Лекция 17

Фундаментальные формы и поля горизонтальных подпространств.— Связности на гладком главном расслоении.— Проекторы, индуцированные связностями.— Горизонтальные векторные поля.— Связности на ассоциированных расслоениях.— Связности на ассоциированных векторных расслоениях.

Введенные в конце предыдущей лекции общие понятия мы применим к случаю, когда многообразие $\mathscr{X}$ является тотальным многообразием $\mathcal{E}$ гладкого главного $\mathscr{G}$-расслоения $\xi=(\mathcal{E},\pi,\mathscr{B})$, а линейное пространство $\mathscr{V}$— касательным пространством $\mathfrak{g}=\mathbf{T}_e\mathfrak{g}$ группы $\mathscr{G}$ в точке e (ее алгеброй Ли).

Определение 1. Линейная $\mathfrak{g}$-значная дифференциальная форма θ на $\mathcal{E}$ называется *фундаментальной формой*, если для любого вектора $A\in\mathbf{T}_e\mathscr{G}$ в каждой точке $p\in\mathcal{E}$ имеет место равенство

$$\theta(A^{\#})(p)=A. \tag{1}$$

Пример 1. Так как $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})=\operatorname{Mat}_n\mathbb{R}$, то $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$-значные формы—это просто матрицы $\omega=\|\omega^i_j\|$, элементами которых являются обычные дифференциальные формы ω^i_j. В частности, линейные $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$-значные формы—это матрицы $\theta=\|\theta^i_j\|$, состоящие из линейных дифференциальных форм θ^i_j. В карте $(\mathcal{E}_U,\boldsymbol{h})$ тотального многообразия $\mathcal{E}$ расслоения реперов ξ векторного расслоения ξ каждая форма θ^i_j имеет вид

$$\theta^i_j=f^{is}_{jr}\,dc^r_s+g^i_{jk}\,dx^k,$$

где f^{is}_{jr} и g^i_{jk}—некоторые функции на $\mathcal{E}_U$. Значение формы θ^i_j на касательном векторе $(A,\boldsymbol{u})$ (мы продолжаем использовать обозначения, введенные в лекции 14) равно

$$f^{is}_{jr}a^r_s+g^i_{jk}u^k=\operatorname{Tr}(F^i_jA)+G_ku^k,$$

где F^i_j и G_k—матрицы $\|f^{is}_{jr}\|$ и $\|g^i_{jk}\|$ соответственно. В частности, значение этой формы на векторе вида $(AC,\mathbf{0})$ равно $\operatorname{Tr}(F^i_jAC)$. Поэтому—см. задачу 14 лекции 14—форма θ тогда и только тогда фундаментальна, когда

$$\operatorname{Tr}(F^i_jAC)=a^i_j$$

для любой матрицы $A=\|a^i_j\|$. Но легко видеть (докажите!), что матрицы F^i_j тогда и только тогда обладают этим свойством, когда $F^i_jC = E^i_j$, где E^i_j — матричные единицы (все элементы матрицы E^i_j равны нулю, за исключением (i, j)-го, который равен 1), т. е. когда $F^i_j = E^i_jC^{-1}$ (и значит, $f^{is}_{jr} = {}'c^i_r\delta^s_j$, где ${}'c^i_l$ — элементы матрицы C^{-1}). Этим доказано, что $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$-*значная форма* $\theta = \|\theta^i_j\|$ *на расслоении реперов тогда и только тогда фундаментальна, когда в каждой карте* $(\mathcal{E}_U, h)$ *составляющие ее формы* θ^i_j *имеют вид*

$$\theta^i_j = {}'c^i_r\, dc^r_j + g^i_{jk}\, dx^k,$$

т. е. когда

$$\theta = C^{-1}dC + G_k\, dx^k, \tag{2}$$

где dC — матрица $\|dc^r_j\|$, а $G_k = \|g^i_{jk}\|$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Каждая $\mathfrak{g}$-значная линейная дифференциальная форма θ задает по формуле

$$H_p = \{B \in \mathbf{T}_p\mathcal{E};\ \theta_p(B) = 0\}, \qquad p \in \mathcal{E},$$

некоторое поле подпространств H. Мы будем обозначать это поле символом $\operatorname{Ann}\theta$ и будем называть его *аннулятором формы* θ.

