Лекция 19

Вычисление параллельного переноса вдоль петли.— Оператор кривизны в данной точке.— Перенесение вектора по бесконечно малому параллелограмму.— Тензор кривизны.— Формула преобразования компонент тензора кривизны.— Выражение оператора кривизны через ковариантные производные.— Структурное уравнение Картана.— Тождество Бианки.

Пусть $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$—гладкое векторное расслоение ранга n над m-мерным многообразием $\mathscr{B}$ с отмеченной точкой b_0 и пусть H—связность на ξ. Тогда—см. лекцию 18—каждая гладкая петля $u\colon I\to\mathscr{B}$ в точке b_0 определяет отображение

$$\Pi_u\colon \mathscr{F}_0\to\mathscr{F}_0, \qquad \mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{b_0},$$

являющееся тождественным отображением id, когда петля u постоянна.

Раз и навсегда мы зафиксируем тривиализирующую координатную окрестность U точки b_0 в многообразии $\mathscr{B}$, координаты $x^1, \ldots, x^m$ в окрестности U, центрированные в точке b_0, и тривиализацию $\boldsymbol{s}=(s_1, \ldots, s_n)$ расслоения ξ над U (базис $\mathsf{F}\mathscr{B}$-модуля $\Gamma\xi$ над U). Тогда каждая петля u, целиком расположенная в U, будет иметь векторное параметрическое уравнение вида

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}(t)=(x^1(t), \ldots, x^m(t))$—такая гладкая вектор-функция, что $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{0}$, а соответствующее отображение Π_u будет переводить точку $p_0\in\mathscr{F}_0$, имеющую в базисе $\boldsymbol{s}(b_0)$ линеала $\mathscr{F}_0$ координаты $\boldsymbol{a}_0=(a_0^1, \ldots, a_0^n)$, в точку $p_1=\Pi_u p_0$, имеющую в том же базисе координаты $\boldsymbol{a}_1=(a^1(1), \ldots, a^n(1))$. Здесь $a^i(1)$, $1\leqslant i\leqslant n$,—значения при $t=1$ функций $a^i(t)$, $1\leqslant i\leqslant n$, являющихся решениями дифференциальных уравнений

$$\dot a^i(t)+\Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))\,\dot x^k(t)\,a^j(t)=0, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{2}$$

с начальными условиями $a^i(0)=a_0^i$, $1\leqslant i\leqslant n$. (Отсюда, в частности, непосредственно следует, что отображение Π_u линейно и биективно, т. е. является невырожденным линейным оператором на $\mathscr{F}_0$; ср. лекцию 18.)

Вместо дифференциальных уравнений (2) удобно рассматривать равносильные интегральные уравнения

$$a^i(t) = a_0^i - \int_0^t \Gamma_{kj}^i(\boldsymbol{x}(t))\,\dot{x}^k(t)\,a^j(t)\,dt, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Преимущество этих уравнений состоит в том, что к их решению применим метод последовательных приближений.

Без ограничения общности можно считать, что замыкание $\overline{U}$ окрестности U компактно. Тогда гладкие функции Γ_{kj}^i будут ограничены на U, т. е. будет существовать такая константа $C > 0$, что

$$|\Gamma_{kj}^i| < C \text{ на } U \tag{4}$$

для всех i, j и k.

О петле (1) мы будем говорить, что она *имеет размер* $\leqslant s$, если

$$|\dot{x}^k(t)| \leqslant s \tag{5}$$

для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и всех $k = 1, \ldots, m$.

Заметим, что для любой такой петли

$$|x^k(t)| \leqslant s \tag{6}$$

для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и всех $k = 1, \ldots, m$.

Действительно, так как $x^k(0) = 0$, то

$$|x^k(t)| = \left|\int_0^t \dot{x}^k(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^t |\dot{x}^k(t)|\,dt \leqslant st \leqslant s. \ \square$$

Лемма 1. *Существуют такие константы C_1 и C_2, что для любой гладкой (и даже кусочно гладкой) петли и размера $\leqslant s$ для решений $a^i(t)$ уравнений* (3) *имеет место оценка*

$$|a^i(t)| \leqslant C_2 e^{C_1 st} \tag{7}$$

для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и всех $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть

$$a(t)^2 = \sum_{i=1}^n (a^i(t))^2.$$

Тогда

$$a(t)\,\dot{a}(t) = \sum_{i=1}^n a^i(t)\,\dot{a}^i(t) =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \Gamma_{kj}^i(\boldsymbol{x}(t))\,\dot{x}^k(t)\,a^i(t)\,a^j(t)$$

и, значит,

$$a(t)\,|\dot{a}(t)| \leqslant mCs \sum_{i,\,j=1}^{n} |a^i(t)|\,|a^j(t)|,$$

где C — константа из оценки (4). С другой стороны, так как для любых положительных чисел a и b имеет место неравенство

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

(ибо $(a-b)^2 \geqslant 0$), то

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} |a^i(t)|\,|a^j(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(a^i(t))^2 + \sum_{j=1}^{n}(a^j(t))^2\right) = na(t)^2.$$

После сокращения на $a(t)$ мы получаем, что

$$|\dot{a}(t)| \leqslant C_1 s a(t), \qquad \text{где} \quad C_1 = nmC,$$

т. е.

$$\left|\frac{d\ln a(t)}{dt}\right| \leqslant C_1 s.$$

Но тогда

$$|\ln a(t) - \ln a(0)| = \left|\int_0^t \frac{d\ln a(t)}{dt}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \left|\frac{d\ln a(t)}{dt}\right| dt \leqslant C_1 s t,$$

и потому

$$a(t) \leqslant a(0)\,e^{C_1 s t}.$$

Поскольку $|a^i(t)| \leqslant a(t)$, это доказывает (7). □

Зафиксировав число $s_0 > 0$, будем считать, что $0 \leqslant s \leqslant s_0$.

