Лекция 20

Тензор кривизны и группа голономии.— Выражение алгебры голономии через тензор кривизны.— Случай плоской связности.— Ковариантно постоянные тривиализации.— Связности, обладающие абсолютным параллелизмом.— Переход к главным расслоениям.— Параллельный перенос и группа голономии для главных расслоений.— Теорема редукции для главиых расслоений.— Форма кривизны связности на главном расслоении.— Теорема Амброза—Сингера.— Примеиение теоремы Амброза—Сиигера к векторным расслоениям.

В этой лекции мы изучим взаимоотношение тензора кривизны R с суженной группой голономии Φ_e связности H в точке $b_0 \in \mathcal{B}$.

Выкладки предыдущей лекции, на основе которых мы ввели тензор кривизны, показывают, что знание тензора R в точке b_0 (т. е. знание всех операторов $R(A, B)$, $A, B \in \mathbf{T}_{b_0}\mathcal{B}$) позволяет вычислить с точностью до бесконечно малых высшего порядка параллельный перенос вдоль любых бесконечно малых петель, начинающихся и кончающихся в точке b_0. Следовательно, знание этого тензора на всем многообразии $\mathcal{B}$ позволяет вычислить—с той же точностью—параллельный перенос вдоль любого лассо с бесконечно малой петлей. Но мы знаем (см. следствие 1 леммы 3 лекции 18), что каждая гомотопная нулю петля u комбинаторно эквивалентна произведению сколь угодно малых лассо и, следовательно, что параллельный перенос Π_u является произведением параллельных переносов по этим лассо. Заменив параллельные переносы по лассо их главными частями, мы получим для Π_u аналог интегральной суммы (в которой роль сложения играет умножение линейных операторов), причем пределом этой суммы будет отображение Π_u. Это показывает, что *тензор R полностью определяет группу Φ_e*. (Заметим, что знания тензора R только в точке b_0 для определения группы Φ_e недостаточно.)

Конечно, чтобы привести эти соображения в аккуратный вид и получить явные формулы для вычисления элементов группы Φ_e надо, вообще говоря, предварительно построить соответствующую теорию операторного интегрирования. Это построение, хотя в принципе и очевидное, необходимо должно быть весьма громоздким (хотя бы из-за некоммутативности умножения операторов). Поэтому стоит поискать обходный путь. Первое, что здесь приходит в голову,—это заменить интеграционный подход равносильным дифференциальным и выразить через тензор R не группу Ли Φ_e, а ее алгебру Ли $\mathfrak{f}$, являющуюся подалгеброй алгебры Ли $[\operatorname{End}\mathcal{F}_{b_0}]$. (Эта алгебра называется, кстати сказать, *алгеброй голономии* связности H в точке b_0.)

С этой целью мы, возвращаясь к формуле (24) лекции 19, введем в рассмотрение кривую $t\longmapsto v(t)$ в группе Φ_e, определенную на отрезке $[0,\ t_0]$, $t_0=s_0^2$, формулой

$$
(1)\qquad v(t)=\begin{cases}\Pi_{u_s}, & \text{если}\quad 0<t\leqslant t_0,\quad \text{где } s=\sqrt{t},\\ \mathrm{id}, & \text{если}\quad t=0.\end{cases}
$$

Из формулы (24) лекции 19 непосредственно следует, что эта кривая гладка в точке $t=0$ и ее касательным вектором в этой точке является—с точностью до знака—оператор $R(A,\ B)$.

Таким образом, *все операторы вида* $R(A,\ B)$, $A, B\in\mathbf{T}_{b_0}\mathcal{B}$, *принадлежат алгебре голономии* $\mathfrak{f}$.

Однако этими операторами (и их линейными комбинациями) алгебра Ли $\mathfrak{f}$, вообще говоря, отнюдь не исчерпывается. Действительно, как мы знаем, произвольный путь w, соединяющий точку b_0 с некоторой точкой $b\in\mathcal{B}$, определяет изоморфизм группы $\Phi_e(b)$ на группу $\Phi_e=\Phi_e(b_0)$ и, значит, алгебры $\mathfrak{f}(b)$ на алгебру $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}(b_0)$. Обозначим последний изоморфизм символом $w^{\#}$. Тогда в алгебре $\mathfrak{f}$ для любых векторов A, $B\in\mathbf{T}_b\mathcal{B}$ будет определен элемент $w^{\#}R(A,\ B)$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{f}$ содержит также все операторы вида $w^{\#}R(A,\ B)$, A, $B\in\mathbf{T}_b\mathcal{B}$, а значит, и все их линейные комбинации.

Предложение 1. *Алгебра $\mathfrak{f}$ состоит из всех линейных комбинаций элементов вида* $w^{\#}R(A,\ B)$, $A, B\in\mathbf{T}_b\mathcal{B}$, $b\in\mathcal{B}$.

Таким образом, зная тензор R, мы можем вычислить алгебру Ли $\mathfrak{f}$, а по ней восстановить и группу Ли Φ_e.

Можно предложить следующий путь доказательства предложения 1.

Каждый элемент алгебры $\mathfrak{f}$ является касательным вектором в точке $t=0$ к некоторой гладкой кривой в группе Φ_e, проходящей при $t=0$ через точку e. Естественно предполагать, что на некотором отрезке вида $[0,\ t_0]$ эту кривую можно представить в виде (1), где u_s—семейство гомотопных нулю петель, гладко зависящих от параметра $s=\sqrt{t}$ (и такое, что $\Pi_{u_0}=\mathrm{id}$). Согласно следствию 1 леммы 3 лекции 18 каждый элемент Π_{u_s} можно разложить в произведение вида $\Pi_{\overline{u}_s^{(1)}} \ldots \Pi_{\overline{u}_s^{(m)}}$, где $\overline{u}_s^{(1)}, \ldots, \overline{u}_s^{(m)}$ — малые лассо. Наглядно очевидно, что это можно сделать так, чтобы m было одним и тем же для всех достаточно малых s и чтобы каждое лассо $\overline{u}_s^{(k)}$ имело вид $w_k u_s^{(k)} w_k^{-1}$, где пути w_k не зависят от s, а $u_s^{(k)}$ представляют собой малые петли, гладко зависящие от s (и удовлетворяющие условиям 1—4 из лекции 19). Тогда касательный вектор в точке $s=0$ к кривой (1) будет (см. задачу 17 лекции 14) суммой касательных векторов к кривым (1), отвечающим петлям $u_s^{(k)}$, т. е. будет суммой элементов вида $w_k^{\#} R(A_k, B_k)$, где $A_k, B_k \in \mathbf{T}_{w_k(1)}\mathcal{B}$. Таким образом, каждый элемент алгебры $\mathfrak{f}$ действительно является линейной комбинацией элементов вида $w^{\#} R(A, B)$.

