Лекция 18

Параллельный перенос вдоль кривой.— Группа голономии и ее компонента единицы.— Лемма о разложении гомотопных нулю петель в произведение малых лассо.— Доказательство связности суженной группы голономии.— Изоморфизм групп голономии в различных точках.— Счетность фундаментальной группы.— Теорема редукции.— Доказательство существования связности и универсально тривиализирующих покрытий.— Аффинное пространство связностей.

Рассмотрим более систематически введенные в лекции 11 горизонтальные кривые.

Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ — гладкое векторное расслоение ранга n над гладким хаусдорфовым m-мерным многообразием $\mathscr{B}$ и пусть H — произвольная связность в ξ. Пусть, далее, $u\colon I \to \mathscr{B}$ — гладкая кривая в $\mathscr{B}$, начинающаяся в точке $b_0 \in \mathscr{B}$, а p_0 — такая точка многообразия $\mathscr{E}$, что $\pi(p_0)=b_0$. Тогда, как было показано в лекции 10, в $\mathscr{E}$ существует единственная горизонтальная кривая $v\colon I \to \mathscr{B}$, накрывающая кривую u и начинающаяся в точке p_0. Конец p_1 кривой v принадлежит слою $\mathscr{F}_{b_1}$ над концом b_1 кривой u, и соответствие $p_0 \mapsto p_1$ задает отображение

$$\Pi_u\colon \mathscr{F}_{b_0} \rightleftarrows \mathscr{F}_{b_1}, \tag{1}$$

зависящее только от кривой u.

Определение 1. Отображение (1) называется *параллельным переносом* слоя $\mathscr{F}_{b_0}$ на слой $\mathscr{F}_{b_1}$ вдоль кривой u. В соответствии с этим о векторе $p_1=\Pi_u p_0$ линеала $\mathscr{F}_{b_1}$ иногда говорят, что он *параллелен вектору p_0 вдоль кривой u.*

Заметим, что согласно этому определению вектор $v(t)\in\mathscr{F}_{u(t)}$ параллелен вектору p_0 для любого $t\in I$. Это объясняет, почему кривую v называют также полем параллельных векторов на кривой u (см. лекцию 10).

Замечание 1. В контексте произвольных векторных расслоений термин «параллельный перенос», безусловно, мало оправдан. Гораздо лучше было бы называть отображение Π_u, скажем, *горизонтальным переносом.* Быть может, с течением времени терминология здесь усовершенствуется, но пока приходится пользоваться тем, что есть.

Пусть отрезок $I=[a, b]$ разбит на два отрезка: $I_1=[a, c]$ и $I_2=[c, b]$. Тогда для любой (не обязательно гладкой) кривой $u\colon I\to\mathcal{B}$ определены кривые $u_1=u|_{I_1}$ и $u_2=u|_{I_2}$. Мы будем говорить, что кривая u *составлена* из кривых u_1 и u_2, и будем писать $u=u_1u_2$. (Это специальный случай отношения составленности для обобщенных путей; см. лекцию 3.)

Аналогичный смысл имеет равенство $u=u_1\ldots u_m$ при $m>2$.

Ясно, что если гладкая кривая u составлена из кривых u_1 и u_2 (автоматически гладких), то

$$\Pi_u=\Pi_{u_2}\circ\Pi_{u_1},\qquad u=u_1u_2 \tag{2}$$

(и аналогично для любого числа сомножителей).

Если $u=u_1\ldots u_m$ и кривые $u_1, \ldots, u_m$ гладки, то кривая u называется *кусочно гладкой* (ср. определение кусочно гладкого пути в лекции 2). Для такой кривой u мы положим по определению

$$\Pi_u=\Pi_{u_m}\circ\ldots\circ\Pi_{u_1},\qquad u=u_1\ldots u_m. \tag{3}$$

Задача 1. Докажите, что *определение* (3) *корректно*, т. е. отображение Π_u не зависит от разложения $u=u_1\ldots$ $\ldots u_m$ кривой u на гладкие кривые $u_1, \ldots, u_m$. [Указание. Формула (3) справедлива для гладкой кривой u.]

Задача 2. Покажите, что формула (2) справедлива и для кусочно гладких кривых u_1 и u_2 (а формула (3) — для кусочно гладких кривых $u_1, \ldots, u_m$).

[Хотя нам фактически нужны лишь гладкие кривые, но введение в рассмотрение более широкого класса кусочно гладких кривых существенно упрощает многие рассуждения, позволяя избежать утомительной и надоедливой процедуры сглаживания углов.]

О кривой $u\colon I\to\mathcal{B}$ мы будем говорить, что она *содержится в карте* $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^m)$, если $u(t)\in U$ для любого $t\in I$. Такая кривая задается уравнениями вида

$$x^k=x^k(t),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,\quad t\in I,$$

а ее накрытие $v\colon I\to\mathcal{E}$ в предположении, что U является не только координатной, но тривиализирующей окрестностью,—кроме того, еще и уравнениями

$$a^i=a^i(t),\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\quad t\in I. \tag{4}$$

При этом, если кривая u (а, значит, и кривая v) гладка, то кривая v тогда и только тогда горизонтальна, когда

$$\dot a^i(t)+\Gamma^i_{jk}(x(t))\,a^j(t)\,\dot x^k(t)=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\quad t\in I \tag{5}$$

(см. формулы (3) лекции 10).

Поскольку уравнения (5) линейны по $a^i(t)$, концевая точка (вектор) $p_1 \in \mathcal{F}_{b_1}$ пути v (имеющая в слое $\mathcal{F}_{b_1}$ координаты $a^i(1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$) линейно зависит от его начальной точки (вектора) $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$. Это означает, что *параллельный перенос* Π_u *является линейным отображением* $\mathcal{F}_{b_0} \to \mathcal{F}_{b_1}$.