Следствие. *Существует такая константа C, что для любой петли и размера $\leqslant s$ имеет место оценка*

(8) $$|a^i(t)| \leqslant C$$

для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и всех $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Согласно формуле (7)

$$|a^i(t)| \leqslant C_2 e^{C_1 s_0}. \ \square$$

Теперь мы можем непосредственно приступить к решению системы (3) для петли u размера $\leqslant s$ методом последовательных приближений.

Первое приближение. Из неравенств (4), (5) и (6) следует, что при некоторой константе C имеет место оценка

$$|a^i(t)-a_0^i|\leqslant Cst,$$

т. е.

$$a^i(t)=a_0^i+O(st),$$

где $O(st)$—такая функция, что при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $0<s\leqslant s_0$ отношение $\frac{O(st)}{st}$ ограничено.

Второе приближение. Из формулы конечных приращений Лагранжа и неравенств (5) следует, что

$$\Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))=\Gamma^i_{kj}(0)+O(st),$$

где $\Gamma^i_{kj}(0)$—значения функций Γ^i_{kj} в точке b_0 (при $\boldsymbol{x}=0$). Поэтому

$$a^i(t)=a_0^i-\int_0^t[\Gamma^i_{kj}(0)+O(st)][a_0^j+O(st)]\dot{x}^k(t)\,dt=$$

$$=a_0^i-\Gamma^i_{jk}(0)a_0^j\int_0^t\dot{x}^k(t)\,dt+O(s^2t),$$

т. е.

$$a^i(t)=a_0^i-\Gamma^i_{kj}(0)a_0^jx^k(t)+O(s^2t).$$

Третье приближение. Из формулы Тейлора с остаточным членом и неравенств (5) и (6) следует, что

$$\Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))=\Gamma^i_{kj}(0)+\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0)x^l(t)+O(s^2t)$$

(напомним, что множество $\overline{U}$ мы предполагаем компактным). Поэтому

$$a^i(t)=a_0^i-\int_0^t\left[\Gamma^i_{kj}(0)+\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0)x^l(t)+O(s^2t)\right]\times$$

$$\times[a_0^j-\Gamma^j_{qp}(0)a_0^px^q(t)+O(s^2t)]\dot{x}^k(t)\,dt=$$

$$=a_0^i-\Gamma^i_{kj}(0)a_0^jx^k(t)+\Gamma^i_{kj}(0)\Gamma^j_{qp}(0)a_0^p\int_0^tx^q(t)\dot{x}^k(t)\,dt-$$

$$-\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0)a_0^j\int_0^tx^l(t)\dot{x}^k(t)\,dt+O(s^3t),$$

т. е.

$$a^i(t)=a_0^i-\Gamma_{kj}^i(0)\,a_0^j x^k(t)+$$
$$+\left[\Gamma_{kp}^i(0)\,\Gamma_{lj}^p(0)-\frac{\partial\Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}(0)\right]a_0^j\int_0^t x^l(t)\,\dot{x}^k(t)\,dt+O(s^3t).$$

Дальнейшие приближения нам не понадобятся.

Так как $x^k(1)=0$, то при $t=1$ мы в понятных обозначениях получаем отсюда равенство

$$a^i(1)=a_0^i+\left[\Gamma_{kp}^i\Gamma_{lj}^p-\frac{\partial\Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}\right]_0 a_0^j\int_0^t x^l(t)\,\dot{x}^k(t)\,dt. \tag{9}$$

Чтобы вычислить интеграл справа, наложим на петлю u дополнительные условия.

Условие 1. Функции (1) имеют вид

$$x^k(t)=x^k(\alpha(t),\ \beta(t)),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{10}$$

где $x^k(\alpha,\ \beta)$ — функции двух переменных, определенные в некоторой окрестности V точки $(0,\ 0)$ на (α,β)-плоскости $\mathbb{R}^2$ и такие, что ранг матрицы частных производных

$$\left\|\begin{matrix} x_\alpha^1 & \dots & x_\alpha^m \\ x_\beta^1 & \dots & x_\beta^m \end{matrix}\right\| \tag{11}$$

в точке $(0,\ 0)$ равен двум, а

$$\alpha=\alpha(t),\quad \beta=\beta(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{12}$$

— уравнения некоторой кусочно гладкой петли γ в V.

Наглядно это условие означает, что петля u расположена на некоторой регулярной элементарной поверхности

$$x^k=x^k(\alpha,\ \beta),\qquad (\alpha,\ \beta)\in V, \tag{13}$$

Поскольку

$$\dot{x}^k=x_\alpha^k\dot{\alpha}+x_\beta^k\dot{\beta},\qquad k=1,\ \dots,\ m \tag{14}$$

(для упрощения формул мы опускаем аргументы; символы x_α^k и x_β^k обозначают частные производные), интеграл из формулы (9) записывается теперь в виде контурного интеграла по кривой γ:

$$\int_0^1 x^l\dot{x}^k\,dt=\int_0^1 x^l(x^k_\alpha\dot{\alpha}+x_\beta^k\dot{\beta})\,dt= \tag{15}$$
$$=\oint_\gamma x^l x_\alpha^k d\alpha+x^l x_\beta^k d\beta.$$

Условие 2. Для функций (12) (или, точнее,— их производных) имеют место оценки

$$|\dot{\alpha}(t)| \leqslant \frac{s}{M}, \quad |\dot{\beta}(t)| \leqslant \frac{s}{M}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где

$$M = \max_k \max_{(\xi,\,\eta)} (|x^k_\alpha(\alpha,\,\beta)| + |x^k_\beta(\alpha,\,\beta)|), \tag{16}$$
$$(\alpha,\,\beta) \in V, \quad k = 1,\,\ldots,\,m.$$

Это условие обеспечивает справедливость оценки (5) (см. формулы (14)).

Условие 3. Петля u (или — что равносильно — петля γ) является простой замкнутой кривой (не имеет самопересечений).

