varphi^*X)_p = (d\varphi)_p^{-1}X_{\varphi(p)}$, $p\in\mathscr{X}$.]

Пусть, в частности, $X = B^\#$, где $B\in\mathfrak{g}$. Тогда

$$X_{p\exp tA} = (dL_{p\exp tA})_e B$$

и потому

$$\begin{aligned}(R^*_{\exp tA}X)_p &= (dR_{\exp tA})_p^{-1}(dL_{p\exp tA})_e B = \\ &= d(R^{-1}_{\exp tA}\circ L_{p\exp tA})_e B.\end{aligned}$$

С другой стороны, так как для любой точки $x\in\mathcal{G}$

$$\begin{aligned}(R^{-1}_{\exp tA}\circ L_{p\exp tA})x &= p(\exp tA)\,x\,(\exp(-tA)) = \\ &= p(\mathrm{int}_{\exp tA}\, x) = (L_p\circ \mathrm{int}_{\exp tA})x,\end{aligned}$$

то

$$R^{-1}_{\exp tA} \circ L_{p \exp tA} = L_p \circ \operatorname{int}_{\exp tA},$$

и потому

$$d(R^{-1}_{\exp tA} \circ L_{p \exp tA})_e = (dL_p)_e \circ d(\operatorname{int}_{\exp tA})_e =$$
$$= (dL_p)_e \circ \operatorname{Ad}(\exp tA) = (dL_p)_e \circ e^{t \operatorname{ad} A}$$

(напомним — см. лекцию 14, — что по определению $\operatorname{Ad} a = d(\operatorname{int}_a)_e$) для любого элемента $a \in \mathcal{G}$ и $\operatorname{Ad} a = e^{\operatorname{ad} A}$ при $a = \exp A$; см. формулу (17) лекции 14).

Следовательно,

$$(R^*_{\exp tA} B^\#)_p - B^\#_p = [(dL_p)_e \circ (e^{t \operatorname{ad} A} - \mathrm{id})] B$$

и, значит (см. формулу (21) и формулу (15) лекции 14),

$$[A^\#, B^\#]_p = (dL_p)_e \lim_{t \to 0} \frac{e^{t \operatorname{ad} A} - \mathrm{id}}{t} B =$$
$$= (dL_p)_e (\operatorname{ad} A) B = (dL_p)_e [A, B] = [A, B]^\#_p.$$

Этим доказано, что

$$[A^\#, B^\#] = [A, B]^\# \tag{22}$$

для любых векторов $A, B \in \mathfrak{g}$, т. е. что *линейное отображение* (20) *является гомоморфизмом алгебр Ли* (мономорфно вкладывающим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{a}\mathcal{E}$).

Дифференциальную форму ω степени $r > 0$ на многообразии $\mathcal{E}$ мы будем называть *горизонтальной*, если для любой точки $p \in \mathcal{E}$ полилинейный функционал ω_p на $\mathbf{T}_p \mathcal{E}$ обладает тем свойством, что

$$\omega_p(A_1, \ldots, A_r) = 0,$$

когда хотя бы один из векторов $A_1, \ldots, A_r$ вертикален.

Из утверждения задачи 13 непосредственно следует, что *дифференциальная форма* ω *степени* $r > 0$ *на* $\mathcal{E}$ *тогда и только горизонтальна, когда для любого элемента* $A \in \mathfrak{g}$ *форма* $A^\# \lrcorner\, \omega$ *степени* $r-1$ (см. лекцию III.18) *тождественно равна нулю*:

$$A^\# \lrcorner\, \omega = 0. \tag{23}$$

В частности, *линейная дифференциальная форма* θ *на* $\mathcal{E}$ *тогда и только тогда горизонтальна, когда для любого элемента* $A \in \mathfrak{g}$ *функция* $\theta(A^\#)$ *на* $\mathcal{E}$ *тождественно равна нулю*:

$$\theta(A^\#) = 0. \tag{24}$$

Заметим, что *для любой формы α на $\mathcal{B}$ форма $\pi^*\alpha$ на $\mathcal{E}$ горизонтальна.*

Задача 15 (продолжение задачи 14). Для расслоения реперов $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ покажите, что линейная форма θ на $\mathcal{E}$ тогда и только тогда горизонтальна, когда в каждой карте $(\mathcal{E}_U, h)$ она имеет вид

$$\theta=g_k\,dx^k, \tag{25}$$

где g_k, $k=1, \ldots, m$, — функции на $\mathcal{E}_U$.

Это, в частности, показывает, что, вообще говоря, горизонтальные формы на $\mathcal{E}$ не исчерпываются формами вида $\pi^*\alpha$. (Форма (25) тогда и только тогда имеет вид $\pi^*\alpha$, когда функции g_k постоянны на слоях.)