Если $\varphi\colon I' \to I$ — монотонная гладкая функция со всюду отличной от нуля положительной производной (сохраняющий ориентацию диффеоморфизм), то для любой горизонтальной кривой $v\colon I \to \mathcal{E}$ с уравнениями (5) перепараметризованная кривая $v \circ \varphi\colon I' \to \mathcal{E}$ будет иметь уравнения $a^i = a^i(\varphi(s))$, $x^k = x^k(\varphi(s))$, $s \in I'$, где

$$a^i(\varphi(s))^{\bullet} + \Gamma^i_{jk}(\boldsymbol{x}(\varphi(s)))\, a^j(\varphi(s))\, x^k(\varphi(s))^{\bullet} =$$
$$= \dot{\varphi}(s)\left[\dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{jk}(\boldsymbol{x}(t))\, a^j(t)\, \dot{x}^k(t)\right]_{t=\varphi(s)} = 0,$$

и, значит, будет горизонтальной кривой, накрывающей перепараметризованную кривую $u \circ \varphi\colon I \to \mathcal{B}$. Отсюда следует, что *отображение* Π_u *не меняется при перепараметризации кривой* $u\colon I \to \mathcal{B}$.

Поэтому без ограничения общности мы всегда можем предполагать, например, что $I = \boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I} = [0, 1]$ (т. е. что кривая u является путем).

Если же диффеоморфизм φ меняет ориентацию (переводит начало отрезка I' в конец отрезка I, а конец отрезка I' в начало отрезка I), то кривая $v \circ \varphi$ по-прежнему будет горизонтальной кривой, накрывающей кривую $u \circ \varphi$, но последняя кривая будет соединять точку b_1 с точкой b_0 (а кривая $v \circ \varphi$ — точку p_1 с точкой p_0). Поэтому *отображение* Π_u *является изоморфизмом* (с обратным изоморфизмом $\Pi_{u \circ \varphi}$).

Так как отрезок I компактен, то любая кусочно гладкая кривая u имеет вид $u_1 \ldots u_m$, где каждая из кривых $u_1, \ldots, u_m$ гладка и содержится в некоторой карте. Поэтому в силу равенства (3) *отображение* Π_u *является изоморфизмом* $\mathcal{F}_{b_0} \to \mathcal{F}_{b_1}$ *и для любой кусочно гладкой кривой* u.

Кроме того, мы видим, что *для каждой кусочно гладкой кривой* u *имеет место формула*

$$\Pi_{u^{-1}} = \Pi_u^{-1},$$

где, как всегда, u^{-1} *— кривая, пробегаемая в обратном направлении.*

Особо интересен случай, когда кусочно гладкая кривая u является *петлей* в точке b_0, т. е. когда $b_1 = b_0$. В этом случае отображение Π_u является автоморфизмом линейного пространства $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$ (невырожденным линейным оператором) и все автоморфизмы вида Π_u составляют некоторую подгруппу $\Phi = \Phi(b_0)$ группы $\operatorname{Aut}\mathcal{F}_0$ (т. е. — в предположении, что в $\mathcal{F}_0$ выбран некоторый базис — подгруппу группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$).

Заметим, что $\Pi_u p_0 = p_0$ *тогда и только тогда, когда горизонтальная кривая v, начинающаяся в точке p_0 и накрывающая петлю u, также является петлей.*

Определение 2. Подгруппа Φ группы Ли $\operatorname{Aut}\mathcal{F}_0$ (или $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$) называется *группой голономии* связности H в точке b_0.

Конечно, эта группа зависит только от содержащей точку b_0 компоненты связности многообразия $\mathcal{B}$. Поэтому без ограничения общности мы можем в дальнейшем считать многообразие $\mathcal{B}$ связным.

Напомним (см. определение 1 лекции 3), что две петли $u_0\colon I \to \mathcal{B}$ и $u_1\colon I \to \mathcal{B}$ в точке b_0 называются *гомотопными*, если существует связывающая их *гомотопия*, т. е. такое непрерывное отображение $F\colon I^2 \to \mathcal{B}$, что

$$F(t, 0) = u_0(t), \quad F(t, 1) = u_1(t)$$

и

$$F(0, \tau) = F(1, \tau) = b_0$$

для всех $t, \tau \in I$.

Для любого $\tau \in I$ формула

$$u_\tau(t) = F(t, \tau), \qquad t \in I,$$

определяет некоторую петлю $u_\tau\colon I \to \mathcal{B}$. О петлях u_τ, $\tau \in I$, говорят, что они *составляют* гомотопию F, и их семейство $\{u_\tau\}$ часто отождествляется с F.

Как мы знаем из лекции 3, отношение гомотопности петель является отношением эквивалентности.

Гомотопия F называется *гладкой*, если она представляет собой гладкое отображение $I^2 \to \mathcal{B}$, и *кусочно гладкой*, если квадрат I^2 можно разбить на прямоугольники вида $I' \times I''$, где $I' \subset I$, $I'' \subset I$, на каждом из которых отображение F гладко. Петли, связанные гладкой (или кусочно гладкой) гомотопией, называются *гладко гомотопными* (соответственно *кусочно гладко гомотопными*).

Задача 3. Докажите, что *если гладкие* (*кусочно гладкие*) *петли u_0 и u_1 гомотопны, то они и гладко* (*кусочно гладко*) *гомотопны.*

[Указание. Воспользуйтесь теоремой Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами. Ср. предложение 2 лекции III.26.]

Петля u называется *гомотопной нулю*, если существует гомотопия F, связывающая эту петлю с постоянной петлей e_{b_0}: $t \mapsto b_0$. Согласно утверждению задачи 3 для кусочно гладкой петли u гомотопию F также можно считать кусочно гладкой.