Из этого условия следует, что кривая γ ограничивает на $(\alpha,\,\beta)$-плоскости некоторую область G. Поэтому к контурному интегралу (15) применима формула Грина, согласно которой этот интеграл равен

$$\iint_G \left(\frac{\partial (x^l x^k_\beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (x^l x^k_\alpha)}{\partial \beta} \right) d\alpha\, d\beta = \tag{17}$$
$$= \iint_G (x^l_\alpha x^k_\beta - x^k_\alpha x^l_\beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

С другой стороны, из условия 2 следует (см. выше вывод оценки (6) из оценок (5)), что кривая γ, а потому и область G целиком расположены в квадрате

$$|\alpha| \leqslant \frac{s}{M}, \quad |\beta| \leqslant \frac{s}{M}.$$

Поэтому для площади этой области имеет место оценка

$$\iint_G d\alpha\, d\beta = cs^2 + O(s^3),$$

а для интеграла по G от произвольной непрерывной на $\overline{G}$ функции f — оценка

$$\iint_G f\, d\alpha\, d\beta = cf(0,\,0)\, s^2 + O(s^3), \tag{18}$$

где c — некоторое число (зависящее от формы области G).

Условие 4. Число c отлично от нуля.

Геометрически это условие означает, что область G ни в одном направлении сильно не сплющена.

Применение к интегралу (17) оценки (18) дает нам теперь равенство

$$\int\limits_0^1 \dot{x}^l x^k\,dt = -s^2 x_0^{kl} + O(s^3),$$

где

(19) $$x_0^{kl} = (x_\alpha^k x_\beta^l - x_\alpha^l x_\beta^k)_0\, c.$$

Подставив это выражение в формулу (9), мы, следовательно, получим, что

$$a^i(1) = a_0^i + s^2\left[\frac{\partial\Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kp}^i\Gamma_{lj}^p\right]_0 x_0^{kl} a_0^j + O(s^3).$$

Переставив немые индексы суммирования k и l, эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$a^i(1) = a_0^i + s^2\left[\frac{\partial\Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{lp}^i\Gamma_{kj}^p\right]_0 x_0^{lk} a_0^j + O(s^3).$$

Так как $x_0^{lk} = -x_0^{kl}$, то, сложив две последние формулы и разделив на 2, мы получим следующую окончательную формулу:

(20) $$a^i(1) = a_0^i - \frac{1}{2}s^2(R_{j.kl}^i)_0\, x_0^{kl} a_0^j + O(s^3),$$

где $(R_{j.kl}^i)_0$—значение в точке b_0 функции

(21) $$R_{j.kl}^i = \frac{\partial\Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kp}^i\Gamma_{lj}^p - \Gamma_{lp}^i\Gamma_{kj}^p.$$

Обсудим полученную формулу подробнее.

Участвующие в формуле (20) числа (19) представляют собой не что иное, как компоненты бивектора $(c\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{x}_\beta)_0$, являющегося с точностью до множителя $c \neq 0$ внешним произведением координатных векторов $\boldsymbol{x}_\alpha$ и $\boldsymbol{x}_\beta$ поверхности (12) в точке (0, 0) и потому, в силу условия на ранг матрицы (11), отличного от нуля. Чтобы не привязывать слишком тесно этот бивектор к по существу случайной поверхности (12), мы будем обозначать его символом $A \wedge B$, где A и B—произвольные векторы пространства $\mathbf{T}_{b_0}\mathcal{B}$, обладающие тем свойством, что $A \wedge B = (c\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{x}_\beta)_0$, а его компоненты x_0^{kl}—символом $(A \wedge B)^{kl}$; так что

$$(A \wedge B)^{kl} = \begin{vmatrix} A^k & A^l \\ B^k & B^l \end{vmatrix} = A^k B^l - A^l B^k,$$

где A^k и B^k—координаты векторов A и B в рассматриваемой системе локальных координат.

Положим

$$R(A, B)^i_j = \frac{1}{2}(R^i_{j,kl})_0 (A \wedge B)^{kl}.$$

(Заметим, что эта формула имеет смысл для *любых* векторов A, $B \in \mathsf{T}_{b_0}\mathscr{B}$.)

Легко видеть, что

$$R(A, B)^i_j = (R^i_{j,kl})_0 A^k B^l. \tag{22}$$

Действительно, так как $R^i_{j,kl} = -R^i_{j,lk}$ и $(A \wedge B)^{kl} = A^k B^l - A^l B^k$, то

$$\begin{aligned} R^i_{j,kl}(A \wedge B)^{kl} &= R^i_{j,kl} A^k B^l - R^i_{j,kl} A^l B^k = \\ &= R^i_{j,kl} A^k B^l - R^i_{j,lk} A^k B^l = \\ &= 2R^i_{j,kl} A^k B^l \end{aligned}$$

(для упрощения формул мы вместо $(R^i_{j,kl})_0$ пишем здесь просто $R^i_{j,kl}$; подобную вольность мы будем позволять себе и впредь).

Формулу (20) мы можем теперь переписать в следующем виде:

$$a^i(1) = a^i_0 - s^2 R(A, B)^i_j a^j_0 + O(s^3). \tag{23}$$

По определению числа $a^i_0 = a^i(0)$ являются координатами некоторого вектора $p_0 \in \mathscr{F}_0$, а числа $a^i(1)$—координатами параллельно перенесенного вектора $\Pi_u p_0$. Что же касается чисел (22), то они составляют матрицу некоторого линейного оператора $R(A, B)$, переводящего вектор p_0 в вектор $R(A, B)p_0$ с координатами $R(A, B)^i_j a^j_0$. Таким образом, в векторной форме равенство (23) имеет вид

$$\Pi_u p_0 = p_0 - s^2 R(A, B) p_0 + O(s^3), \tag{23'}$$

а в операторной—вид

$$\Pi_u = \mathrm{id} - s^2 R(A, B) + O(s^2). \tag{23''}$$

Оператор $R(A, B)$ называется *оператором кривизны* связности H, отвечающим бивектору $A \wedge B$.