Легко видеть, что *аннулятор H каждой фундаментальной формы θ является полем горизонтальных подпространств.* Действительно, пусть $\theta^1, \ldots, \theta^n$ — координаты формы θ в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$. Из формулы (1) непосредственно следует, что для любых чисел $c_1, \ldots, c_n$ значение формы $c_i\theta^i$ на векторном поле $A^\#$ равно $c(A)$, где c — ковектор на линейном пространстве $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, имеющий в базисе $e_1, \ldots, e_n$ коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$. Поэтому, если в некоторой точке $p \in \mathcal{E}$ имеет место равенство $c_i\theta^i_p = 0$, то $c(A) = 0$ для любого вектора $A \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ и, значит, $c = 0$, т. е. $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$. Это показывает, что *во всех точках $p \in \mathcal{E}$ формы $\theta^1, \ldots, \theta^n$ линейно независимы.* Поскольку, очевидно, $\operatorname{Ann}\theta = \operatorname{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n)$, этим доказано, что для любой точки $p \in \mathcal{E}$

$$\dim H_p = m.$$

С другой стороны, если B — произвольный вертикальный вектор в некоторой точке $p \in \mathcal{E}$, то согласно той же формуле (1)

$$\theta_p(B) = A,$$

где A — такой вектор из $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, что $A^\#_p = B$. Поэтому, если

$B \in \boldsymbol{H}_p$, то $A=0$ и, значит, $B=0$. Таким образом,

$$\mathbf{T}_p \mathscr{F}_b \cap \boldsymbol{H}_p = 0$$

и, значит, $\mathbf{T}_p \mathscr{E} = \mathbf{T}_p \mathscr{F}_b \oplus \boldsymbol{H}_p$ (поскольку $\dim \boldsymbol{H}_p = m = \dim \mathbf{T}_p \mathscr{E} - \dim \mathbf{T}_p \mathscr{F}_b$). Следовательно, поле $\boldsymbol{H}$ является полем горизонтальных подпространств.

Обратно, *любое поле $\boldsymbol{H}$ горизонтальных подпространств является аннулятором единственной фундаментальной $\mathfrak{g}$-значной формы* θ. Действительно, если $\boldsymbol{H} = \operatorname{Ann} \theta$ и форма θ фундаментальна, то в каждой точке $p \in \mathscr{E}$ для любого вектора $B \in \mathbf{T}_p \mathscr{E}$ будет иметь место равенство

$$\theta_p(B) = A, \tag{3}$$

где A — такой вектор из $\mathbf{T}_e \mathscr{G}$, что $A_p^\# = B^V$. Это доказывает единственность формы θ. Для доказательства существования мы определим форму θ на $\mathscr{E}$ формулой (3). Так как $(A_p^\#)^V = A_p^\#$ для любого $A \in \mathbf{T}_e \mathscr{G}$, то эта форма фундаментальна. Кроме того, $\theta_p(B) = 0$ тогда и только тогда, когда $B^V = 0$, т. е. когда $B \in \boldsymbol{H}_p$. Следовательно, $\boldsymbol{H} = \operatorname{Ann} \theta$. □

Так как действие группы $\mathscr{G}$ на многообразии $\mathscr{E}$ гладко, то для любого элемента $a \in \mathscr{G}$ отображение

$$R_a\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}, \quad p \to pa, \qquad p \in \mathscr{E},$$

является диффеоморфизмом.

По аналогии со случаем расслоения реперов мы будем говорить, что заданное на $\mathscr{E}$ поле $\boldsymbol{H}$ горизонтальных подпространств *эквивариантно*, если

$$(dR_a)_p \boldsymbol{H}_p = \boldsymbol{H}_{pa} \tag{4}$$

для любой точки $p \in \mathscr{E}$ и любого элемента $a \in \mathscr{G}$ (ср. формулу (8) лекции 14). Гладкое эквивариантное поле горизонтальных подпространств мы по-прежнему будем называть *связностью*. (Ср. определение 1 лекции 14.)

Задача 1. Покажите, что поле $\boldsymbol{H}$ горизонтальных подпространств тогда и только тогда эквивариантно (является связностью), когда для любого вектора $B \in \mathbf{T}_p \mathscr{E}$ и любого элемента $a \in \mathscr{G}$ имеет место одно из равенств

$$[(dR_a)_p B]^V = (dR_a)_p B^V, \quad [(dR_a)_p B]^H = (dR_a)_p B^H$$

(а значит, и оба).