Ясно (см. лекцию 3), что петля, обратная петле, гомотопной нулю, а также петля, составленная из гомотопных нулю петель, гомотопна нулю. Отсюда следует, что *отображения Π_u, отвечающие гомотопным нулю петлям u, составляют подгруппу Φ_e группы Φ.* Эта подгруппа называется *суженной* (или *ограниченной*) *группой голономии* связности H в точке b_0.

Предложение 1. *Группа Φ обладает естественной структурой группы Ли, по отношению к которой она является подгруппой Ли группы Ли $\operatorname{Aut}\mathcal{F}_0$, а группа Φ_e — ее компонентой единицы. Если многообразие $\mathcal{B}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то эта гладкость на Φ является слабейшей гладкостью (и как таковая единственна).*

Доказательство. Ниже мы докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Каждый элемент $a = \Pi_u$ группы Φ_e можно соединить с единицей гладким путем группы Ли $\operatorname{Aut}\mathcal{F}_0$, целиком лежащим в Φ_e.*

Замечание 2. Петли u_τ, составляющие гомотопию F, которая связывает петлю u с постоянной петлей, определяют в Φ_e путь

$$\Pi_F\colon \tau \mapsto \Pi_{u_\tau}, \qquad \tau \in I, \tag{6}$$

соединяющий элемент a с тождественным отображением (единицей группы Φ_e). Поэтому для доказательства леммы 1 достаточно доказать, что *для гладкой гомотопии F отображение Π_F является гладким путем в $\operatorname{Aut}\mathcal{F}_0$*. Однако этот естественный подход к доказательству встречается с определенными трудностями, и ниже мы построим — фактически тот же путь Π_F — другим способом, тривиально обеспечивающим его гладкость.

Лемма 1 означает, что подгруппа Φ_e удовлетворяет условиям предложения 2 лекции 15. Следовательно, согласно этому предложению группа Φ_e обладает слабейшей топологией, по отношению к которой она является связной подгруппой Ли группы Ли $\operatorname{Aut}\mathscr{F}_0$. Поэтому группа Φ будет подгруппой Ли с компонентой единицы Φ_e по отношению к гладкости, в которой все смежные классы $a\Phi_e$ являются компонентами связности (см. доказательство теоремы 2 лекции 15). Это доказывает первое утверждение предложения 1.

Для доказательства второго утверждения нам в силу теоремы 2 лекции 15 достаточно доказать, что *для многообразия $\mathscr{B}$, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, факторгруппа Φ/Φ_e счетна (или конечна)*. С этой целью мы рассмотрим фундаментальную группу $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ многообразия $\mathscr{B}$ в точке b_0. Согласно утверждению задачи 3 каждый элемент $\alpha\in\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ содержит кусочно гладкую петлю u (имеет вид $\alpha=[u]$). Соответствующий элемент Π_u группы Φ определен с точностью до элемента из Φ_e, так что формула $\alpha\to[\Pi_u]$, где $[\Pi_u]$ — смежный класс элемента Π_u по подгруппе Φ_e, корректно определяет некоторое отображение

$$\pi_1(\mathscr{B}, b_0)\to\Phi/\Phi_e. \tag{7}$$

Лемма 2. *Для любого связного многообразия $\mathscr{B}$, удовлетворяющего второй аксиоме счетности (и любой точки $b_0\in\mathscr{B}$) группа $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ не более чем счетна.*

Поскольку отображение (7), очевидно, эпиморфно, это доказывает предложение 1. $\square$

Для доказательства леммы 1 нам понадобятся некоторые дополнительные сведения о петлях вообще и о петлях, гомотопных нулю, в частности.

Координатную окрестность U в многообразии $\mathscr{B}$ мы будем называть *шаровой*, если она диффеоморфна открытому шару пространства $\mathbb{R}^m$. Ясно, что шаровые координатные окрестности составляют базу открытых множеств многообразия $\mathscr{B}$.

Петлю в точке b_0 мы будем называть *лассо с петлей v*, если она имеет вид wvw^{-1}, где w — некоторый путь, начинающийся в точке b_0, а v — петля в его концевой точке b_1.

Петлю u мы будем называть *малой*, если она целиком содержится в некоторой шаровой координатной окрестности. Лассо wvw^{-1} с малой петлей v мы будем называть *малым лассо*.

В силу односвязности шаров (см. лекцию 3) каждая малая петля гомотопна нулю. Поэтому гомотопно нулю и каждое малое лассо.

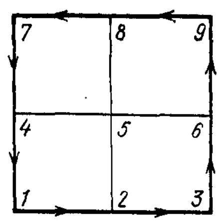
Петлю вида $u_1vv^{-1}u_2$ мы будем называть *элементарным преобразованием* петли u_1u_2. Две петли мы будем называть *комбинаторно эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой конечной последовательностью элементарных преобразований и преобразований, им обратных. (Иначе говоря, две петли комбинаторно эквивалентны, если одна получается из другой вставками и удалениями фрагментов вида vv^{-1}.)

Так как $\Pi_{v^{-1}} = \Pi_v^{-1}$, то *комбинаторно эквивалентные петли и определяют один и тот элемент* Π_u *группы* Φ.

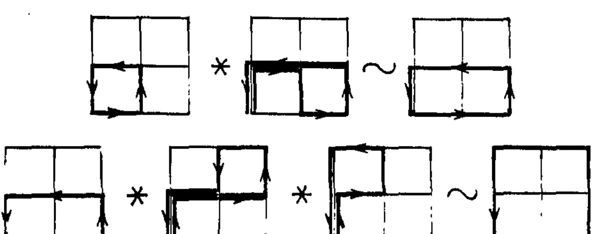
Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ квадрат Q_N с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 2^N)$, $(2^N, 0)$ и $(2^N, 2^N)$. Прямые, параллельные осям координат, делят этот квадрат на 2^{2N} квадратов единичной площади. Обход границы каждого из этих квадратов против часовой стрелки вместе с некоторой ломаной, соединяющей в Q_N точку $(0, 0)$ с какой-то вершиной этого квадрата, задает в Q_N лассо. Мы будем называть такие лассо *элементарными*.