Пусть для каждого s, $0 < s < s_0$, задана петля u_s размера $\leqslant s$, удовлетворяющая условиям 1—4, гладко зависящая от s (в том смысле, что функции, задающие эту петлю в координатах, являются также гладкими функциями от s) и такая, что бивектор $A \wedge B \neq 0$, отвечающий петле u_s

один и тот же для всех s. Тогда из формулы (23) следует, что для линейного оператора $R(A, B)$ будет иметь место равенство

$$R(A, B) = -\lim_{s \to 0} \frac{\Pi_{u_s} - \mathrm{id}}{s^2}. \tag{24}$$

Поскольку правая часть этой формулы не зависит от выбора координат $a^1, \ldots, a^n$ и $x^1, \ldots, x^m$ (если петли u_s удовлетворяют условиям 1—4 по отношению к одной системе координат, то они будут, очевидно, удовлетворять этим условиям и по отношению к любой другой), этим доказано — в предположении, что для бивектора $A \wedge B$ существуют петли u_s, — что *оператор кривизны*

$$R(A, B)\colon \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0 \tag{25}$$

определен корректно (зависит только от связности H и бивектора $A \wedge B$).

Но для любого ли бивектора $A \wedge B \neq 0$ можно построить петли u_s, $0 < s < s_0$?

Оказывается, что это возможно только при некоторых условиях на бивектор $A \wedge B$. Рассмотрим этом вопрос подробнее.

Пусть A и B — произвольные линейно независимые векторы пространства $\mathbf{T}_{b_0}\mathcal{B}$. Определим функции $x^k(\alpha, \beta)$ формулой

$$x^k(\alpha, \beta) = \alpha A^k + \beta B^k, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{26}$$

Геометрически это означает, что за элементарную поверхность (13) мы принимаем поверхность, являющуюся в координатах $x^1, \ldots, x^m$ плоскостью с направляющим бивектором $A \wedge B$. Координатными векторами $\boldsymbol{x}_\alpha$ и $\boldsymbol{x}_\beta$ этой поверхности являются векторы A и B. На (α, β)-плоскости этим векторам соответствуют единичные орты координатных осей $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ и $\boldsymbol{j} = (0, 1)$.

Пусть G_s — квадрат (α, β)-плоскости, построенный на векторах $s\boldsymbol{i}$, $s\boldsymbol{j}$ (и имеющий, следовательно, площадь s^2), а γ_s — его граница, пробегаемая в положительном направлении (против часовой стрелки). Петля u_s на поверхности (13), отвечающая петле γ_s, удовлетворяет, очевидно, условиям 1, 3 и 4 (с $c = 1$). Что же касается условия 2, то функции (12) для петли γ_s имеют вид

$$\alpha(t) = s\gamma(t), \quad \beta(t) = s\gamma(1-t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где

$$\gamma(t)=\begin{cases} u_t, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/4, \\ 1, & \text{если } 1/4 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 3-4t, & \text{если } 1/2 \leqslant t \leqslant 3/4, \\ 0, & \text{если } 3/4 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

и, значит, удовлетворяют неравенствам

$$|\dot{\alpha}(t)| \leqslant 4s, \quad |\dot{\beta}(t)| \leqslant 4s.$$

Поэтому условие 2 будет выполнено при $4M \leqslant 1$, где

(27) $$M = \max_k (|A^k| + |B^k|).$$

Мы видим, таким образом, что если для векторов A и B имеет место неравенство $M \leqslant 1/4$, где M — число (27), то построенные петли u_s удовлетворяют условиям 1—4 и потому для них будет иметь место формула (24). Следовательно, для таких векторов оператор $R(A, B)$ определен корректно.

Однако, поскольку для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$R(\lambda A, B) = R(A, \lambda B) = \lambda R(A, B),$$

мы все же получаем, что *оператор $R(A, B)$ определен корректно для любых векторов A, $B \in \mathbf{T}_{b_0}\mathcal{B}$.*

Если $A \wedge B = 0$, то, по определению, $R(A, B) = 0$.

Наглядно каждую петлю u_s можно представлять себе как результат обхода параллелограмма, построенного на векторах sA, sB. Поэтому на традиционном языке анализа результат произведенного исследования означает, что *при параллельном перенесении вектора $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ по бесконечно малому параллелограмму, задаваемому бивектором $s^2(A \wedge B)$, вектор p_0 приобретает приращение с точностью до бесконечно малых высшего порядка, равное $-s^2R(A, B)\,p_0$.*

Пусть X и Y — произвольные векторные поля на многообразии $\mathcal{B}$. Тогда в каждой точке $b \in \mathcal{B}$ определен линейный оператор

$$R(X_b, Y_b)\colon \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}_b,$$

и, значит, для каждого сечения $s \in \Gamma\xi$ расслоения ξ вектор $R(X_b, Y_b)\,s(b) \in \mathcal{F}_b$.

Поэтому формула

$$[R(X, Y)s](b) = R(X_b, Y_b)s(b), \qquad b \in \mathscr{B},$$

определяет на $\mathscr{B}$ некоторое сечение $R(X, Y)s$ расслоения ξ. В каждой карте координаты этого сечения выражаются формулой

$$(28) \qquad [R(X, Y)s]^i = R^i_{j,kl} X^k Y^l s^j,$$

откуда, в частности, следует, что *сечение* $R(X, Y)s$ *гладко* (принадлежит $\Gamma\xi$). Таким образом, мы видим, что *для любых векторных полей* $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ *определено отображение*

$$(29) \qquad R(X, Y): \Gamma\xi \to \Gamma\xi$$

$\mathsf{F}\mathscr{B}$*-модуля* $\Gamma\xi$ *в себя*. При этом легко видеть (например, из формулы (28)), что *отображение* (29) $\mathsf{F}\mathscr{B}$*-линейно*.