Напомним (см. лекцию 14), что каждый элемент a группы Ли $\mathscr{G}$ определяет линейное отображение

$$\operatorname{Ad} a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g} = \mathbf{T}_e \mathscr{G}$$

являющееся не чем иным, как дифференциалом в точке e внутреннего автоморфизма

$$\mathrm{int}_a\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G},\quad x\mapsto axa^{-1},\qquad x\in\mathcal{G}.$$

Пример 2. Для любой матрицы $X\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ автоморфизм $\mathrm{int}_X\colon A\mapsto XAX^{-1}$ линеен по A. Поэтому его дифференциал совпадает с ним самим. Значит,

$$(\mathrm{Ad}\,X)\,C=XCX^{-1}$$

для каждой матрицы C из $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})=\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$.

Дифференциальная $\mathfrak{g}$-значная линейная форма θ на $\mathcal{E}$ называется *эквивариантной*, если

$$R_a^*\theta=(\mathrm{Ad}\,a^{-1})\,\theta,$$

для любого элемента $a\in\mathcal{G}$, т. е. если в каждой точке $p\in\mathcal{E}$ для любого вектора $B\in\mathrm{T}_p\mathcal{E}$ имеет место равенство

$$\theta_{pa}((dR_a)_pB)=(\mathrm{Ad}\,a^{-1})(\theta_p(B)).$$

Пример 3. В точке p с координатами $(C,\boldsymbol{x})$ форма (2) принимает на векторе $B=(A,\boldsymbol{u})$ значение $C^{-1}A+G_ku^k$, где $G_k=G_k(C,\boldsymbol{x})$. Поэтому для любой матрицы $X\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ матрица $(\mathrm{Ad}\,X^{-1})(\theta_p(B))$ равна $X^{-1}(C^{-1}A+G_k((A,\boldsymbol{x})\,u^k))\,X$ (см. выше пример 2). С другой стороны, $(dR_X)_pB=(AX,\boldsymbol{u})$ (см. задачу 4 лекции 10) и, значит,

$$\theta_{pX}((dR_X)_pB)=(CX)^{-1}AX+G_k(CX,\boldsymbol{x})\,u^k$$

(напомним, что точка pX имеет координаты $(CX,\boldsymbol{x})$). Следовательно, форма (2) эквивариантна тогда и только тогда, когда

$$X^{-1}C^{-1}AX+X^{-1}G_k(C,\boldsymbol{x})\,Xu^k=X^{-1}C^{-1}AX+G_k(CX,\boldsymbol{x})\,u^k,$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$X^{-1}G_k(C,\boldsymbol{x})\,X=G_k(CX,\boldsymbol{x}),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,$$

для всех матриц X, $C\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ (и любого $\boldsymbol{x}$). Но легко видеть (докажите!), что матрицы G_k тогда и только тогда удовлетворяют этому условию, когда

$$G_k(C,\boldsymbol{x})=C^{-1}\Gamma_kC,\qquad 1\leqslant k\leqslant m,$$

где $\Gamma_k=\Gamma_k(\boldsymbol{x})$ — матрицы, зависящие только от $\boldsymbol{x}$ (т. е. состоящие из функций на координатной окрестности $U\subset\mathcal{B}$). Этим доказано, что *эквивариантные фундаментальные формы на расслоении реперов на каждой координатной окрест-*

ности $\mathscr{E}_U$ *имеют вид*

$$\theta = C^{-1}dC + C^{-1}\omega C,$$

где $\omega = \Gamma_k dx^k$ — некоторая матрица линейных форм на U.