Конечно, хотя это эвристическое рассуждение и делает предложение 1 достаточно убедительным, но чтобы превратить его в формальное доказательство, требуется очень много технической работы. Поэтому ниже мы докажем предложение 1 совсем другим способом.

Ситуация значительно упрощается при $R=0$ (т. е. когда $R^i_{j,kl}=0$ на каждой окрестности U). В этом случае каждый член указанной выше интегральной суммы (или, лучше сказать, интегрального произведения) будет с точностью до величин высшего порядка малости тождественным оператором id, и потому ее предел (независимо от порядка слагаемых—сомножителей) будет равен id. Таким образом, если $R=0$, то $\Phi_e=\{e\}$. Поскольку обратное утверждение (если $\Phi_e=\{e\}$, то $R=0$) очевидно, мы видим, что справедливо следующее предложение (являющееся, конечно, всего лишь частным случаем предложения 1):

Предложение 2. *Равенство $R=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Phi_e=\{e\}$:*

$$R=0 \Leftrightarrow \Phi_e=\{e\}.$$

Связность, для которой $R=0$, называется *плоской*.

Хотя при $R=0$ изложенные выше «интегральные» соображения можно без труда превратить в четкое доказательство (сделайте это!), мы все же дадим сейчас предложению 2 независимое «дифференциальное» доказательство, которое послужит нам образцом для более сложного доказательства предложения 1.

Напомним, что векторное поле X на тотальном пространстве $\mathscr{E}$ расслоения ξ называется *горизонтальным* по отношению к связности H, если $X_p \in H_p$ для любой точки $p \in \mathscr{E}$, т. е. если $X^H = X$ (см. лекцию 10). Все горизонтальные поля составляют подпространство пространства $\mathfrak{a}\mathscr{E}$ всех векторных полей на $\mathscr{E}$. Мы будем обозначать это подпространство символом $\mathfrak{a}[H]$ (ср. обозначения, введенные в лекции 14; напомним — см. задачу 21 лекции 14 — что гладкие поля подпространств и распределения — это одно и то же).

Локально (над координатными тривиализующими окрестностями U) горизонтальные поля характеризуются равенствами

$$\theta^1(X) = 0, \ \ldots, \ \theta^n(X) = 0,$$

где (см. лекцию 10) θ^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — такие дифференциальные формы на U, что

$$\theta^i = da^i + \omega^i_j a^j, \qquad i = 1, \ldots, n$$

(где, конечно, формы связности ω^i_j рассматриваются как формы на $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$, т. е., иными словами, представляют собой на самом деле формы $\pi^*\omega^i_j$).

Но при $R = 0$ (т. е. при $\Omega = 0$) формы ω^i_j удовлетворяют соотношению

$$d\omega^i_j = -\omega^i_p \wedge \omega^p_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

и потому

$$\begin{aligned} d\theta^i &= dda^i + (d\omega^i_j)\, a^j - \omega^i_j \wedge da^j = \\ &= -(\omega^i_p \wedge \omega^p_j)\, a^j - \omega^i_j \wedge (\theta^j - \omega^j_p a^p) = \\ &= -\omega^i_j \wedge \theta^j, \end{aligned}$$

т. е.

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_j \qquad (\text{при } R = 0).$$

Следовательно, если $X, Y \in \mathfrak{a}[H]$ (и, значит, $\theta^i(X) = 0$, $\theta^j(Y) = 0$), то (см. — с учетом замечания 2 лекции II.9б — формулу (1) лекции II.8)

$$\begin{aligned} d\theta^i(X, Y) &= (\theta^j \wedge \omega^i_j)(X, Y) = \\ &= \theta^j(X)\, \omega^i_j(Y) - \omega^i_j(X)\, \theta^j(Y) = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны (см. формулу (6) лекции III.19),

$$d\theta^i(X, Y) = X\theta^i(Y) - Y\theta^i(X) - \theta^i[X, Y] = -\theta^i[X, Y].$$

Поэтому $\theta^i[X, Y] = 0$, т. е. $[X, Y] \in \mathfrak{a}[H]$.

Это доказывает, что при $R=0$ подпространство $\mathfrak{a}[H]$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathscr{E}$, т. е., иными словами, что *каждая плоская связность H представляет собой инволютивное распределение.*

Следовательно, согласно теореме Фробениуса (см. лекцию 14) связность H вполне интегрируема, т. е. через любую точку $p_0 \in \mathscr{E}$ проходит одно и только одно ее максимальное интегральное многообразие $\mathscr{X}$. По определению многообразие $\mathscr{X}$ характеризуется тем, что в любой его точке p имеет место равенство $\mathbf{T}_p\mathscr{X}=H_p$. Поэтому ограничение $\pi|_{\mathscr{X}}$ проекции π на $\mathscr{X}$ этально и, значит, является локальным диффеоморфизмом (даже накрытием). В частности, это означает, что точка $b_0=\pi(p_0)$ обладает в $\mathscr{B}$ окрестностью U, над которой существует такое сечение $s\colon U \to \mathscr{E}$ расслоения ξ, что $s(b_0)=p_0$ и $s(U)=\mathscr{X}\cap\pi^{-1}U$. (Можно сказать, что s осуществляет горизонтальный подъем в $\mathscr{E}$ *всей* окрестности U.)

Теперь мы уже можем непосредственно приступить к доказательству предложения 2.