Пусть q_N — петля в точке $(0, 0)$, получающаяся при обходе границы квадрата Q_N против часовой стрелки.

Лемма 3. *Петля* q_N *комбинаторно эквивалентна произведению элементарных лассо.*



Петля q_1



Разложение петли q_1

Доказательство. При $N=1$ петля q_1 является ломаной 1 2 3 6 9 8 7 4 1, где, например, 1 — точка (0, 0), а 2 — точка (1, 0) (см. рис.), и комбинаторно эквивалентна произведению элементарных лассо

$$
(8) \qquad \begin{array}{ll} 1\,2\,5\,4\,1, & 1\,4\,5\,2\,3\,6\,5\,4\,1, \\ 1\,4\,5\,6\,9\,8\,5\,4\,1, & 1\,4\,5\,8\,7\,4\,1. \end{array}
$$

[Строго говоря, петля 1 2 5 4 1 не является лассо, поскольку отсутствует путь w. Чтобы превратить эту петлю в лассо, достаточно ввести путь 1 2 1.]

Пусть лемма уже доказана для петли q_{N-1}. Гомотетия с параметром 2^{N-1} отображает квадрат Q_1 на квадрат Q_N и переводит единичные квадраты, составляющие квадрат Q_1, в четыре квадрата со стороной 2^{N-1}, составляющие квадрат Q_N. Поэтому согласно уже доказанному петля q_N комбинаторно эквивалентна произведению четырех лассо, гомотетичных лассо (8). С другой стороны, по предположению индукции, петли последних лассо комбинаторно эквивалентны произведениям элементарных лассо (начинающихся в соответствующих точках квадрата Q_N). Но ясно, что если петля u лассо wuw^{-1} комбинаторно эквивалентна произведению петель $u_1, \ldots, u_n$, то само лассо wuw^{-1} будет комбинаторно эквивалентно произведению петель

$$
(9) \qquad wu_1w^{-1}, \ \ldots, \ wu_nw^{-1},
$$

причем если петли $u_1, \ldots, u_n$ были элементарными лассо (в концевой точке пути w), то петли (9) также будут элементарными лассо (в начальной точке пути w). Это, очевидно, доказывает лемму 3. □

Следствие 1. *В многообразии $\mathscr{B}$ каждая гомотопная нулю петля u комбинаторно эквивалентна произведению малых лассо.*

Доказательство. Гомотопию F, связывающую петлю u с постоянной петлей, мы без ограничения общности можем считать отображением вида $Q_N \to \mathscr{B}$, где N — любое наперед заданное число. Если N достаточно велико, то каждый единичный квадрат, на которые разделен квадрат Q_N, гомотопия F будет отображать в некоторую шаровую координатную окрестность многообразия $\mathscr{B}$, и, значит, каждое элементарное лассо — в некоторое малое лассо многообразия $\mathscr{B}$. С другой стороны, граничную петлю q_N гомотопия F переводит, по условию, в петлю, являющуюся произведением петли u и постоянной петли, и, следовательно, комбинаторно эквивалентную петле u. Значит, согласно лемме 3 петля u комбинаторно эквивалентна произведению малых лассо. □

Из следствия 1 вытекает, что любой элемент группы Φ_e является произведением элементов Π_u, отвечающим малым лассо u. Поэтому лемму 1 достаточно доказать лишь для таких элементов.

Эту редукцию можно усилить.

Пусть b_0 и b_1—две точки многообразия $\mathscr{B}$, соединенные путем w. Тогда каждая петля u_1 в b_1 определяет петлю (лассо) wu_1w^{-1} в b_0, а каждая петля u_0 в b_0—петлю $w^{-1}u_0w$ в b_1, причем с точностью до комбинаторной эквивалентности эти соответствия взаимно обратны. Поэтому они индуцируют изоморфизм группы голономии $\Phi(b_1)$ в точке b_1 на группу голономии $\Phi(b_0)$ в точке b_0. Более того, если в пространствах $\mathscr{F}_{b_0}$ и $\mathscr{F}_{b_1}$ выбраны базисы и соответственно этому группы $\Phi(b_0)$ и $\Phi(b_1)$ интерпретированы как подгруппы группы $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$, то в предположении, что базис в $\mathscr{F}_{b_1}$ получается из базиса в $\mathscr{F}_{b_0}$ параллельным переносом вдоль пути w, этот изоморфизм будет, как легко видеть, тождественным отображением. Поэтому если некоторый элемент группы $\Phi(b_1)$ (отвечающий, скажем, петле u) соединяется с единицей гладким (в $\mathrm{Aut}\,\mathscr{F}_{b_1}$) путем, целиком лежащим в $\Phi(b_1)$, то соответствующий элемент группы $\Phi(b_0)$ (отвечающий лассо с петлей u) будет соединяться с единицей гладким (в $\mathrm{Aut}\,\mathscr{F}_{b_0}$) путем, лежащим в $\Phi(b_0)$.

Следовательно, лемму 1 достаточно доказать лишь для элементов $a=\Pi_u$, отвечающих малым петлям u (целиком лежащим в некоторой шаровой координатной окрестности U точки b_0).

К таким элементам мы уже можем применить конструкцию из замечания 1.

Доказательство леммы 1. Как только что было доказано, мы без ограничения общности можем считать, что петля u целиком содержится в некоторой шаровой координатной и одновременно тривиализирующей окрестности U.