Заметим, что это — в точности формы (12) лекции 16, задающие связности на расслоении реперов. Это не является случайным совпадением, поскольку, как нетрудно показать, *аннулятор* $H = \operatorname{Ann}\theta$ *фундаментальной формы* θ *тогда и только тогда эквивариантен* (*является связностью*), *когда форма* θ *эквивариантна*. Действительно, если аннулятор H эквивариантен, то для любого вектора $B \in \mathbf{T}_p\mathscr{E}$ и любого элемента $a \in \mathscr{G}$ будет иметь место равенство

$$[(dR_a)_p B]^V = (dR_a)_p B^V$$

(см. выше задачу 1). С другой стороны, по определению

$$\theta_{pa}((dR_a)_p B) = \hat{A},$$

где $\hat{A}$ — такой вектор из $\mathbf{T}_e\mathscr{G}$, что $\hat{A}^{\#}_{pa} = [(dR_a)_p B]^V$. Следовательно,

$$\hat{A}^{\#}_{pa} = (dR_a)_p B^V = (dR_a)_p A^{\#}_p,$$

где A — такой вектор из $\mathbf{T}_e\mathscr{G}$, что $A^{\#}_p = B^V$.

Задача 2. Докажите, что если

$$\hat{A}^{\#}_{pa} = (dR_a)_p A^{\#}_p,$$

то $\hat{A} = (\operatorname{Ad} a^{-1}) A$. [Указание. По определению, $(dj_p)_e \hat{A} = \hat{A}^{\#}_p$, где $j_p\colon x \mapsto px$, $x \in \mathscr{G}$. Поэтому $(dj_{pa})_e \hat{A} = \hat{A}^{\#}_{pa} = (dR_a)_p \hat{A}^{\#}_p = (dR_a)_p (dj_p)_e A$, т. е. $(dj_{pa})_e \hat{A} = d(R_a \circ j_p)_e A$. С другой стороны, $j_{pa} \circ \operatorname{int}_{a^{-1}} = R_a \circ j_p$.]

Поскольку $\theta_p(B) = A$, отсюда следует, что

$$\theta_{pa}((dR_a)_p B) = (\operatorname{Ad} a^{-1})(\theta_p(B)),$$

т. е. что форма θ эквивариантна.

Обратно, если форма θ эквивариантна и $\theta_p(B) = 0$, то

$$\theta_{pa}((dR_a)_p B) = (\operatorname{Ad} a^{-1})(\theta_p(B)) = 0,$$

и, значит, $(dR_a)_p B \in H_{pa}$. Это доказывает, что $(dR_a)_p H_p \subset H_{pa}$. Заменив здесь p на pa, а a — на a^{-1}, мы получим и обратное включение. Следовательно, поле H эквивариантно. □

Резюмируя, мы видим, что нами доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Связности H на главном $\mathcal{G}$-расслоении ξ находятся в естественном биективном соответствии с $\mathfrak{g}$-значными эквивариантными фундаментальными формами θ на многообразии $\mathcal{E}$. При этом форме θ отвечает связность $H = \operatorname{Ann}\theta$, а связности H — форма* (3). □

Определение 2. Форма θ называется *формой связности H.*

Иногда связностью называют не поле H, а форму θ.

Таким образом, на гладких главных расслоениях связности можно определять и как поля горизонтальных подпространств, и как $\mathfrak{g}$-значные линейные дифференциальные формы.

Возможны и другие подходы к определению связности. Например, каждая связность H на гладком главном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ определяет в линейном пространстве $\mathfrak{a}\mathcal{E}$ всех гладких векторных полей на $\mathcal{E}$ линейный оператор

$$H\colon \mathfrak{a}\mathcal{E} \to \mathfrak{a}\mathcal{E}, \quad X \mapsto X^H,$$

сопоставляющий векторному полю $X \in \mathfrak{a}\mathcal{E}$ его горизонтальную составляющую X^H. Этот оператор

а) является проектором (т. е.

$$H^2 = H);$$

б) перестановочен со всеми операторами вида R_a^* (т. е.

$$R_a^* \circ H = H \circ R_a^*);$$

в) аннулирует все вертикальные векторные поля: если поле X вертикально, то $HX = 0$.

Задача 3. Покажите, что *любой оператор H, обладающий свойствами* а, б, в, *порождается единственной связностью.*

Таким образом, связности на ξ можно отождествлять с такого рода операторами.

Аналогичное построение возможно, конечно, и для связности на векторном расслоении ξ, нужно лишь заменить условие б требованием, чтобы оператор H линейно зависел (в понятном смысле) от координат по слою.

Векторное поле $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{E}$, для которого $Y^H = Y$, т. е. такое, что $Y_p \in H_p$ для любой точки $p \in \mathcal{E}$, называется *горизонтальным*. Все горизонтальные поля образуют подпространство $\operatorname{Im} H$ линеала $\mathfrak{a}\mathcal{E}$.