Доказательство предложения 2. Для произвольной петли u в точке b_0, целиком расположенной в окрестности U, композиция $s\circ u$, где s—только что построенное сечение $U\to\mathscr{E}$, будет петлей в точке p_0, лежащей на многообразии $\mathscr{X}$ и поэтому горизонтальной. Поскольку $(s\circ u)(1)=p_0$, это доказывает, что для любой такой петли u имеет место равенство $\Pi_u=\mathrm{id}$.

Поэтому равенство $\Pi_u=\mathrm{id}$ имеет место и для любого малого лассо, а значит, в силу следствия 1 из леммы 3 лекции 18, и для любой петли u, гомотопной нулю. Следовательно, $\Phi_e=\{e\}$. □

Сечение s обладает также тем свойством, что $\nabla s=0$ (достаточно заметить, что $\nabla_X s=0$ для любого векторного поля X на $\mathscr{B}$). С другой стороны, если $p_1, \ldots, p_n$—базис линеала $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{b_0}$ и $s_1, \ldots, s_n$—соответствующие (т. е. такие, что $s_1(b_0)=p_1, \ldots, s_n(b_0)=p_n$) сечения, то над некоторой окрестностью точки b_0 (которую мы снова обозначим через U) сечения $s_1, \ldots, s_n$ будут, очевидно, образовывать базис $\mathsf{F}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$. Обратно, если U — такая окрестность точки p_0, что $\mathsf{F}U$-модуль $\Gamma(\xi|_U)$ обладает базисом $s_1, \ldots, s_m$, для которого $\nabla s_1=0, \ldots, \nabla s_n=0$, то, конечно, $R=0$ на U. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 3. *Связность H на векторном расслоении $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ тогда и только тогда является плоской связностью, когда многообразие $\mathscr{B}$ может быть покрыто открытыми множествами U, обладающими тем свойством, что в $\mathsf{F}U$-модуле $\Gamma(\xi|_U)$ существует базис $s_1, \ldots, s_n$, для которого*

$$\nabla s_1 = 0, \ \ldots, \ \nabla s_n = 0. \ \square$$

Такой базис $s_1, \ldots, s_n$ называется *ковариантно постоянной тривиализацией* расслоения ξ над U.

Связности, для которых тривиальна полная группа голономии Φ, называются *связностями с абсолютным параллелизмом.*

Задача 1. Докажите, что связность тогда и только тогда является связностью с абсолютным параллелизмом, когда для любых точек $b_0, b_1 \in \mathscr{B}$ отображение Π_u: $\mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_1}$ одно и то же для всех путей u, соединяющих точку b_0 с точкой b_1.

Заметим, что согласно теореме редукции из лекции 18 *связность с абсолютным параллелизмом может существовать только на тривиальном расслоении* ξ.

Существование эпиморфного отображения (6) лекции 18 доказывает, что в случае, когда многообразие $\mathscr{B}$ односвязно, группа Φ совпадает с группой Φ_e. Поэтому в силу предложения 2 *связность в векторном расслоении над односвязным многообразием тогда и только тогда обладает абсолютным параллелизмом, когда эта связность плоская* (а расслоение тривиально).

В частности, *если в расслоении над односвязным многообразием существует плоская связность, то это расслоение тривиально.*

Этот дифференциально-геометрический критерий тривиальности гладкого векторного расслоения на удивление часто полезен.

В общем случае предложения 1 доказательство осложняется необходимостью следить за изоморфизмами $w^\#$. Однако оказывается, что эти изоморфизмы можно формально элиминировать, если, выбрав в каждом слое $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, некоторый базис $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$, перейти от линейных операторов $\mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_b$ к их матрицам в этом базисе.

Пусть $\mathfrak{f}_p$ — матричная алгебра Ли, состоящая из матриц элементов алгебры голономии $\mathfrak{f}_b$, и пусть $R_p(A, B)$,

A, $B \in \mathbf{T}_b\mathscr{B}$,—матрица оператора кривизны $R(A, B)$ в базисе $\boldsymbol{p}$.

Из лекции 18 мы знаем, что если базис $\boldsymbol{p}$ линеала $\mathscr{F}_b$ получается из базиса $\boldsymbol{p}_0$ линеала $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$ параллельным переносом вдоль соединяющего точку b_0 с точкой b пути w, то индуцированный этим путем изоморфизм $\Phi(b) \to \Phi(b_0)$ переводит каждый элемент группы $\Phi(b)$ в элемент группы $\Phi(b_0)$ с той же матрицей. В частности, это означает, что *матрицей в базисе* $\boldsymbol{p}_0$ *элемента* $w^{\#}R(A, B)$, $A, B \in \mathbf{T}_b\mathscr{B}$, *алгебры Ли* $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_{\boldsymbol{p}_0}$ *служит матрица* $R_{\boldsymbol{p}}(A, B)$.

Следовательно, на матричном языке предложение 1 утверждает, что *для любого базиса* $\boldsymbol{p}_0$ *линеала* $\mathscr{F}_0$ *матричная алгебра Ли* $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_{\boldsymbol{p}_0}$ *состоит из линейных комбинаций матриц вида* $R_{\boldsymbol{p}}(A, B)$, *где* $\boldsymbol{p}$ *—всевозможные базисы слоев расслоения* ξ, *которые можно получить из базиса* $\boldsymbol{p}_0$ *параллельными переносами, а* A *и* B *—произвольные векторы пространства* $\mathbf{T}_b\mathscr{B}$, $b = \pi(\boldsymbol{p})$.

Поскольку базисы $\boldsymbol{p}$ являются не чем иным, как точками главного расслоения реперов $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, ассоциированного с векторным расслоением ξ (и, как мы знаем, — см. лекцию 16—гладкого, если гладко расслоение ξ), эта переформулировка наводит на мысль о справедливости аналогичного утверждения для любых главных $\mathscr{G}$-расслоений ξ. Чтобы убедиться в этом, мы должны сначала перенести на главные расслоения понятие параллельного переноса и группы (алгебры) голономии.

Пусть $\mathscr{G}$—группа Ли, $\mathscr{B}$—гладкое хаусдорфово многообразие, $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$—гладкое главное $\mathscr{G}$-расслоение над $\mathscr{B}$ и $\boldsymbol{H}$—связность на расслоении ξ.