Прежде чем переходить к полям горизонтальных подпространств, нам надо предварительно несколько усовершенствовать наш формализм.

Пусть $\mathcal{X}$ — гладкое многообразие и $\mathcal{V}$ — линейное пространство.

Определение 2. Предположим, что каждой точке $p\in\mathcal{X}$ и любым векторам $A_1, \ldots, A_r\in\mathbf{T}_p\mathcal{X}$ сопоставлен вектор

$$\omega_p(A_1, \ldots, A_r) \tag{26}$$

линейного пространства $\mathcal{V}$. Функция

$$\omega\colon (p, A_1, \ldots, A_r) \mapsto \omega_p(A_1, \ldots, A_r)$$

называется *$\mathcal{V}$-значной дифференциальной формой степени r на многообразии $\mathcal{X}$*, если для любого линейного функционала $l\colon \mathcal{V}\to\mathbb{R}$ функция

$$l\circ\omega\colon (p, A_1, \ldots, A_r)\mapsto l(\omega_p(A_1, \ldots, A_r)) \tag{27}$$

является обыкновенной ($\mathbb{R}$-значной) гладкой дифференциальной формой степени r на $\mathcal{X}$ (т. е. для каждой точки $p\in\mathcal{X}$ представляет собой гладко зависящий от p полилинейный функционал степени r на $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$).

Если в $\mathcal{V}$ выбран базис $e_1, \ldots, e_n$, то каждая такая форма ω определяет n обыкновенных форм

$$\omega^1=e^1\circ\omega, \ \ldots, \ \omega^n=e^n\circ\omega,$$

где $e^1, \ldots, e^n$ — векторы сопряженного базиса пространства линейных функционалов $\mathcal{V}^*$ (удовлетворяющие соотношению $e^i(e_j)=\delta^i_j$). При этом разложение вектора (26) по векторам базиса $e_1, \ldots, e_n$ будет иметь вид

(28) $$\omega_p(A_1, \ldots, A_r) = \omega_p^i(A_1, \ldots, A_r)e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В соответствии с общими обозначениями теории функций последнюю формулу надо было бы записывать в виде

(29) $$\omega = \omega^i e_i.$$

Однако обычно здесь используется специальный знак $\otimes$ и вместо (29) пишут

(30) $$\omega = \omega^i \otimes e_i.$$

Основания к этому выясняются в следующей серии задач.

Задача 16. Покажите, что $\mathcal{V}$-значные дифференциальные формы степени r на $\mathcal{X}$ — это в точности сечения расслоения $\operatorname{Hom}(\Lambda^r\tau_{\mathcal{X}}, \theta_{\mathcal{V}})$, где $\theta_{\mathcal{V}}$ — тривиальное расслоение $(\mathcal{X} \times \mathcal{V}, \pi, \mathcal{X})$.

Задача 17. Покажите, что для любых векторных расслоений ξ и η расслоение $\operatorname{Hom}(\xi, \eta)$ естественно изоморфно расслоению $\xi^* \otimes \eta$. [Указание. Учтите, что для любых линеалов $\mathcal{W}$ и $\mathcal{V}$ линеал $\operatorname{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ естественно изоморфен линеалу $\mathcal{W}^* \otimes \mathcal{V}$. Воспользуйтесь также утверждением задачи 14 лекции 12.]

В частности, $\operatorname{Hom}(\Lambda^r\tau^*_{\mathcal{X}}, \theta_{\mathcal{V}}) = \Lambda^r\tau^*_{\mathcal{X}} \otimes \eta$. (Напомним, что $\Lambda^r\xi^* = (\Lambda^r\xi)^*$.)

Задача 18. Покажите, что каждое сечение расслоения $\Lambda^r\tau^*_{\mathcal{X}} \otimes \theta_{\mathcal{V}}$ единственным образом представляется в виде $\omega^i \otimes e_i$, где ω^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — сечения расслоения $\Lambda^r\tau^*_{\mathcal{X}}$ (дифференциальные формы степени r на $\mathcal{X}$), а e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — сечения расслоения $\theta_{\mathcal{V}}$, определенные формулой

$$e_i(p) = (p, e_i), \qquad p \in \mathcal{X},$$

где справа e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — векторы данного базиса пространства $\mathcal{X}$. [Указание. См. задачу 12 лекции 12.]

Таким образом, переход от формулы (29) к формуле (30) можно интерпретировать как переход от сечений расслоения $\operatorname{Hom}(\Lambda^r\tau_{\mathcal{X}}, \theta_{\mathcal{V}})$ к сечениям изоморфного расслоения $\Lambda^r\tau^*_{\mathcal{X}} \otimes \theta_{\mathcal{V}}$.