Так как на подпространстве H_p отображение

$$(d\pi)_p\colon \mathsf{T}_p\mathscr{E} \to \mathsf{T}_b\mathscr{B}, \qquad b = \pi(p),$$

является изоморфизмом, то на многообразии $\mathscr{E}$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ существует такое горизонтальное векторное поле $\tilde{X}$, что

$$(d\pi)_p\tilde{X}_p = X_{\pi(p)} \quad \text{для любой точки } p \in \mathscr{E}.$$

Поле $\tilde{X}$ называется *горизонтальным поднятием* поля X.

Задача 4. Докажите, что *для гладкого поля X поле $\tilde{X}$ также гладко.* [Указание. Постройте гладкое поле $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$, для которого $(d\pi)_p(Y_p) = X_{\pi(p)}$ в любой точке $p \in \mathscr{E}$, и затем примените оператор H.]

Таким образом, соответствие $X \mapsto \tilde{X}$ является (очевидно, мономорфным и линейным) отображением $\mathfrak{a}\mathscr{B} \to \mathfrak{a}\mathscr{E}$, вкладывающим $\mathfrak{a}\mathscr{B}$ в $\operatorname{Im} H$.

Задача 5. Докажите, что *горизонтальное поле $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$ тогда и только тогда является горизонтальным поднятием $\tilde{X}$ некоторого поля $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$, когда для любого элемента $a \in \mathscr{G}$ имеет место равенство*

$$R_a^* Y = Y.$$

Задача 6. Докажите, что *для любого горизонтального вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathscr{E}$ существует такое поле $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$, что*

$$\tilde{X}_p = A.$$

Задача 7. Докажите, что

$$\widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^H$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$.

Предложение 2. *Для любого элемента $A \in \mathfrak{g}$ и любого горизонтального поля $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$ поле $[A^\#, Y]$ горизонтально. Если $Y = \tilde{X}$, то $[A^\#, Y] = 0$.*

Доказательство. Согласно формуле (21) лекции 16

$$[A^\#, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{R^*_{\exp tA} Y - Y}{t}.$$

Но ясно, что если поле Y горизонтально, то для любого элемента $a \in \mathscr{G}$ поле $R_a^* Y$ также горизонтальио. Поэтому поле $R^*_{\exp tA} Y - Y$ горизонтально. Следовательно, горизонтально и поле $[A^\#, Y]$.

Если же $Y=\tilde{X}$, то $Y=R^*_{\exp tA}Y$, и значит, $[A^\#, Y]=0$. □

Описанный в предложении 2 лекции 16 переход от связностей на расслоении реперов к связностям на соответствующем векторном расслоении может быть осуществлен и в общем случае.

Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — произвольное гладкое главное расслоение, $\mathscr{G}$ — его структурная группа Ли и $\mathscr{F}$ — гладкое многообразие, на котором гладко действует группа $\mathscr{G}$. Тогда определено (см. лекцию 1) ассоциированное расслоение $\xi[\mathscr{F}]$ со слоем $\mathscr{F}$. По построению, точками тотального пространства $\mathscr{E}$ этого расслоения являются орбиты $[p, x]_{\mathscr{G}}$ естественного действия группы $\mathscr{G}$ на прямом произведении $\mathscr{E}\times\mathscr{F}$.

Задача 8. Докажите, что *расслоение $\xi[\mathscr{F}]$ гладко и локально тривиально как гладкое расслоение* (обладает тривиализирующим атласом, состоящим из тривиализаций, являющихся диффеоморфизмами). Докажите также, что *естественное отображение факторизации $\mathscr{E}\times\mathscr{F}\to\mathscr{E}$ гладко.*

Поэтому для расслоения $\xi[\mathscr{F}]$ можно говорить о вертикальных векторах и полях горизонтальных подпространств.

Произвольной точке $y\in\mathscr{F}$ мы отнесем — очевидно, гладкое — отображение

(5) $$f_y\colon \mathscr{E}\to\mathscr{E},$$

определенное формулой

$$f_y(p)=[p, y]_{\mathscr{G}}, \qquad p\in\mathscr{E}.$$

Задача 9. Докажите, что *равенство*

$$f_y(p)=f_z(q), \qquad p, q\in\mathscr{E},\ y, z\in\mathscr{F},$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a\in\mathscr{G}$, что $q=pa$ и $y=az$.