Следовательно, соответствие $(X, Y) \mapsto R(X, Y)$ задает некоторое отображение

$$(30) \qquad R: \mathfrak{a}\mathscr{B} \times \mathfrak{a}\mathscr{B} \to \mathrm{End}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}\, \Gamma\xi$$

прямого произведения $\mathfrak{a}\mathscr{B} \times \mathfrak{a}\mathscr{B}$ в модуль $\mathrm{End}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}\, \Gamma\xi$ всех $\mathsf{F}\mathscr{B}$-линейных отображений $\Gamma\xi \to \Gamma\xi$, очевидным образом линейное (и даже $\mathsf{F}\mathscr{B}$-линейное) по каждому из аргументов.

Заметим, что

$$(31) \qquad R(Y, X) = -R(X, Y)$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$.

Отображение (29) называется *оператором кривизны*, отвечающим векторным полям X и Y. Что же касается отображения (30), то в силу отождествлений

$$\mathrm{End}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}\, \Gamma\xi = \mathrm{Hom}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi) = \mathrm{Mor}(\xi, \xi) = \\ = \Gamma(\mathrm{Hom}(\xi, \xi)) = \Gamma(\mathrm{End}\,\xi)$$

(см. формулу (19) лекции 11) оно представляет собой $\mathsf{F}\mathscr{B}$-линейное отображение

$$(32) \qquad R: \mathfrak{a}\mathscr{B} \times \mathfrak{a}\mathscr{B} \to \Gamma(\mathrm{End}\,\xi)$$

и, следовательно, является (см. задачу 21 лекции 16 и соотношение (31)) дифференциальной формой степени 2 (кососимметрическим тензорным полем типа (2,0)) на многообразии $\mathscr{B}$ со значениями в векторном расслоении $\mathrm{End}\,\xi$. Эта дифференциальная форма (тензорное поле) называется *тензором кривизны* связности H.

Обратим внимание, что сечениями расслоения $\operatorname{End}\xi = \xi^* \otimes \xi$ являются ξ-тензорные поля над $\mathscr{B}$ типа (1,1).

Замечание 1. В литературе можно встретить другое определение тензора кривизны, отличающейся от нашего знаком. Обозначения также варьируются — вместо $R^i_{j,kl}$ пишут $R^i{}_{jkl}$, $R_{j,kl}{}^i$, $R_{jkl}^{\cdots i}$ и т. д. и т. п.

Задача 1. Для любой формы R на $\mathscr{B}$ со значениями в $\operatorname{End}\xi$ и любого гладкого отображения $f\colon \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ определите форму f^*R на $\mathscr{B}'$ со значениями в $\operatorname{End} f^*\xi$ и покажите, что в случае, когда R является тензором кривизны связности H, форма f^*R будет тензором кривизны связности f^*H.

Формула (21) определяет гладкие функции $R^i_{j,kl}$ на произвольной координатной тривиализирующей окрестности U. Эти функции называются *компонентами* тензора R над U.

Пусть $R^{i'}_{j',k'l'}$ — компоненты тензора R над другой координатной тривиализирующей окрестностью U'. Оказывается, что *на пересечении* $U \cap U'$ *имеет место соотношение*

$$R^{i'}_{j',k'l'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} R^i_{j,kl} \tag{33}$$

(мы используем стандартные обозначения, введенные в лекции 10; см., в частности, формулу (17) лекции 10). Доказательство этого соотношения можно провести автоматической выкладкой, использующей формулу (17) лекции 10. Однако эта выкладка довольно канительна, и мы поступим по-другому. (Тем не менее читателю будет очень полезно — чтобы хотя бы набить руку в тензорных вычислениях — провести все же ее самому.)

Именно, мы воспользуемся тем, что для произвольной точки $b_0 \in U \cap U'$ и любых векторов A, $B \in \mathbf{T}_{b_0}\mathscr{B}$ у нас корректно определен линейный оператор (25), причем в базисе линеала $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$, отвечающего заданной на U тривиализации, этот оператор имеет матрицу $\| R(A, B)^i_j \| = \| R^i_{j,kl} A^k B^l \|$, а в базисе, отвечающем тривиализации, заданной на U', — матрицу $\| R(A, B)^{i'}_{j'} \| = \| R^{i'}_{j',k'l'} A^{k'} B^{l'} \|$. Следовательно, согласно общему правилу о связи матриц одного и того же оператора в различных базисах (см. лекцию II.15), для этих матриц имеет место формула

$$R(A, B)^{i'}_{j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} R(A, B)^i_j,$$

т. е. формула

$$R^{i'}_{j',k'l'} A^{k'} B^{l'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} R^i_{j,kl} A^k B^l$$

(где, конечно, под $R^{i'}_{j',k'l'}$, $\varphi^{i'}_{i}$, $\varphi^{j}_{j'}$ и $R^{i}_{j,kl}$ имеются в виду значения этих функций в точке b_0). Поскольку

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} A^{k'} \quad \text{и} \quad B^l = \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} B^{l'},$$

это — в силу произвольности чисел $A^{k'}$ и $B^{l'}$ — доказывает формулу (33) (в точке b_0, а потому и на всем пересечении $U \cap U'$).

Это рассуждение фактически использует только тот факт, что формулы (28) корректно определяют по функциям $R^{i}_{j,kl}$ тензор (30). Поэтому *формула* (33) *справедлива для компонент любого тензора типа* (2, 0) *со значениями в* End ξ.

Задача 2. Покажите, что если над каждой координатной тривиализирующей окрестностью U заданы функции $R^{i}_{j,kl}$, причем для любых двух окрестностей U и U' на пересечении $U \cap U'$ имеет место формула (33), то формулы (28) корректно определяют некоторый тензор (30) типа (2, 0) со значениями в End ξ.