Пусть $x^k=x^k(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $k=1,\ \ldots,\ m$,—параметрические уравнения петли u в центрированных в b_0 локальных координатах. Тогда формулы

$$x^k=\tau x^k(t),\quad 0\leqslant t,\ \tau\leqslant 1,\ 1\leqslant k\leqslant m, \tag{10}$$

будут задавать гомотопию $F\colon I^2\to\mathscr{B}$, связывающую постоянную петлю в точке b_0 с петлей u. Соответствующие петли u_τ будут, следовательно, иметь параметрические уравнения (10) (с постоянным τ) и, значит, будут накрываться кривыми (не петлями!) $v_\tau\colon I \to \mathscr{E}$ с параметрическими уравнениями (10) и $a^i = a^i_\tau(t)$, где $a^i_\tau(t)$ — решения уравнений

$$\dot{a}^i_\tau(t) + \tau\Gamma^i_{kj}(\tau x(t))\, a^j_\tau(t)\, \dot{x}^k(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Но согласно известной из курса дифференциальных уравнений теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра, решения $a^i_\tau(t)$ этих уравнений (при данных начальных условиях $a^i_\tau(0) = a^i_0$) гладко зависят от параметра τ. В частности, от параметра τ гладко зависят их концевые значения $a^i_\tau(1)$.

С другой стороны, если a^i_0 — координаты точки $p_0 \in \mathscr{F}_0$, то, по определению, числа $a^i_\tau(1)$ будут координатами точки $\Pi_{u_\tau}(p_0)$. Следовательно, эта точка гладко зависит от τ, т. е. отображение $\mathscr{F}_0 \times I \to \mathscr{F}_0$, заданное формулой $(p_0, \tau) \mapsto \Pi_{u_\tau}(p_0)$, будет гладко. Но тогда, как легко видеть (ср. лемму 1 лекции 6), гладким будет и отображение $\tau \mapsto \Pi_{u_\tau}$ из I в $\operatorname{Aut}\mathscr{F}_0$, т. е. отображение (6) будет гладким путем. $\square$

Обратим внимание, что в процессе доказательства леммы 1 мы также доказали, что группы голономии $\Phi(b_0)$ и $\Phi(b_1)$ в различных точках $b_0, b_1 \in \mathscr{B}$ изоморфны друг другу (в предположении, что многообразие $\mathscr{B}$ связно). Изоморфизм $\Phi(b_1) \to \Phi(b_0)$ зависит от выбора пути w, соединяющего точку b_0 с точкой b_1, и задается соответствием $u \mapsto w^{-1}uw$. Если в слоях $\mathscr{F}_{b_0}$, $\mathscr{F}_{b_1}$ выбраны базисы и, следовательно, группы $\Phi(b_0)$, $\Phi(b_1)$ интерпретированы как подгруппы группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ и если базис в $\mathscr{F}_{b_1}$ получается из базиса в $\mathscr{F}_{b_0}$ параллельным переносом вдоль пути w, то этот изоморфизм будет тождественным отображением. Поэтому он во всяком случае будет гладким отображением $\Phi(b_0) \to \Phi(b_1)$ (напомним, что гладкость на каждой группе $\Phi(b)$ является слабейшей) и, значит, будет диффеоморфизмом. Этим доказано, что *группы голономии $\Phi(b_0)$ и $\Phi(b_1)$ в различных точках $b_0, b_1 \in \mathscr{B}$ изоморфны как группы Ли.*

Обратимся теперь к лемме 2.

Пусть $\mathscr{B}$ — произвольное гладкое многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, и пусть $b_0 \in \mathscr{B}$.

Задача 4. Покажите, что многообразие $\mathscr{B}$ тогда и только тогда удовлетворяет второй аксиоме счетности, когда оно обладает счетным открытым покрытием $\{U_i\}$, состоящим из шаровых координатных окрестностей U_i.

Напомним, что подмножество C топологического пространства $\mathscr{B}$ называется *всюду плотным* (в $\mathscr{B}$), если $\overline{C}=\mathscr{B}$.

Задача 5. Покажите, что *в каждом многообразии $\mathscr{B}$, удовлетворяющем второй аксиоме счетности, существует счетное всюду плотное подмножество C*. [Указание. Положите $C=\bigcup C_i$, где C_i — подмножество в U_i (см. задачу 4), состоящее из точек с рациональными координатами.]

Ясно, что без ограничения общности можно считать, что множество C содержит точку b_0.

Зафиксировав раз и навсегда счетный атлас $\{(U_i, h_i)\}$ и подмножество C, назовем путь u в многообразии $\mathscr{B}$ *элементарным*, если

а) его начальная и концевая точки принадлежат C;

б) путь u целиком расположен в некоторой окрестности U_i;

в) путь $h_i \circ u$ пространства $\mathbb{R}^m$ является прямолинейным отрезком (в его естественной параметризации).

Путь, составленный из элементарных путей, мы будем называть — за отсутствием лучшего термина — *специальным путем*.

Ясно, множество всех специальных путей счетно. Поэтому для доказательства леммы 2 достаточно доказать, что *каждая петля в точке b_0 многообразия $\mathscr{B}$ гомотопна специальной петле*.

Это утверждение мы и будем доказывать.

Для доказательства нам понадобится обобщить понятие гомотопии путей.

Гомотопией с подвижными концами мы будем называть произвольное непрерывное отображение $F\colon I^2 \to \mathscr{B}$ квадрата I^2 в многообразие или, более общо, топологическое пространство $\mathscr{B}$. Для каждой такой гомотопии формулы

$$u_0(t)=F(t,0),\quad u_1(t)=F(t,1),\qquad t\in I,$$
$$v_0(\tau)=F(0,\tau),\quad v_1(\tau)=F(1,\tau),\qquad \tau\in I,$$

определяют четыре пути

$$u_0,\ u_1,\ v_0,\ v_1\colon I\to\mathscr{B}.$$

Мы будем говорить, что *гомотопия F связывает путь u_0 с путем u_1 при начальном пути v_0 и конечном пути v_1*.

Заметим, что

$$
\begin{array}{ll}
u_0(0)=v_0(0), & v_0(1)=u_1(0), \\
u_0(1)=v_1(0), & v_1(1)=u_1(1).
\end{array}
\tag{11}
$$

Гомотопии в смысле определения 1 лекции 3 — это в точности гомотопии F, для которых пути v_0 и v_1 постоянны.