Результат задачи 17 подсказывает возможность дальнейших обобщений. Именно, для любого векторного расслоения η над $\mathcal{X}$ мы можем ввести в рассмотрение сечения расслоения

$$\operatorname{Hom}(\Lambda^r\tau_{\mathcal{X}}, \eta) = \Lambda^r\tau^*_{\mathcal{X}} \otimes \eta$$

(*дифференциальные формы со значениями в* η). [При $r = 1$ эти сечения у нас уже фактически встречались в лекции

13—как значения оператора ковариантного дифференцирования ∇.]

Еще более общим образом мы можем для любых $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ рассмотреть (см. пример 8 лекции 12) сечения расслоения $\tau_s^r \mathscr{X} \otimes \eta$ (тензорные поля типа (r, s) *со значениями в* η).

Задача 19. Покажите, что для любых векторных расслоений ξ и η над $\mathscr{X}$ имеют место естественные изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}(\xi, \eta) = \operatorname{Hom}(\eta^*, \xi^*), \quad (\xi \otimes \eta)^* = \eta^* \otimes \xi^*.$$

Отсюда, в частности, следует, что $(\tau_r^s \mathscr{X})^* = \tau_s^r \mathscr{X}$ и

$$\tau_s^r \mathscr{X} \otimes \eta = \operatorname{Hom}(\tau_r^s \mathscr{X}, \eta) = \operatorname{Hom}(\eta^*, \tau_s^r \mathscr{X}). \tag{31}$$

Поэтому тензорными полями типа (r, s) на $\mathscr{X}$ со значениями в η можно считать сечения каждого из расслоений (31).

При желании формулу (30) можно, конечно, рассматривать как всего лишь графический вариант формулы (29) и, следовательно,— подобно формуле (29)—как условную, сокращенную запись соотношений (28). Имея в виду именно эту интерпретацию, формы $\omega^1, \ldots, \omega^n$ называют обычно *координатами* $\mathscr{V}$-значной формы ω в базисе $e_1, \ldots, e_n$. При изменении базиса они подвергаются тому же преобразованию, что и координаты векторов из $\mathscr{V}$.

Для любых векторных полей $X_1, \ldots, X_r$ на $\mathscr{X}$ каждая $\mathscr{V}$-значная дифференциальная форма ω степени r определяет по формуле

$$\omega(X_1, \ldots, X_r)(p) = \omega_p((X_1)_p, \ldots, (X_r)_p), \quad p \in \mathscr{X},$$

некоторую $\mathscr{V}$-значную функцию $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ на $\mathscr{X}$ (гладкую, если гладки поля $X_1, \ldots, X_r$ и форма ω).

Задача 20. Пусть $\mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}$—линейное пространство всех $\mathscr{V}$-значных гладких функций на $\mathscr{X}$. Покажите, что

а. *Отображение*

$$\begin{gathered} \mathfrak{a}\mathscr{X} \times \ldots \times \mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}, \\ (X_1, \ldots, X_r) \mapsto \omega(X_1, \ldots, X_r), \end{gathered} \tag{32}$$

кососимметрично и $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-полилинейно.*

б. *Если многообразие* $\mathscr{X}$ *хаусдорфово, то соответствие*

$$\textit{форма } \omega \Rightarrow \textit{отображение } (32)$$

задает изоморфное отображение $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-модуля* $\mathscr{V}$*-значных дифференциальных форм степени* r *на* $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-модуль всех* *кососимметрических* $\mathsf{F}\mathscr{X}$-*полилинейных отображений*

$$\mathfrak{a}\mathscr{X}\times\ldots\times\mathfrak{a}\mathscr{X}\to\mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}.$$

(Ср. лекцию III.18.)

Задача 21. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для дифференциальных форм и тензорных полей со значениями в произвольном векторном расслоении η над $\mathscr{X}$. [Указание. Вместо $\mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}$ появится $\Gamma\eta$.]

Как правило, мы будем отождествлять форму ω с соответствующим отображением (32).

Определение 3. *Внешним дифференциалом* $d\omega$ формы (30) называется форма

$$d\omega=d\omega^i\otimes e_i. \tag{33}$$

Задача 22. Покажите, что это определение корректно, т. е. что форма (33) не зависит от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Задача 23. Покажите, что для векторнозначных форм остается в силе предложение 2 лекции III.19 (по отношению к естественному действию векторных полей $X\in\mathfrak{a}\mathscr{X}$ на алгебре $\mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}$).

В частности, если $\deg\omega=1$, то

$$d\omega(X, Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega[X, Y], \tag{34}$$

а если $\deg\omega=2$, то

$$\begin{aligned}d\omega(X, Y, Z)=X\omega(Y, Z)+Y\omega(Z, X)+Z\omega(X, Y)+\\+\omega(X, [Y, Z])+\omega(Y, [Z, X])+\omega(Z, [X, Y])\end{aligned} \tag{35}$$

для любых полей $X, Y, Z\in\mathfrak{a}\mathscr{X}$.