Кривая $v\colon I \to \mathscr{E}$ называется *горизонтальной*, если $\dot{v}(t) \in \boldsymbol{H}_{v(t)}$ для любого $t \in I$. Говорят, что кривая $v\colon I \to \mathscr{E}$ *накрывает* кривую $u\colon I \to \mathscr{B}$ (является *поднятием* кривой u), если $u = \pi \circ v$. (Ср. в лекции 10 аналогичные определения для векторных расслоений.)

Предложение 4. *Для любой гладкой кривой* $u\colon I \to \mathscr{B}$, *любой точки* $t_0 \in I$ *и любой точки* $\boldsymbol{p}_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$, $b_0 = \pi(\boldsymbol{p}_0)$, *существует единственная горизонтальная кривая* $v\colon I \to \mathscr{E}$, *накрывающая кривую* u *и такая, что* $v(t_0) = \boldsymbol{p}_0$.

Мы докажем это предложение в следующей лекции. Пока же мы лишь заметим, что в случае, когда ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ, это предложение непосредственно вытекает из соответствующего предложения для векторных расслоений (предложение 1 лекции 11). [Действительно, чтобы построить v, достаточно параллельно перенести вдоль u каждый вектор базиса $\boldsymbol{p}_0$.]

Как правило, мы будем применять предложение 4 в случае, когда кривая u является путем (определена на отрезке $I=[0, 1]$), а $t_0=0$.

Так же, как и для векторных расслоений, точка $\boldsymbol{p}_1=v(1)$ обозначается символом $\Pi_u\boldsymbol{p}_0$ и отображение

$$\Pi_u\colon \mathscr{F}_{b_0}\to\mathscr{F}_{b_1}, \quad \boldsymbol{p}_0\mapsto\Pi_u\boldsymbol{p}_0,$$

где $b_1=u(1)$ называется *параллельным переносом* вдоль пути u. При композиции путей эти переносы перемножаются; если $u=u_1u_2$, то

$$\Pi_u=\Pi_{u_2}\circ\Pi_{u_1}. \tag{1}$$

(Ср. формулу (2) лекции 18.)

Задача 2. Определите отображение Π_u для кусочно гладких путей u и покажите, что формула (1) остается в силе и в этом случае. (Ср. лекцию 18.)

Так как связность $\boldsymbol{H}$ является эквивариантным полем подпространств, то для любого горизонтального пути $v\colon I\to\mathscr{E}$ и любого элемента $a\in\mathscr{G}$ путь

$$R_a\circ v\colon\ t\mapsto v(t)\,a, \qquad t\in I,$$

также горизонтален. Этот путь накрывает тот же путь $u\colon I\to\mathscr{B}$, но начинается в точке $\boldsymbol{p}_0a$, а кончается в точке $\boldsymbol{p}_1a$. Следовательно,

$$\Pi_u(\boldsymbol{p}_0a)=(\Pi_u\boldsymbol{p}_0)\,a, \qquad a\in\mathscr{G}, \tag{2}$$

т. е.

$$\Pi_u\circ R_a=R_a\circ\Pi_u$$

(отображение Π_u перестановочно с действиями группы $\mathscr{G}$ на слоях $\mathscr{F}_{b_0}$ и $\mathscr{F}_{b_1}$ соответственно).

Отображения Π_u, отвечающие петлям u в точке b_0, составляют группу преобразований слоя $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{b_0}$. Эта группа называется *группой голономии* главного расслоения ξ со связностью $\boldsymbol{H}$ в точке $b_0\in\mathscr{B}$ и обозначается символом $\Phi^{\xi}(b_0)$.

Выбрав в слое $\mathscr{F}_0$ точку $\boldsymbol{p}_0$, мы произвольному элементу Π_u группы $\Phi^{\xi}(b_0)$ поставим в соответствие элемент a_u группы $\mathscr{G}$, удовлетворяющий соотношению

$$\Pi_u\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}_0a_u.$$

Так как группа $\mathscr{G}$ свободно и транзитивно действует на $\mathscr{F}_0$, то элемент a_u существует и единственен.

Из формулы (2) следует, что для любых двух петель u_1, u_2 в точке b_0 имеет место равенство

$$(\Pi_{u_1} \circ \Pi_{u_2}) p_0 = \Pi_{u_1}(p_0 a_{u_2}) = \\ = (\Pi_{u_1} p_0) a_{u_2} = p_0 a_{u_1} a_{u_2},$$

показывающее, что отображение $\Pi_u \mapsto a_u$ является гомоморфизмом. Более того, так как $a_u = e$ тогда и только тогда, когда $\Pi_u = \mathrm{id}$, то отображение $\Pi_u \mapsto a_u$ является мономорфизмом. Его образ обозначается символом $\Phi^{\xi}(p_0)$ (или просто $\Phi(p_0)$) и называется *группой голономии в точке* p_0.

Задача 3. Докажите, что группа $\Phi(p_0)$ состоит из таких элементов a группы $\mathcal{G}$, что точка $p_0 a$ соединима с точкой p_0 горизонтальным путем.

По построению группы $\Phi(b_0)$ и $\Phi(p_0)$ изоморфны, но первая является группой преобразований слоя $\mathcal{F}_0$ (перестановочных с действием группы $\mathcal{G}$), а вторая — подгруппой самой структурной группы $\mathcal{G}$.

В случае, когда ξ представляет собой расслоение реперов векторного расслоения ξ, элементами группы $\Phi^{\xi}(b_0)$ являются преобразования многообразия Штифеля $V(n, \mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$ базисов линеала $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$, индуцированные элементами группы голономии $\Phi^{\xi}(b_0)$ расслоения ξ. В этом смысле группы $\Phi(b_0)$ для расслоений ξ и ξ одни и те же.

Что же касается группы $\Phi^{\xi}(p_0)$, то она, очевидно, является не чем иным, как матричной группой, состоящей из матриц группы $\Phi^{\xi}(b_0)$ в базисе p_0.

Задача 4. Докажите, что для любого главного расслоения ξ группа $\Phi^{\xi}(p_0)$ обладает естественной гладкостью, по отношению к которой она является подгруппой группы Ли $\mathcal{G}$, причем в случае, когда многообразие $\mathcal{B}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, эта гладкость слабейшая. [Указание. См. предложение 1 лекции 18.]