Выведите отсюда, что *для любой связности H на ξ формула*

(6) $$H_p=(df_y)_p H_p, \qquad p=f_y(p),\ p\in\mathscr{E},\ y\in\mathscr{F},$$

корректно определяет на $\mathscr{E}$ некоторое поле $H\colon p\mapsto H_p$ горизонтальных подпространств. [Ср. доказательство предложения 2 лекции 16.]

Поля вида (6) называются *связностями на* $\xi[\mathscr{F}]$. Для случая $\mathscr{G}=\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ и $\mathscr{F}=\mathbb{R}^n$ это определение согласуется (см. предложение 2 лекции 16) с исходным определением 3 лекции 10 связностей на векторных расслоениях.

Конечно, поля вида (6) хочется охарактеризовать в терминах самого расслоения $\xi[\mathcal{F}]$ без обращения к главному расслоению ξ, подобно тому как это мы сделали для связностей на векторных расслоениях в лекции 10. Это можно сделать, если воспользоваться $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-структурой на $\xi[\mathcal{F}]$ (см. лекцию 9). Осуществление этой возможности мы оставим иницнативе читателя.

Важный частный случай возникает, когда типичный слой $\mathcal{F}$ является линейным пространством $\mathcal{V}^o$, а группа $\mathcal{G}$ линейно действует на $\mathcal{V}^o$, т. е. когда мы имеем дело с *линейным представлением*

$$\alpha\colon \mathcal{G} \to \operatorname{Aut}\mathcal{V}^o$$

группы $\mathcal{G}$ в группе $\operatorname{Aut}\mathcal{V}^o$ линейных автоморфизмов пространства $\mathcal{V}^o$.

Задача 10 (ср. задачу 3 лекции 1). Докажите, что *в этом случае ассоциированное расслоение $\xi[\mathcal{V}^o]$ является векторным расслоением.* Это расслоение обозначается символом $\xi[\alpha]$ (а его тотальное пространство $\mathcal{E}\times_{\mathcal{G}}\mathcal{V}^o$ — символом $\mathcal{E}\times_{\alpha}\mathcal{V}^o$).

В случае, когда $\mathcal{G}=\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, а расслоение ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ, расслоение $\xi[\alpha]$ обозначается символом $\xi[\alpha]$.

Конечно, если $\alpha=\mathrm{id}$, то $\xi[\alpha]=\xi$.

Задача 11. Пусть представление

$$\alpha\colon \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \tag{7}$$

определено формулой

$$\alpha(A)=(A^{\top})^{-1}, \qquad A\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}).$$

Покажите, что *для любого векторного расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi[\alpha]$ изоморфно расслоению ξ^** (где ξ^* — см. задачу 11 лекции 12 — векторное расслоение со слоями $(\mathcal{F}_b^{\xi})^*$, $b\in\mathcal{B}$). [Указание. Изоморфизм $\xi[\alpha]\to\xi^*$ ставит в соответствие точке $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{y}]$ пространства $\mathcal{E}\times_{\alpha}\mathbb{R}^n$, где $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathcal{E}$ и $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ (обратите внимание на положение индексов!), точку $q=y_ip^i$ пространства $\mathcal{E}^*=\mathcal{E}^{\xi^*}$, где $p^1,\ldots,p^n$ — базис линеала $(\mathcal{F}_b^{\xi})^*=\mathcal{F}_b^{\xi^*}$, сопряженный базису $p_1,\ldots,p_n$ линеала $\mathcal{F}_b^{\xi}$.]

Задача 12. (Обобщение задачи 11.) Пусть $T^r_s\mathcal{V}$ — линейное пространство тензоров типа (r, s) над линеалом $\mathcal{V}$ (полилинейных функционалов от r векторов и s ковекторов; см. лекцию II.6). Выбрав в $\mathcal{V}$ базис, рассмотрим представление

$$\alpha\colon \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T^r_s\mathcal{V}),$$

ставящее в соответствие матрице $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ линейный оператор $\alpha(A)\colon T^r_s\mathcal{V} \longrightarrow T^r_s\mathcal{V}$, определенный формулой

$$(\alpha(A)S)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = \\ = S(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r, (\boldsymbol{A}^*)^{-1}\xi^1, \ldots, (\boldsymbol{A}^*)^{-1}\xi^s),$$

где $\boldsymbol{A}$ — оператор $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ с матрицей A. Покажите, что *для любого векторного расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi[\alpha]$ изоморфно расслоению $T^r_s\xi$* (см. пример 8 лекции 13).