Следовательно, такого рода тензоры мы можем отождествлять с наборами функций $R^{i}_{j,kl}$, преобразующихся по формуле (33).

Этот факт позволяет нам ввести тензор R, просто задавая его компоненты формулой (21) (без каких-либо объяснений ее происхождения). Конечно, тогда проверка соотношений (33) на основе формулы (17) лекции 10 делается обязательной. Впрочем, эту проверку можно обойти (или, точнее, сдвинуть в другое более удобное место), если выразить оператор $R(X, Y)$ через операторы ковариантных производных

$$\nabla_X, \ \nabla_Y\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi,$$

отвечающие векторным полям X и Y.

В координатах производные ∇_X и ∇_Y выражаются (см. формулу (10) лекции 11) формулами

$$(\nabla_X s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) X^k,$$

$$(\nabla_Y s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) Y^k.$$

Поэтому

$$(\nabla_X\nabla_Y s)^i=\left(\frac{\partial(\nabla_Y s)^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kj}(\nabla_Y s)^j\right)X^k=$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{lp}s^p\right)Y^l\right]+\Gamma^i_{kj}\left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l}+\Gamma^j_{lp}s^p\right)Y^l\right]X^k=$$
$$=\frac{\partial^2 s^i}{\partial x^k\partial x^l}X^kY^l+\frac{\partial s^i}{\partial x^l}X^k\frac{\partial Y^l}{\partial x^k}+\frac{\partial\Gamma^i_{lp}}{\partial x^k}s^pX^kY^l+$$
$$+\Gamma^i_{lp}\frac{\partial s^p}{\partial x^k}X^kY^l+\Gamma^i_{lp}s^pX^k\frac{\partial Y^l}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kj}\frac{\partial s^j}{\partial x^l}X^kY^l+$$
$$+\Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{lp}s^pX^kY^l.$$

Аналогичное выражение для $(\nabla_Y\nabla_X s)^i$ получается перестановкой символов X и Y или — после переименования индексов суммирования — перестановкой индексов k и l. Поэтому при вычитании $(\nabla_Y\nabla_X s)^i$ из $(\nabla_X\nabla_Y s)^i$ первые члены этих выражений — ввиду свойства симметричности вторых смешанных частных производных — сократятся. Кроме того, так как четвертый и шестой члены каждого выражения получаются друг из друга — после переименования индексов суммирования — перестановкой k и l, то эти члены также сократятся (четвертый — с шестым, а шестой — с четвертым). Разность же третьих и седьмых членов будет равна

$$R^i_{j,kl}s^jX^kY^l=[R(X,Y)s]^i$$

(см. формулу (21)). Наконец, оставшиеся члены дадут нам сумму

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^l}\left(X^k\frac{\partial Y^l}{\partial x^k}-Y^k\frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right)+\Gamma^i_{lp}s^p\left(X^k\frac{\partial Y^l}{\partial x^k}-Y^k\frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right),$$

в силу формулы (24) лекции III.16 равную

$$\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{lj}s^j\right)[X,Y]^l=(\nabla_{[X,Y]}s)^i.$$

Этим доказано, что $\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X=R(X,Y)+\nabla_{[X,Y]}$ (на каждой координатной тривиализующей окрестности, а потому и всюду), т. е.

$$R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}=\tag{34}$$
$$=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}.$$

Формулу (34) можно принять за определение операторов $R(X,Y)$. Это определение, не оставляя желать ничего лучшего в отношении простоты и краткости, имеет, однако, формальный характер и не вскрывает геометрического смысла этих операторов.

Конечно, принимая формулу (34) за определение, мы должны, во-первых, проверить, что эта формула задает $\mathsf{F}\mathcal{B}$-линейное отображение $R(X, Y)\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi$, а во-вторых — что соответствующее отображение (30) также $\mathsf{F}\mathcal{B}$-линейно.

Задача 3. Сделайте это.

Наиболее просто и экономно тензор кривизны строится, исходя из ковариантного дифференцирования

$$\nabla\colon \Gamma\xi \to \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi),$$

отвечающего связности H (см. лекцию 13).

Пусть θ — линейная дифференциальная форма на $\mathcal{B}$ (элемент модуля $\Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}}) = \Gamma(\Lambda^1\tau_{\mathcal{B}})$), а ψ — сечение расслоения $\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi$ (линейная дифференциальная форма на $\mathcal{B}$ со значениями в ξ). В каждой точке $b \in \mathcal{B}$ элемент ψ_b слоя $T^*_b\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}^\xi_b = \Lambda^1 T_b\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}^\xi_b$ расслоения $\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi = \Lambda^1\tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi$ имеет вид $\sum a_i \otimes p_i$, где $a_i \in T^*_b\mathcal{B}$, $p_i \in \mathcal{F}^\xi_b$.

Задача 4. Докажите, что формула

$$(\theta \wedge \psi)_b = \sum_i (\theta_b \wedge a_i) \otimes p_i$$

корректно определяет элемент $(\theta\wedge\psi)_b$ слоя $\Lambda^2 T_b\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}^\xi_b$ расслоения $\Lambda^2\tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi$ и, значит, формула

$$b \mapsto (\theta\wedge\psi)_b, \qquad b \in \mathcal{B},$$

— некоторое сечение $\theta\wedge\psi$ расслоения $\Lambda^2\tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi$.

Если расслоение ξ тривиально над окрестностью $U \subset \mathcal{B}$ и $s_1, \ldots, s_n$ — соответствующая тривиализация (базис $\mathsf{F}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$), то форма ψ над U единственным образом представляется в виде $\sum \alpha_i \otimes s_i$, где α_i — линейные дифференциальные формы на U, а форма $\theta\wedge\psi$ будет задаваться формулой

$$\theta\wedge\psi = \sum (\theta\wedge\alpha_i) \otimes s_i \qquad \text{над } U.$$

Это, в частности, показывает, что сечение $\theta\wedge\psi$ гладко (принадлежит $\Gamma(\Lambda^2\tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi)$).