Лемма 4. *Линейно связное топологическое пространство $\mathcal{B}$ тогда и только тогда односвязно, когда для любых путей u_0, u_1, v_0, v_1 в $\mathcal{B}$, удовлетворяющих соотношениям* (11), *существует гомотопия F, связывающая путь u_0 с путем u_1 при начальном пути v_0 и конечном пути v_1.*

Доказательство. По определению, односвязность пространства $\mathcal{B}$ означает, что для любой петли u существует гомотопия F, для которой $u_0=u$, а пути u_1, v_0 и v_1 постоянны. Следовательно, условие леммы 4 достаточно для односвязности пространства $\mathcal{B}$.

Покажем, что оно и необходимо.

Пусть в односвязном пространстве $\mathcal{B}$ заданы пути u_0, u_1, v_0, v_1, удовлетворяющие условиям (11). Тогда формула

$$
f(t,\tau)=\begin{cases}
u_0(t), & \text{если } \tau=0,\\
u_1(t), & \text{если } \tau=1,\\
v_0(\tau), & \text{если } t=0,\\
v_1(\tau), & \text{если } t=1,
\end{cases}
$$

корректно определяет некоторое непрерывное отображение $f\colon \partial I^2\to\mathcal{B}$ границы ∂I^2 квадрата I^2 в пространство $\mathcal{B}$, и проблема состоит в том, чтобы распространить это отображение на весь квадрат I^2, т. е. построить такое отображение $F\colon I^2\to\mathcal{B}$, что $F|_{\partial I^2}=f$.

Задача 6. Постройте непрерывное отображение $\varphi\colon I^2\to I^2$ квадрата I^2 на себя,

а) гомеоморфно отображающее на себя внутренность квадрата I^2;

б) отображающее верхнюю сторону $I\times 1$ квадрата I^2 на его границу ∂I^2;

в) переводящее остальные три стороны квадрата I^2 в точку $(0, 0)$.

Пусть g — отображение $\partial I^2\to\mathcal{B}$, являющееся композицией отображения φ (или, точнее, его ограничения $\varphi|_{\partial I^2}$) и отображения f.

На всех сторонах квадрата I^2, кроме верхней, это отображение определяет постоянные пути, а на верхней стороне $I\times 1$ — петлю, являющуюся (вообще говоря, лишь с точностью до перепараметризации) произведением $u_0v_1u_1^{-1}v_0^{-1}$ путей u_0, v_1, u_1^{-1} и v_0^{-1}.

Так как пространство $\mathscr{B}$ односвязно, то последняя петля гомотопна нулю и потому существует гомотопия $G\colon I^2\to\mathscr{B}$, удовлетворяющая соотношению $G|_{\partial I^2}=g$ (являющаяся распространением отображения g). Поскольку стороны квадрата I^2, которые отображение φ переводит в точку, отображение G также переводит в точку, существует (очевидно, единственное и непрерывное) отображение $F\colon I^2\to\mathscr{B}$, удовлетворяющее соотношению $G=F\circ\varphi$. Но тогда $g=(F|_{\partial I^2})\circ\varphi$, откуда в силу равенства $g=f\circ\varphi$ следует, что $F|_{\partial I^2}=f$.

Этим лемма 4 полностью доказана. □

Следствие 1. *Линейно связное топологическое пространство $\mathscr{B}$ тогда и только тогда односвязно, когда для любых двух точек b_0, $b_1\in\mathscr{B}$ все пути, соединяющие точку b_0 с точкой b_1, гомотопны друг другу.*

Задача 7. Выведите следствие 1 из установленных в лекции 3 алгебраических свойств умножения гомотопических классов.

В лекции 3 (см. формулы (10) и (11) лекции 3) были введены операции перемножения гомотопий по первому или второму аргументу. Ясно, что операции имеют смысл — при соответствующих условиях — и для гомотопий с подвижными концами. В частности, произведение FG двух гомотопий по второму аргументу определено тогда и только тогда, когда конечный путь гомотопии F совпадает с начальным путем гомотопии G, и в этом случае FG будет гомотопией, начальным путем которой является начальный путь гомотопии F, а конечным путем — конечный путь гомотопии G.

Теперь мы уже можем непосредственно перейти к доказательству леммы 2.

Доказательство леммы 2. Пусть u — произвольная петля многообразия $\mathscr{B}$ в точке b_0. Нам нужно доказать, что эта петля гомотопна некоторой специальной петле.

Так как отрезок I компактен, то в заданном счетном атласе многообразия $\mathscr{B}$ существует конечная система карт (U_i, h_i), $1\leqslant i\leqslant N$, обладающая тем свойством, что петля u имеет вид $u_1, \ldots, u_N$, где для каждого $i=1, \ldots, N$ путь u_i целиком лежит в шаровой координатной окрестности U_i. Пусть b_{i-1} — начало пути u_i и, следовательно, b_i — его конец. (Таким образом, $b_N = b_0$.)

Так как $b_i \in U_i \cap U_{i+1}$ для каждого $i = 1, \ldots, N-1$, а множество C всюду плотно, то для любого $i = 1, \ldots, N-1$ существует точка $c_i \in C$, принадлежащая той же компоненте линейной связности множества $U_i \cap U_{i+1}$, что и точка b_i. (При $i = 0$ и $i = N$ мы дополнительно требуем, чтобы $c_0 = c_N = b_0$.)

Пусть v_i — произвольный путь, соединяющий в $U_i \cap U_{i+1}$ точку b_i с точкой c_i. (При $i = 0$ и $i = N$ за путь v_i мы принимаем постоянный путь в точке b_0.)

Так как $c_{i-1}, c_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, N$, то в U_i определен элементарный путь w_i, соединяющий точку c_{i-1} с точкой c_i.