Предположим теперь, что на векторном расслоении ξ задана связность H. На главном расслоении реперов $\boldsymbol{\xi}$ этой связности отвечает связность $\boldsymbol{H}$, а последней — некоторая связность $\boldsymbol{H}[\alpha]$ на расслоении $\boldsymbol{\xi}[\alpha] = \xi[\alpha]$.

Вычислим связность $\boldsymbol{H}[\alpha]$ для случая, когда α представляет собой представление (7), и, значит, $\xi[\alpha]$ является расслоением ξ^*.

Каждому базису $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ модуля $\Gamma(\xi|_U)$ над тривиализирующей расслоение ξ координатной окрестностью U отвечает *сопряженный базис* $\boldsymbol{c} = (c^1, \ldots, c^n)$ модуля $\Gamma(\xi^*|_U)$, обладающий тем свойством, что в любой точке $b \in U$ ковекторы $c^1(b), \ldots, c^n(b)$ составляют базис линеала $\mathcal{F}^*_b$, сопряженный базису $\boldsymbol{s}(b) = (s_1(b), \ldots, s_n(b))$ линеала $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}^*_b$. (Контрольный вопрос: почему сечения $c^1, \ldots, c^n$ расслоения $\xi^*|_U$ гладки?) Базис $\boldsymbol{s}$ (вместе с координатным отображением $U \longrightarrow \mathbb{R}^m$) определяет на множестве $\mathcal{E}_U = \cup \mathcal{F}_b$, $b \in U$, координаты a^i, x^k, где x^k — координаты в U точки $b = \pi(p)$, $p \in \mathcal{E}_U$, а a^i — координаты вектора $p \in \mathcal{F}_b$ в базисе $\boldsymbol{s}(b)$. В свою очередь базис $\boldsymbol{c}$ определяет на множестве $\mathcal{E}^*_U = \cup \mathcal{F}^*_b$, $b \in U$, координаты a_i, x^k, где x^k — координаты в U точки $b = \pi(q)$, $q \in \mathcal{E}^*_U$, а a_i — координаты ковектора $q \in \mathcal{F}^*_b$ в базисе $\boldsymbol{c}(b)$. Мы вычислим коэффициенты связности $H^* = H[\alpha]$ в координатах a_i, x^k по коэффициентам Γ^i_{kj} связности H в координатах a^i, x^k.

По определению $H = \mathrm{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ над U, где

$$\theta^i = da^i + \Gamma^i_{kj}a^j dx^k.$$

Аналогично $H^* = \mathrm{Ann}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ над U, где

$$\theta_i = da_i + C^j_{ki}a_j dx^k, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

и задача состоит в том, чтобы выразить функции C^j_{ki} через функции Γ^i_{kj}.

Согласно введенным в лекции 16 обозначениям каждая точка $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$ пространства $\mathcal{E}$ записывается в виде пары $(A, \boldsymbol{x})$, где A—матрица $\|a_i^j\|$, состоящая из координат векторов $p_i \in \mathcal{F}_b$, $b=\pi(\boldsymbol{p})$, в базисе $\boldsymbol{s}(b)$ (так что $p_i=a_i^j s_j(b)$ для любого $i=1, \ldots, n$), а $\boldsymbol{x}$—строка $(x^1, \ldots, x^n)$ координат точки b. В частности, точка $\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{s}(b)$ будет иметь вид $(E, \boldsymbol{x})$, где E—единичная матрица.