Покажите также, что перенесенная в группу $\Phi^{\xi}(b_0)$, эта гладкость не зависит от выбора точки $p_0 \in \mathcal{F}_0$ (что дает тем самым естественную структуру группы Ли на $\Phi^{\xi}(b_0)$).

Алгебру Ли $\mathbf{T}_e \Phi^{\xi}(p_0)$ группы Ли $\Phi^{\xi}(p_0)$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{f}^{\xi}_{p_0}$ (или просто $\mathfrak{f}_{p_0}$). По построению алгебра $\mathfrak{f}_{p_0}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_e \mathcal{G}$.

В случае, когда ξ является расслоением реперов, алгебра $\mathfrak{f}_{p_0}$ — это в точности введенная выше матричная алгебра Ли $\mathfrak{f}_0$.

На главные расслоения переносится и теорема о редукции (теорема 1 лекции 18).

Предложение 5. *Главное расслоение ξ, на котором существует связность с группой голономии Φ, редуцируется к группе Φ.*

Доказательство. Для главного $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$-расслоения реперов ξ, ассоциированного с векторным расслоением ξ, предложение 5 немедленно вытекает из теоремы 1 лекции 18, поскольку редуцируемость векторного расслоения ξ к подгруппе $\Phi \subset \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ равносильна, очевидно, редуцируемости к Φ главного расслоения ξ. В общем случае доказательство по существу повторяет доказательство теоремы 1 лекции 18.

Пусть $\Phi = \Phi^{\xi}(\boldsymbol{p}_0)$.

Мы построим тривиализующий атлас $\{(U,\ \varphi)\}$ расслоения ξ, принимая за U произвольную шаровую координатную окрестность в многообразии $\mathcal{B}$ и следующим образом определив тривиализацию $\varphi\colon U \times \mathcal{G} \to \mathcal{E}_U$ (или, точнее, соответствующее сечение $\boldsymbol{s}^U\colon U \to \mathcal{E}$, связанное с тривиализацией φ соотношением $\varphi(b,\ a) = \boldsymbol{s}^U(b)\,a$, $a \in \mathcal{G}$, $b \in U$).

Произвольно выбрав путь v^U, соединяющий точку $b_0 = \pi(\boldsymbol{p}_0)$ с центром b^U окрестности U, и обозначив для любой точки $b \in U$ через v_b^U композицию $v^U w_b^U$ пути v^U и радиального пути w_b^U, соединяющего в U точку b^U с точкой b, мы примем за $\boldsymbol{s}^U(b)$ конец $\Pi_{v_b^U}(\boldsymbol{p}_0)$ горизонтального пути, начинающегося в точке $\boldsymbol{p}_0$ и накрывающего путь v_b^U. Ясно, что $\boldsymbol{s}^U(b) \in \mathcal{F}_b$, т. е. что отображение $\boldsymbol{s}^U\colon U \to \mathcal{E}_U$ является сечением расслоения ξ над U.

Задача 5. Покажите, что *сечение* $\boldsymbol{s}^U\colon U \to \mathcal{E}_U$ *гладко* (принадлежит $\Gamma(\xi|_U)$).

Построив таким образом атлас $\{(U,\ \varphi)\}$, найдем отвечающий этому атласу склеивающий коцикл.

Пусть U_α и U_β — две пересекающиеся шаровые координатные окрестности, а φ_α и φ_β — соответствующие тривиализации. Тогда связывающее эти тривиализации отображение перехода

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathcal{G}$$

будет задаваться формулой

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \tau\left(\boldsymbol{s}^{U_\alpha}(b),\ \boldsymbol{s}^{U_\beta}(b)\right), \qquad b \in U_1 \cap U_2,$$

где τ — отображение сдвига для расслоения ξ (см. задачу 10 лекции 16). Но по определению

$$\boldsymbol{s}^{U_\alpha}(b) = \Pi_{v_b^\alpha}\boldsymbol{p}_0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{s}^{U_\beta}(b) = \Pi_{v_b^\beta}\boldsymbol{p}_0,$$

где $v_b^\alpha = v_b^{U_\alpha}$ и $v_b^\beta = v_b^{U_\beta}$, и потому

$$\tau\left(s^{U_\alpha}(b),\ s^{U_\beta}(b)\right) = a_w,$$

где a_w — элемент группы Φ, отвечающий петле

$$w = v_\beta^\alpha\,(v_b^\beta)^{-1} = v^{U_\alpha} w_b^{U_\alpha}\,(w_b^{U_\beta})^{-1}\,(v^{U_\beta})^{-1}.$$

Таким образом, $\varphi_{\beta\alpha}(b) \in \Phi$ и, значит, склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ является коциклом над группой Φ. Следовательно, расслоение ξ редуцируется к группе Φ. $\square$

Согласно общим результатам лекции 9, если η — редукция расслоения ξ, то пространство $\mathcal{E}^\eta$ вкладывается в пространство $\mathcal{E}^\xi$.

Задача 6. Пусть гладкое главное $\mathcal{G}$-расслоение ξ редуцируется к подгруппе, являющейся подгруппой Ли группы $\mathcal{G}$. Покажите, что редуцированное расслоение η также гладко и его тотальное пространство $\mathcal{E}^\eta$ является подмногообразием многообразия $\mathcal{E}^\xi$.

В частности, для любой точки $p \in \mathcal{E}^\eta$ пространство $\mathbf{T}_p\mathcal{E}^\eta$ является подпространством пространства

$$\mathbf{T}_p\mathcal{E}^\xi = \mathbf{T}_p\mathcal{F}_b^\xi \oplus \boldsymbol{H}_p, \quad b = \pi(p).$$

Задача 7. Покажите, что $\boldsymbol{H}_p \subset \mathbf{T}_p\mathcal{E}^\eta$ и что

$$\mathbf{T}_p\mathcal{E}^\eta = \mathbf{T}_p\mathcal{F}_b^\eta \oplus \boldsymbol{H}_p.$$

Отсюда следует, что соответствие $p \mapsto \boldsymbol{H}_p$, $p \in \mathcal{E}^\eta$, определяет на η некоторую связность $\boldsymbol{H}^\eta$. Об этой связности говорят, что она *индуцирована* связностью $\boldsymbol{H}$.