Задача 5. Докажите, что *существует единственное* $\mathbb{R}$-*линейное отображение*

$$\hat{\nabla}\colon \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi) \to \Gamma(\Lambda^2\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi),$$

удовлетворяющее тождеству

$$\hat{\nabla}(\theta\otimes s)=d\theta\otimes s-\theta\wedge\nabla s,\quad \theta\in\Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}),\quad s\in\Gamma(s).$$

Докажите, что *это отображение удовлетворяет также тождеству Лейбница*

$$\hat{\nabla}(f\psi)=df\wedge\psi+f\hat{\nabla}\psi,\qquad f\in\mathsf{F}\mathscr{B},\ \psi\in\Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi).$$

[Указание. Над произвольной тривиализующей окрестностью $U\subset\mathscr{B}$ отображение $\hat{\nabla}$ задается формулой

$$\hat{\nabla}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes s_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(d\alpha_i\otimes s_i-\alpha_i\wedge\nabla s_i),$$

где $\alpha_i\in\Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}|_U)$, а $s_1, \ldots, s_n$ — базис $\mathsf{F}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$.]

Таким образом, мы имеем два отображения

$$\Gamma\xi\xrightarrow{\nabla}\Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi)\xrightarrow{\hat{\nabla}}\Gamma(\Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\xi)$$

и можем рассмотреть их композицию

$$\hat{\nabla}\circ\nabla\colon\ \Gamma\xi\to\Gamma(\Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\xi).$$

Легко видеть, что *последнее отображение* $\mathsf{F}\mathscr{B}$-*линейно*:

$$\begin{aligned}(\hat{\nabla}\circ\nabla)(fs)&=\hat{\nabla}(df\otimes s+f\nabla_s)=\\&=ddf\otimes s-df\wedge\nabla s+df\wedge\nabla s-f(\hat{\nabla}\circ\nabla)s=\\&=f(\hat{\nabla}\circ\nabla)s.\ \square\end{aligned}$$

Поэтому (см. предложение 3 лекции 11) существует такой морфизм

$$R\colon\ \xi\to\Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\xi \tag{35}$$

векторых расслоений (т. е. — см. задачу 14 лекции 12 — сечение расслоения $\operatorname{Hom}(\xi,\ \Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\xi)$), что

$$\hat{\nabla}\circ\nabla=R\circ. \tag{36}$$

Задача 6. Докажите, что *для любых трех векторных расслоений ξ, η, ζ имеет место естественный изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}(\xi,\ \eta\otimes\zeta)=\eta\otimes\operatorname{Hom}(\xi,\ \zeta).$$

В частности,

$$\operatorname{Hom}(\xi,\ \Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\xi)=\Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\operatorname{End}\xi,$$

откуда следует, что морфизм (35) мы можем интерпретировать как дифференциальную форму степени 2 на $\mathscr{B}$ со значениями в расслоении $\operatorname{End}\xi$. Мы будем называть эту форму *формой кривизны* связности H. Сравним ее с тензором кривизны (32).

Пусть U — произвольная координатная тривиализующая окрестность и $s_1, \ldots, s_n$ — базис $\mathsf{F}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$. Тогда для любого $j=1, \ldots, n$ должны иметь место равенства вида

$$R \circ s_j = \Omega_j^i \otimes s_i,$$

где

$$\Omega_j^i = \sum_{k<l} R_{j,kl}^i \, dx^k \wedge dx^l = 2R_{j,kl}^i \, dx^k \wedge dx^l$$

— некоторые дифференциальные формы степени 2 на U, составляющие матрицу

(37) $$\Omega = \| \Omega_j^i \|.$$

Коэффициенты $R_{j,kl}^i$ пока никак не связаны с тензором кривизны.)

Матрица Ω называется *матрицей форм кривизны* (или просто *матрицей кривизны*) связности H над окрестностью U. (Употребляется также термин *матричнозначная форма кривизны.*)

Пусть $\omega = \| \omega_j^i \|$ — матрица форм связности H на окрестности U.

По определению

$$\begin{aligned} \Omega_j^i \otimes s_i = \hat{\nabla}(\nabla s_j) = \hat{\nabla}(\omega_j^i \otimes s_i) &= \\ = d\omega_j^i \otimes s_i - \omega_j^i \wedge \nabla s_i &= \\ = (d\omega_j^i - \omega_j^p \wedge \omega_p^i) \otimes s_i &= \\ = (d\omega_j^i + \omega_p^i \wedge \omega_j^p) \otimes s_i & \end{aligned}$$

и, следовательно,

(38) $$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_p^i \wedge \omega_j^p.$$

В матричной форме это равенство имеет вид

(38′) $$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega,$$

а в координатной — вид

$$\sum_{k<l} R_{j,kl}^i \, dx^k \wedge dx^l =$$
$$= \sum_{k<l} \left(\frac{\partial \Gamma_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} \right) dx^k \wedge dx^l + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p dx^k \wedge dx^l.$$

Из последней формулы следует, что

$$R_{j,kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p - \Gamma_{lp}^i \Gamma_{kj}^p$$

(при $k < l$, а потому — в силу кососимметричности коэффициентов $R^i_{j,kl}$ по k и l — и для любых k и l), т. е., как и подсказывают обозначения, *коэффициенты $R^i_{j,kl}$ являются не чем иным, как компонентами тензора кривизны.*

Кроме того, мы видим, что значения $\Omega^i_j(A, B)$ форм Ω^i_j на векторах $A, B \in \mathbf{T}_b\mathscr{B}$ — это в точности числа $R(A, B)^i_j$ из формулы (22). В соответствии с этим матрицу $\| R(A, B)^i_j \|$ мы будем в дальнейшем обозначать также символом $\Omega(A, B)$ (или — если нужно указать точку b — символом $\Omega_b(A, B)$).