Аналогично символом $(C, \boldsymbol{u})$, где $C=\|c_j^i\|$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и $\boldsymbol{u}=(u^1, \ldots, u^n)$ мы обозначаем вектор

$$c_j^i\left(\frac{\partial}{\partial a_j^i}\right)_p + u^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p$$

пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{E}$. При этом согласно произведенным в лекции 16 вычислениям (см., в частности, формулы (5) и (10) лекции 16) вектор $(C, \boldsymbol{u}) \in \mathsf{T}_p\mathcal{E}$ тогда и только тогда будет принадлежать пространству H_p, $\boldsymbol{p}=(A, \boldsymbol{x})$, когда

$$C=-u^k F_k, \qquad \text{где } F_k=\|\Gamma_{sk}^i a_j^s\|.$$

В частности, векторы $(-F_1, e_1), \ldots, (-F_m, e_m)$ составляют базис пространства H_p.

При $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0$ мы получаем отсюда, что *векторы*

(9) $$(-\Gamma_1, e_1), \ \ldots, (-\Gamma_m, e_m), \quad \textit{где } \Gamma_k=\|\Gamma_{kj}^i\|,$$

составляют базис пространства H_{p_0}.

Отображение (5) является в рассматриваемом случае— в силу указанного в задаче 7 отождествления—отображением

$$f_y\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*, \quad \boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

и задается формулой

$$f_y(\boldsymbol{p})=y_i p^i,$$

где p^i, $1 \leqslant i \leqslant n$,—базис пространства $\mathcal{F}_b^*$, сопряженный базису $\boldsymbol{p}$ пространства $\mathcal{F}_b$. В частности, отсюда следует, что *точка* $f_a(\boldsymbol{p}_0)$, $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$, *имеет координаты* a_i, x^k (где, как всегда, x^k—координаты точки $b=\pi(\boldsymbol{p}_0)$).

Для каждой точки $\boldsymbol{p} \in \mathcal{E}_U$ дифференциал $(df_y)_p$ отображения f_y в точке $\boldsymbol{p}$ представляет собой линейное отображение $\mathsf{T}_p\mathcal{E} \to \mathsf{T}_q\mathcal{E}^*$, где $q=f_y(\boldsymbol{p})=y_i p^i$. Условимся обозначать вектор

$$c_i\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right)_q + u^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_q$$

пространства $\mathbf{T}_q\mathscr{E}^*$ символом $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{c}=(c_1, \ldots, c_n)$, $\boldsymbol{u}=(u^1, \ldots, u^n)$.

Задача 13. Докажите (ср. задачу 5 лекции 14), что при $\boldsymbol{p}=(A, \boldsymbol{x})$

$$(df_y)_{\boldsymbol{p}}(C, \boldsymbol{u})=(-\boldsymbol{y}A^{-1}CA^{-1}, \boldsymbol{u})$$

для любого вектора $(C, \boldsymbol{u})\in \mathbf{T}_p\mathscr{E}$. [Указание. Как известно, $dA^{-1}=-A^{-1}dAA^{-1}$.]

При $\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}$, когда $A=E$, отсюда следует, что векторы базиса (9) пространства $H_{\boldsymbol{p}_0}$ отображение $(df_a)_{\boldsymbol{p}_0}$ переводит в векторы

$$(\boldsymbol{a}\Gamma_1, e_1), \ldots, (\boldsymbol{a}\Gamma_m, e_m). \tag{10}$$

Этнм доказано, что *для точки* $q\in\mathscr{E}^*_U$ *с координатами* a_i, x^k *векторы* (10), *где* $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ *и* $\Gamma_k=\|\Gamma^j_{kl}\|$, $1\leqslant k\leqslant m$, *составляют базис пространства* H^*_q.

Поскольку формы (8) принимают на векторах (10) значения $a_j\Gamma^j_{kl}+C^j_{kl}a_j$ и поскольку эти значения должны быть равны ∇ нулю, мы получаем отсюда, что $C^j_{kl}=-\Gamma^j_{kl}$, т. е. что

$$\theta_i=da_i-\Gamma^j_{ki}a_j, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Это доказывает, что *связность* H^* *совпадает со связностью на* ξ^*, *отвечающей ковариантному дифференцированию* ∇ *из предложения* 1 *лекции* 12.

Задача 14. Покажите, что аналогично, связности, отвечающие ковариантным дифференцированиям из предложения 2 лекции 12, являются не чем иным, как связностями $H[\alpha]$ для представления α из задачи 12. (См. замечание 3 лекции 12.)

Таким образом, оба подхода к связностям на $T^r_s\xi$ приводят к одному и тому же результату.