Задача 8. Покажите, что если $H = \operatorname{Ann}\theta$ (см. лекцию 17), то $H^\eta = \operatorname{Ann}\theta^\eta$, где θ^η — ограничение формы θ на подмногообразие $\mathcal{E}^\eta$.

Таким образом, для любой точки $p \in \mathcal{E}^\eta$ вектор $A \in \mathbf{T}_p\mathcal{E}^\eta$ тогда и только тогда горизонтален относительно связности $\boldsymbol{H}^\eta$, когда он горизонтален (как вектор из $\mathbf{T}_p\mathcal{E}^\xi$) относительно связности $\boldsymbol{H}$.

Перенесем теперь на главные расслоения конструкцию тензора кривизны R, или, точнее, матричной формы кривизны Ω. Для этого мы должны записать структурное уравнение (38′) лекции 19 в виде, удобном для обобщения.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — расслоение реперов, ассоциированное с векторным расслоением ξ, и пусть $H = \operatorname{Ann}\theta$ — связность на ξ, отвечающая связности H на ξ. Здесь θ — линейная $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$-значная дифференциальная форма на $\mathcal{E}$, т. е. матрица θ, состоящая из обычных дифференциальных форм θ^i_j на $\mathcal{E}$, которая на каждой координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ имеет вид

$$\theta = C^{-1}dC + C^{-1}\omega C,$$

где ω — матрица $\|\omega^i_j\|$ форм связности H на окрестности U, поднятая в $\mathcal{E}_U$ (см. формулу (12′) лекции 16). Поэтому

$$\omega = C\theta C^{-1} - dCC^{-1}$$

и

$$d\omega = dC \wedge \theta C^{-1} + C\, d\theta C^{-1} - C\theta \wedge dC^{-1} + dC \wedge dC^{-1},$$

$$\omega \wedge \omega = C\theta \wedge \theta C^{-1} - dC \wedge \theta C^{-1} - C\theta C^{-1} \wedge dCC^{-1} + \\ + dCC^{-1} \wedge dCC^{-1}.$$

Поскольку $dC^{-1} = -C^{-1}dCC^{-1}$, отсюда следует, что

$$d\omega + \omega \wedge \omega = C\,(d\theta + \theta \wedge \theta)\, C^{-1},$$

т. е. что

(3) $$d\theta + \theta \wedge \theta = C^{-1}\Omega C \text{ на } \mathcal{E}_U.$$

Символ Ω обозначает здесь матричную форму из формулы (38′) лекции 19, рассматриваемую как форма на $\mathcal{E}_U$ (т.е., строго говоря, — форму $\pi^*\Omega$, где π — проекция $\mathcal{E}_U \to U$).

Полученная формула означает, что $\mathfrak{gl}(n;\ \mathbb{R})$-значная форма

(4) $$\Omega = d\theta + \theta \wedge \theta$$

(определенная, подчеркнем, на всем $\mathcal{E}$) имеет на каждой окрестности $\mathcal{E}_U$ вид $C^{-1}\Omega C$ и потому является полноценной заменой форм Ω. Преимущество формы (4) состоит в том, что, в отличие от форм Ω, она определена на всем многообразии $\mathcal{E}$.

Формулу (4) еще нельзя непосредственно перенести на случай произвольного главного расслоения, поскольку в ней участвует операция $\wedge$, определенная только для матричных форм. Поэтому она нуждается в дополнительном преобразовании.

Для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ модуль $\mathsf{F}_{\mathfrak{g}}\mathscr{X}$ всех гладких $\mathfrak{g}$-значных функций на гладком многообразии $\mathscr{X}$ является, очевидно, алгеброй Ли относительно операции $(f, g) \mapsto [f, g]$, определенной формулой

$$[f, g](p) = [f(p), g(p)], \qquad p \in \mathscr{X}.$$

Имея это в виду, мы для любых линейных $\mathfrak{g}$-значных дифференциальных форм α и β на многообразии $\mathscr{X}$ (интерпретированных как линейные отображения $\mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}_{\mathfrak{g}}\mathscr{X}$; см. лекцию 16) определим $\mathfrak{g}$-значную форму $[\alpha, \beta]$ степени 2 на $\mathscr{X}$, положив для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$

$$[\alpha, \beta](X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)].$$

Замечание 1. Аналогичным образом форма $[\alpha, \beta]$ определяется для $\mathfrak{g}$-значных форм α и β произвольных степеней. [Надо взять обычное определение формы $\alpha \wedge \beta$ и всюду заменить умножение чисел на операцию в алгебре $\mathfrak{g}$.]

При $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ формы α, β и $[\alpha, \beta]$ мы можем отождествить с матрицами $\|\alpha^i_j\|$, $\|\beta^i_j\|$ и $\|[\alpha, \beta]^i_j\|$, составленными из обычных дифференциальных форм (степени 1 и 2 соответственно), и тогда для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ будет иметь место равенство

$$\begin{aligned}
&[\alpha, \beta]^i_j(X, Y) = \\
&= (\alpha^i_k(X)\beta^k_j(Y) - \beta^i_k(Y)\alpha^k_j(X)) - (\alpha^i_k(Y)\beta^k_j(X) - \beta^i_k(X)\alpha^k_j(Y)) = \\
&= (\alpha^i_k(X)\beta^k_j(Y) - \alpha^i_k(Y)\beta^k_j(X)) + (\beta^i_k(X)\alpha^k_j(Y) - \beta^i_k(Y)\alpha^k_j(X)) = \\
&= (\alpha^i_k \wedge \beta^k_j)(X, Y) + (\beta^i_k \wedge \alpha^k_j)(X, Y).
\end{aligned}$$

Это означает, что

$$[\alpha, \beta]^i_j = \alpha^i_k \wedge \beta^k_j + \beta^i_k \wedge \alpha^k_j,$$

т. е. в матричных обозначениях

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha.$$

В частности, при $\alpha = \beta = \theta$ мы получаем, что

$$[\theta, \theta] = 2\theta \wedge \theta.$$

Следовательно, формулу (3) можно теперь переписать в следующем виде:

(5) $$\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta].$$

В этом виде она имеет смысл для любой связности $H = \operatorname{Ann}\theta$ на произвольном главном $\mathscr{G}$-расслоении ξ.