Для каждого $i = 1, \ldots, N$ пути u_i, w_{i-1}, v_{i-1}, v_i целиком лежат в односвязном множестве U_i и удовлетворяют, очевидно, условиям леммы 4. Поэтому согласно этой лемме существует гомотопия F_i (в U_i, а потому и в $\mathcal{B}$), связывающая путь u_i с путем w_i при начальном пути v_{i-1} и конечном пути v_i. Тогда гомотопия $F_1 \ldots F_N$ определена, связывает петлю $u = u_1 \ldots u_N$ со специальной петлей $w = w_1 \ldots w_N$ и — ввиду выбора путей v_0 и v_N — является гомотопией с неподвижными концами.

Таким образом, петля u гомотопна специальной петле w. $\square$

Роль групп голономии в теории векторных расслоений во многом определяется следующей теоремой.

Теорема 1. (Теорема редукции.) *Векторное расслоение* $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, *на котором существует связность с группой голономии* Φ, *редуцируется к группе* Φ (*рассматриваемой как подгруппа в* $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$).

Доказательство. Пусть U — произвольная шаровая координатная окрестность в многообразии $\mathcal{B}$ и пусть b^U — ее центр, а $\boldsymbol{p}^U$ — некоторый базис линеала $\mathcal{F}_{b^U}$. Для любой точки $b \in U$ мы обозначим через w_b^U элементарный путь, соединяющий в U точку b^U с точкой b, через Π_b^U — соответствующий параллельный перенос $\mathcal{F}_{b^U} \to \mathcal{F}_b$, а через $\boldsymbol{s}(b) = (s_1(b), \ldots, s_n(b))$ — базис $\Pi_b^U \boldsymbol{p}^U$ линеала $\mathcal{F}_b$, $b \in U$ (так что $\boldsymbol{s}(b^U) = \boldsymbol{p}^U$).

Задача 8. Докажите, что *базис* $\boldsymbol{s}(b)$ *гладко зависит от* b, т. е. что сечения s_i: $b \mapsto s_i(b)$, $i = 1, \ldots, n$, принадлежат $\Gamma(\xi|_U)$ (и, значит, составляют базис этого $\mathsf{F}U$-модуля).

Отсюда следует, что формула

$$\varphi_1(b, \boldsymbol{a}) = a^i s_i(b), \qquad b \in U, \ \boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n,$$

определяет гладкую тривиализацию

$$\varphi\colon \ U \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{E}_U \tag{12}$$

расслоения ξ над U. [Подчеркнем, что эта тривиализация зависит от выбора базиса $\boldsymbol{p}^U$.]

Чтобы единообразно выбрать базисы $\boldsymbol{p}^U$ для всех окрестностей U, вспомним, что в многообразии $\mathscr{B}$ у нас фиксирована точка b_0 (по отношению к которой определяется группа голономии Φ). Имея это в виду, выберем в линеале $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$ произвольный базис $\boldsymbol{p}_0$ (и тем самым зададим группу Φ как подгруппу группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$), а для каждой шаровой координатной окрестности U — некоторый путь v^U в $\mathscr{B}$, соединяющий точку b_0 с центром b^U окрестности U. Затем примем за базис $\boldsymbol{p}^U$ результат $\Pi_v \boldsymbol{p}_0$ параллельного переноса базиса $\boldsymbol{p}_0$ вдоль пути $v = v^U$.

Тем самым над каждой шаровой координатной окрестностью U многообразия $\mathscr{B}$ у нас будет построена тривиализация (12), т. е. будет построен некоторый тривиализирующий атлас расслоения ξ. [Заметим, что этот атлас зависит только от базиса $\boldsymbol{p}_0$ линеала $\mathscr{F}_0$ и путей v^U, соединяющих точку b_0 с центрами b^U окрестностей U.]

Пусть теперь U_1 и U_2 — две пересекающиеся шаровые координатные окрестности, φ_1 и φ_2 — соответствующие тривиализации (12), а φ_{21} — связывающее эти тривиализации отображение перехода $U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$. Отождествив с помощью базиса $\boldsymbol{p}_0$ группу $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ с группой $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_0$, мы можем считать, что

$$\varphi_{21}\colon \ U_1 \cap U_2 \to \operatorname{Aut} \mathscr{F}_0,$$

т. е. что $\varphi_{21}(b)\colon \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_0$ для каждой точки $b \in U_1 \cap U_2$.

Аналогичным образом мы можем считать, что отображения $\varphi_{1,b}$ и $\varphi_{2,b}$ (для точек b из U_1 и U_2 соответственно) действуют из $\mathscr{F}_0$ в $\mathscr{F}_b$:

$$\mathscr{F}_0 \xrightarrow{\varphi_{1,b}} \mathscr{F}_b \xleftarrow{\varphi_{2,b}} \mathscr{F}_0.$$

Но, расшифровывая определения, мы тогда немедленно получим, что

$$\varphi_{1,b} = \Pi_b^{U_1} \circ \Pi_{v^{U_1}} = \Pi_{v^{U_1} w_b^{U_1}},$$

$$\varphi_{2,b} = \Pi_b^{U_2} \circ \Pi_{v^{U_2}} = \Pi_{v^{U_2} w_b^{U_2}}$$

и, значит, что

$$\varphi_{21}(b)=\varphi_{2,b}^{-1}\circ\varphi_{1,b}=\Pi^{-1}_{vU_2w_b^{U_2}}\circ\Pi_{vU_1w_b^{U_1}}=\Pi_w,$$

где w — петля $v^{U_1}w_b^{U_1}(w_b^{U_2})^{-1}(v^{U_2})^{-1}$ в точке b_0.

Таким образом, отображение перехода φ_{21} принимает значения в подгруппе Φ группы $\operatorname{Aut}\mathcal{F}_{b_0}$.