Формула (38′) называется структурным уравнением Картана.

Замечание 2. В некоторых учебниках дифференциальной геометрии структурное уравнение пишется в виде

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

Причина изменения знака состоит в том, что в этих учебниках используются транспонированные матрицы Ω и ω (т. е. считается, что верхний индекс нумерует не строки, а столбцы). Конечно, никакого принципиального значения это не имеет.

Таким образом, для тензора кривизны мы имеем четыре различных определения. Первое обладает преимуществом геометричности, но приводит к длинным выкладкам. Второе (даваемое формулой (21)) слишком формально, а третье (даваемое формулой (34)) слишком сильно привязано к векторным полям, которые приходится все время волочить за собой. Наиболее элегантно четвертое определение (даваемое формулой (36) или, если хотите, формулой (38)), которое хотя и требует некоторой предварительной работы, но оказывается на практике наиболее удобным, позволяя использовать гибкий и эффективный аппарат дифференциальных форм. В дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться им.

Преимущества, доставляемые дифференциальными формами, ярко демонстрируются на примере доказательства следующего предложения.

Предложение 1 (тождество Бианки). *На каждой окрестности U имеет место равенство*

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \tag{39}$$

Доказательство. Согласно формуле (38′) $d\omega = \Omega - \omega\wedge\omega$ и

$$d\Omega = dd\omega + d(\omega\wedge\omega) = d\omega\wedge\omega - \omega\wedge d\omega.$$

Поэтому

$$d\Omega = (\Omega - \omega\wedge\omega)\wedge\omega - \omega\wedge(\Omega - \omega\wedge\omega) = \Omega\wedge\omega - \omega\wedge\Omega. \ \square$$

В развернутом виде соотношение (39) имеет вид

$$d\Omega^i_j = \Omega^i_p\wedge\omega^p_j - \omega^i_p\wedge\Omega^p_j,$$

где

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\,dx^k, \quad \Omega^i_j = \sum_{k<l} R^i_{j,\,kl}\,dx^k\wedge dx^l,$$

и потому

$$d\Omega^i_j = \sum_{k<l<s}\left(\frac{\partial R^i_{j,\,ls}}{\partial x^k} - \frac{\partial R^i_{j,\,ks}}{\partial x^l} + \frac{\partial R^i_{j,\,kl}}{\partial x^s}\right)dx^k\wedge dx^l\wedge dx^s,$$

$$\Omega^i_p\wedge\omega^p_j = \\ = \sum_{k<l<s}\left(R^i_{p,\,kl}\Gamma^p_{js} - R^i_{p,\,ls}\Gamma^p_{jk} + R^i_{p,\,sk}\Gamma^p_{jl}\right)dx^k\wedge dx^l\wedge dx^s,$$

$$\omega^i_p\wedge\Omega^p_j = \\ = \sum_{k<l<s}\left(\Gamma^i_{pk}R^p_{j,\,ls} - \Gamma^i_{pl}R^p_{j,\,ks} + \Gamma^i_{ps}R^p_{j,\,kl}\right)dx^k\wedge dx^l\wedge dx^s.$$

Здесь удобно ввести подходящие сокращенные обозначения.

Пусть A_{kls} — массив величин, зависящих от трех индексов (пространственная матрица). Мы положим

(40) $$A_{(kls)} = A_{kls} + A_{lsk} + A_{skl}.$$

Говорят, что $A_{(kls)}$ получается из A_{kls} *циклированием*.

Ясно, что $A_{(kls)}$ не меняется при циклической перестановке индексов:

$$A_{(kls)} = A_{(lsk)} = A_{(skl)}.$$

Аналогичные обозначения употребляются, когда A_{kls} зависят еще от других индексов. (При этом, в случае необходимости, индексы, по которым циклирование не происходит, выделяются прямыми черточками. Например, запись $A_{(kl|p|q)}$ означает результат циклирования по k, l и q при неизменном p.)

Обозначая дифференцирование по x^k символом ∂_k и учитывая кососимметричность функций $R^i_{j,kl}$ по k и l, мы теперь видим, что коэффициентами форм $d\Omega^i_j$, $\omega^i_p\wedge\Omega^p_j$ и

$\omega_p^i \wedge \Omega_j^p$ являются соответственно функции

$$\partial_{(k} R^i_{|j|,\, ls)},\quad R^i_{p,\,(kl} \Gamma^p_{|j|\, s)} = \Gamma^p_{j\,(k} R_{|p|,\, ls)},\quad \Gamma^i_{p\,(k} R^p_{|j|,\, ls)},$$
$$k < l < s.$$

Это означает, что тождество (39) равносильно тождеству

$$\partial_{(k} R^i_{|j|,\, ls)} - \Gamma^p_{j\,(k} R^i_{|p|,\, ls)} + \Gamma^i_{p\,(k} R^p_{|j|,\, ls)} = 0. \tag{41}$$

Для любых фиксированных l и s функции $R^i_{j,\,ls}$ являются компонентами некоторого ξ-тензорного поля $\boldsymbol{R}_{ls}$ типа (1,1), определенного на U. Согласно общей формуле (13) лекции 11 компоненты частных ковариантных производных $\nabla_k \boldsymbol{R}_{ls}$ этого поля выражаются формулой

$$(\nabla_k \boldsymbol{R}_{ls})^i_j = \partial_k R^i_{j,\,ls} - \Gamma^p_{jk} R^i_{p,\,ls} + \Gamma_{pk} R^p_{j,\,ls}.$$

Сравнив эту формулу с формулой (41), мы немедленно получим, что формула (41) равносильна соотношению

$$(\nabla_{(k} \boldsymbol{R}_{ls)})^i_j = 0, \tag{42}$$

т. е. соотношению $\nabla_{(k} \boldsymbol{R}_{ls)} = 0$.

Это есть тождество Бианки, записанное в тензорном виде.