Определение 1. Форма (5) называется *формой кривизны* связности H.

Подчеркнем, что для любой точки $p \in \mathscr{E}$ и любых векторов $A, B \in \mathbf{T}_p\mathscr{E}$ значение $\Omega_p(A, B)$ этой формы является элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathscr{G}$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналог предложения 1 для произвольных главных расслоений.

Теорема 1. *Для любой связности $\boldsymbol{H}$ на главном $\mathcal{G}$-расслоении $\xi=(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и любой точки $p_0\in\mathcal{E}$ алгебра голономии $\mathfrak{f}_{p_0}$ состоит из линейных комбинаций всевозможных элементов вида $\Omega_p(A, B)$, где p — произвольная точка, которую можно соединить с точкой p_0 горизонтальным путем, а $A, B\in\boldsymbol{H}_p$ — произвольные горизонтальные векторы в точке p.*

Доказательство. Согласно предложению 2 расслоение ξ редуцируется к расслоению η с группой Φ. При этом в силу утверждения задачи 6 форма кривизны Ω^η расслоения η будет ограничением на $\mathcal{E}^\eta$ формы кривизны Ω и, значит, значения форм Ω и Ω^η на горизонтальных векторах будут одни и те же. Поэтому, если теорема 1 верна для расслоения η, то она будет верна и для расслоения ξ. Следовательно, эту теорему достаточно доказать лишь в предположении, что группа голономии Φ совпадает со всей структурной группой $\mathcal{G}$ (и, значит, алгебра $\mathfrak{f}_{p_0}$ — с алгеброй $\mathfrak{g}$). Поскольку при $\Phi=\mathcal{G}$ любую точку $p\in\mathcal{E}$ можно соединить с точкой p_0 горизонтальным путем, мы видим, следовательно, что нам достаточно доказать, что при $\Phi=\mathcal{G}$ линеал $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида $\Omega_p(A, B)$, где $p\in\mathcal{E}$ и $A, B\in\boldsymbol{H}_p$.

С другой стороны, так как $\theta_p(A)=0$ для любого вектора $A\in\boldsymbol{H}_p$, то $\Omega_p(A, B)=d\theta_p(A, B)$ для любых векторов $A, B\in\boldsymbol{H}_p$. Таким образом, нам нужно доказать, что при $\Phi=\mathcal{G}$ линеал $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида $d\theta_p(A, B)$, $p\in\mathcal{E}$, $A, B\in\boldsymbol{H}_p$, т. е. вида $d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y})(p)$, где X и Y — произвольные векторные поля на $\mathcal{B}$, а $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — их горизонтальные подъемы (см. лекцию 17).

Но согласно общей формуле (34) лекции 16

$$d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y})=\tilde{X}\theta(\tilde{Y})-\tilde{Y}\theta(\tilde{X})-\theta([\tilde{X}, \tilde{Y}]),$$

где $\theta(\tilde{X})=0$ и $\theta(\tilde{Y})=0$ (так как поля $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ горизонтальны), и, значит, $d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y})(p)=-\theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])(p)$. Следовательно, мы должны доказать, что при $\Phi=\mathcal{G}$ линеал $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида $\theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])(p)$, $p\in\mathcal{E}$, $X, Y\in\mathfrak{a}\mathcal{B}$, т. е. что $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — подпространство линеала $\mathfrak{g}$, порожденное всеми такими элементами.

Так как форма θ эквивариантна, то для любого элемента $a \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ad} a)(\theta[\tilde{X}, \tilde{Y}](p)) &= (\operatorname{Ad} a)(\theta_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p)) = \\ &= \theta_{pa}((dR_a)_p[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p) = \theta_{pa}((R^*_{a^{-1}}[\tilde{X}, \tilde{Y}])_{pa}) = \\ &= \theta(R^*_{a^{-1}}[\tilde{X}, \tilde{Y}])(pa) = \theta([R^*_{a^{-1}}\tilde{X}, R^*_{a^{-1}}\tilde{Y}])(pa) = \\ &= \theta[\tilde{X}, \tilde{Y}](pa) \in \mathfrak{h}\end{aligned}$$

(см. задачу 5 лекции 17), откуда следует, что $(\operatorname{Ad} a)B \in \mathfrak{h}$ для любого элемента $B \in \mathfrak{h}$.

При $a = \exp tA$ это означает (см. задачу 16 лекции 14), что $e^{t \operatorname{ad} A} B \in \mathfrak{h}$ и, поэтому

$$(\operatorname{ad} A)B = \lim_{t \to 0} \frac{e^{t \operatorname{ad} A} - \mathrm{id}}{t} B \in \mathfrak{h},$$

т. е. (см. задачу 15 лекции 14) что $[A, B] \in \mathfrak{h}$.

Так как это верно для любых элементов $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{h}$ (и, значит, для любых элементов $A, B \in \mathfrak{h}$), то, следовательно, $\mathfrak{h}$ *является подалгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Для каждой точки $p \in \mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{D}_p$ подпространство пространства $\mathbf{T}_p\mathcal{E}$, состоящее из всех векторов вида $(\tilde{X} + A^\#)_p$, где $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ и $A \in \mathfrak{h}$ (а $A^\#$ — фундаментальное поле, отвечающее элементу A; см. лекцию 17).

Пусть $(U, x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathcal{B}$ и $X_1, \ldots, X_m$ — горизонтальные подъемы в $\mathcal{E}_U$ базисных координатных полей $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ на U. Пусть, далее, $r = \dim \mathfrak{h}$ и $A_1, \ldots, A_r$ — произвольный базис алгебры $\mathfrak{h}$, а $A_1^\#, \ldots, A_r^\#$ — соответствующие фундаментальные поля. Тогда для любой точки $p \in \mathcal{E}_U$ значения в p полей

(6) $$X_1, \ldots, X_m, A_1^\#, \ldots, A_r^\#$$

будут составлять базис подпространства $\mathcal{D}_p$, откуда непосредственно следует (см. задачу 4 лекции 10), что *поле подпространств* $p \mapsto \mathcal{D}_p$ *гладко*, т. е. (см. задачу 21 лекции 14) отвечает некоторому распределению $\mathcal{D}$ на $\mathcal{E}$ (со слоями $\mathcal{D}_p$).