По определению это означает, что матричный коцикл φ, отвечающий построенному тривиализирующему атласу, является коциклом над Φ. Следовательно (см. определение 1 лекции 7), векторное расслоение ξ редуцируется к группе Φ. $\square$

Заметим, что по ходу дела мы доказали, что *векторное расслоение ξ тривиализируется над каждой шаровой координатной окрестностью многообразия $\mathcal{B}$.*

Конечно, это заключение опирается на существование в расслоении ξ связности H. Рассмотрим поэтому вопрос об условиях, обеспечивающих существование в ξ хотя бы одной связности. Для этого мы воспользуемся установленным в лекции 12 биективным соответствием между связностями и ковариантными дифференцированиями

(13) $$\nabla\colon \Gamma\xi\to\Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}}\otimes\xi).$$

Пусть E — линейное пространство (даже $\mathsf{F}\mathcal{B}$-модуль) всевозможных линейных над $\mathbb{R}$ отображений $\Gamma\xi\to\Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}}\otimes\xi)$, а H — его подпространство ($\mathsf{F}\mathcal{B}$-подмодуль), состоящее из отображений, линейных над $\mathsf{F}\mathcal{B}$. Множество D всех ковариантных дифференцирований (13) содержится в E, но не является в E подпространством (хотя бы потому, что сумма $\nabla_1+\nabla_2$ двух дифференцирований из D заведомо не принадлежит D). Однако, как показывает непосредственная проверка, *для любых двух дифференцирований ∇_1 и ∇_2 и любой функции $f\in\mathsf{F}\mathcal{B}$ отображение*

(14) $$\nabla=(1-f)\nabla_1+f\nabla_2$$

также будет дифференцированием.

Более того, если $\{\eta_\alpha\}$ произвольное разбиение единицы (см. лекцию III.22), то для любого семейства $\{\nabla_\alpha\}$ дифференцирований отображение

(15) $$\nabla=\sum_\alpha\eta_\alpha\nabla_\alpha$$

(имеющее смысл в силу свойства локальной конечности семейства $\{\eta_\alpha\}$) также будет дифференцированием. Если разбиение единицы $\{\eta_\alpha\}$ подчинено покрытию $\{U_\alpha\}$, то отображение (15) будет, очевидно, определено (и будет дифференцированием) даже в случае, когда каждое ∇_α определено лишь над U_α (для расслоения $\xi|_{U_\alpha}$).

С другой стороны, ясно, что если расслоение $\xi|_{U_\alpha}$ тривиально, то хотя бы одно дифференцирование ∇_α над U_α заведомо существует. Поэтому в этом случае над всем $\mathcal{B}$ существует дифференцирование (15) и, значит, существует соответствующая связность. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 2. *На каждом гладком нумерируемом* (см. лекцию 7) *векторном расслоении ξ существует хотя бы одна связность.*

Конечно, это предложение мы могли (и, собственно говоря, должны были) сформулировать и доказать еще в лекции 13. Мы отложили его потому, что только теперь из него получаются содержательные следствия.

Следствие 1. *Каждое гладкое векторное расслоение $\xi \in (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ над паракомпактным многообразием $\mathcal{B}$ обладает хотя бы одной связностью.*

Следствие 2. *Каждое гладкое векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ над паракомпактным многообразием $\mathcal{B}$ тривиализируется над любой шаровой координатной окрестностью U.*

Это означает, что каждое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ многообразия $\mathcal{B}$, состоящее из шаровых координатных окрестностей, является универсально тривиализирующим покрытием (см. замечание 4 лекции 6).

Множество дифференцирований (=связностей) вида (14) допускает интересную интерпретацию с точки зрения общей теории аффинных пространств.

Напомним (см. определение 3 лекции I.4), что (непустое!) множество $\mathcal{A}$ называется аффинным пространством над линеалом $\mathcal{V}^o$, если задано такое отображение

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{V}^o, \quad (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}, \tag{16}$$

что

а) для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}^o$ и любой точки $A \in \mathcal{A}$ существует единственная точка B, для которой $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$;

б) для любых трех точек A, B, $C \in \mathcal{A}$ имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Нам сейчас важно подчеркнуть, что в этом определении нигде не используется наличие в основном поле $\mathbb{K}$ деления. Следовательно, *оно имеет смысл и тогда, когда $\mathscr{V}^0$ является не линеалом, а лишь модулем над некоторым кольцом* $\mathbb{K}$.

Для множества D роль кольца $\mathbb{K}$ играет кольцо функций $\mathsf{F}\mathscr{B}$, роль модуля $\mathscr{V}^0$ — подмодуль H, а отображение (16) определяется формулой

$$(\nabla_1, \nabla_2) \mapsto \nabla_2-\nabla_1, \qquad \nabla_1\nabla_2 \in \mathsf{D}.$$

[Включение $\nabla_2-\nabla_1 \in \mathsf{H}$ вытекает из того, что при вычитании друг из друга формул Лейбница для $\nabla_2(fs)$ и $\nabla_1(fs)$ члены $Xf\cdot s$ сокращаются. Аксиома **б** сводится к тривиальному тождеству

$$\nabla_3-\nabla_1=(\nabla_3-\nabla_2)+(\nabla_2-\nabla_1),$$

а аксиома **а** — к автоматически проверяемому утверждению, что для любого дифференцирования ∇ и любого $\mathsf{F}\mathscr{B}$-линейного отображения $\delta \in \mathsf{H}$ отображение $\nabla+\delta$ является дифференцированием.]

Таким образом, мы видим, что *множество* D *всех ковариантных дифференцирований* (*или что равносильно — всех связностей*) *на гладком векторном расслоении* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *является* (*когда оно непусто*) *аффинным пространством над* $\mathsf{F}\mathscr{B}$*-модулем* H.

С этой точки зрения множество дифференцирований (14) является не чем иным, как прямой аффинного пространства D.