Кроме того, мы видим, что соответствующий распределению $\mathcal{D}$ подмодуль $\mathfrak{a}[\mathcal{D}]$ алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathcal{E}$ (состоящий из таких векторных полей W на $\mathcal{E}$, что $W_p \in \mathcal{D}_p$ для любой точки $p \in \mathcal{E}$) локально порождается полями (6), т. е. для любого поля $W \in \mathfrak{a}[\mathcal{D}]$ его ограничение $W|_U$ на U является линейной комбинацией полей (6) (с коэффициентами из алгебры $\mathsf{F}U$). Поэтому этот подмодуль тогда и только тогда является подалгеброй (распределение $\mathscr{D}$ инволютивно), когда коммутатор любых двух полей (6) линейно выражается через поля (6).

С другой стороны, мы знаем (см. формулу (22) лекции 16 и предложение 2 лекции 17), что

$$[A_i^\#, A_j^\#] = [A_i, A_j]^\#$$

и $[A_i^\#, X_k] = 0$ для любых i, j и k. Поэтому поля $[A_i^\#, A_j^\#]$ и $[A_i^\#, X_k]$ линейно выражаются через поля (6). Что же касается полей $[X_k, X_l]$, $k, l = 1, \ldots, m$, то по определению формы θ (см. формулу (3) лекции 17), если $A_{kl} = \theta([X_k, X_l])$, то $A_{kl}^\# = [X_k, X_l]^V$ и, значит, $[X_k, X_l] = A_{kl}^\#$, так как согласно утверждению задачи 7 лекции 17 $[X_k, X_l] = [X_k, X_l]^V$, потому что $\left[\frac{\partial}{\partial X^k}, \frac{\partial}{\partial X^l}\right] = 0$. Но так как для произвольных горизонтальных полей X и Y

$$(d\theta)(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) = \theta([X, Y])$$

и, значит, $\theta([X, Y]) = -\Omega(X, Y)$, то элемент A_{kl} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ принадлежит подалгебре $\mathfrak{h}$ и, значит, поле $[X_k, X_l] = A_{kl}^\#$ также выражается через поля (6).

Таким образом, мы видим, что *распределение $\mathscr{D}$ инволютивно* и, значит, согласно теореме Фробениуса (см. лекцию 14) вполне интегрируемо. Пусть $\mathscr{X}$ — максимальное интегральное подмногообразие распределения $\mathscr{D}$, проходящее через точку $p_0 \in \mathscr{E}$. Так как все горизонтальные поля принадлежат подалгебре $\mathfrak{a}[\mathscr{D}]$, то каждый горизонтальный путь, начинающийся в p_0, лежит в $\mathscr{X}$, а так как любую точку $p \in \mathscr{E}$ можно соединить с точкой p_0 горизонтальным путем (ибо, по условию, $\Phi = \mathscr{G}$), то, следовательно, $\mathscr{X} = \mathscr{E}$.

Поэтому, в частности,

$$m + r = \dim \mathscr{D}_{p_0} = \dim \mathscr{X} = \dim \mathscr{E} = m + n$$

и, значит, $r = n$. Следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. $\square$

Теорема 1 известна как теорема Амброза — Сингера, хотя Амброз и Сингер (в другой транскрипции — Зингер) доказали ее лишь в некотором ослабленном варианте (а полное доказательство впервые было получено Одзеки).

Предложение 1, с которого мы начали настоящую лекцию, является тривиальным следствием этой теоремы, примененной к расслоению реперов $\mathfrak{\xi}$ векторного расслоения ξ и к связности $\boldsymbol{H}$ на $\mathfrak{\xi}$, индуцированной данной связностью H на ξ. Действительно, согласно формуле (3) форма кривизны $\boldsymbol{\Omega}$ связности $\boldsymbol{H}$ имеет в каждой карте $\mathcal{E}_U$ вид $C^{-1}\Omega C$, где Ω — перенесенная в $\mathcal{E}_U$ форма кривизны связности H на U. По определению это означает, что для любой точки $\boldsymbol{p} \in \mathcal{E}_U$ с координатами $(C, \boldsymbol{x})$, $C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, и любых векторов A, $B \in \mathbf{T}_p\mathcal{E}$ имеет место равенство

$$\boldsymbol{\Omega}_p(A, B) = C^{-1}\Omega_b(A', B')C,$$

где $b = \pi(\boldsymbol{p})$, а A' и B' — образы векторов A и B при отображении

$$(d\pi)_p \colon \mathbf{T}_p\mathcal{E} \to \mathbf{T}_p\mathcal{B}.$$

С другой стороны, в лекции 19 мы уже отмечали, что для любых векторов A', $B' \in \mathbf{T}_b\mathcal{B}$ матрица $\Omega_b(A', B')$ является не чем иным, как матрицей $\|R(A', B')\|$ линейного оператора $R(A', B')\colon \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}_b$ в базисе $\boldsymbol{s}(b)$ линеала $\mathcal{F}_b$. Поэтому матрица $\boldsymbol{\Omega}_p(A, B)$ будет матрицей того же оператора $R(A', B')$, но в базисе, связанном с базисом $\boldsymbol{s}(b)$ матрицей перехода C. Поскольку, по определению (см. лекцию 16), последним базисом является в точности базис $\boldsymbol{p}$, этим доказано, что

$$\boldsymbol{\Omega}_p(A, B) = R_p(A', B'),$$

где $R_p(A', B')$ — матрица оператора $R(A', B')$ в базисе $\boldsymbol{p}$. Поэтому теорема 1 для связности $\boldsymbol{H}$ в точности равносильна переформулированному выше на матричный язык предложению 1. □

Заметим, что, несмотря на то, что предложение 4, необходимое для теоремы 1, мы докажем только в следующей лекции, доказательство предложения 1 тем не менее является уже сейчас абсолютно полным, поскольку справедливость предложения 4 для расслоения реперов, как мы выше уже отмечали, очевидна.