Лекция 21

Лемма о касательном пространстве прямого произведения и ее следствия. — Об одном дифференциальном уравнении. — Существование горизонтальных накрытий для главных расслоений. — Альтернативное определение формы кривизны. — Тождество Бианки для формы кривизны главного расслоения. — Структурное уравнение Картана. — Эквивариантные горизонтальные формы. — Мнимые кватернионы. — Формы $F_{\lambda, b}$.

Доказательству предложения 4 лекции 20 мы должны предпослать ряд замечаний общего характера, которые, собственно говоря, можно и нужно было бы сделать еще в предыдущем семестре.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — гладкие многообразия и $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ — их прямое произведение. Тогда для любой точки $(p_0, q_0)\in \mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ формулы

$$i_{q_0}(p)=(p, q_0), \quad j_{p_0}(q)=(p_0, q), \qquad p\in\mathscr{X}, \quad q\in\mathscr{Y},$$

определяют гладкие отображения

$$(1) \qquad i_{q_0}\colon \mathscr{X}\to\mathscr{X}\times\mathscr{Y}, \quad j_{p_0}\colon \mathscr{Y}\to\mathscr{X}\times\mathscr{Y},$$

связанные с проекциями

$$\pi_1\colon \mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to\mathscr{X}, \quad \pi_2\colon \mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}$$

соотношениями

$$\pi_1\circ i_{q_0}=\mathrm{id}, \quad \pi_2\circ j_{p_0}=\mathrm{id}.$$

Эти отображения инъективны, мономорфны и являются погружениями. Их образы

$$i_{q_0}\mathscr{X}=\{(p, q_0)\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y};\ p\in\mathscr{X}\},$$
$$j_{p_0}\mathscr{Y}=\{(p_0, q)\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y};\ q\in\mathscr{Y}\}$$

представляют собой вложенные подмногообразия многообразия $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, диффеоморфные соответственно многообразиям $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Дифференциалы

$$(2) \qquad \begin{aligned}(di_{q_0})_{p_0}&\colon \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}\to\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y}),\\ (dj_{p_0})_{q_0}&\colon \mathbf{T}_{q_0}\mathscr{X}\to\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})\end{aligned}$$

отображений (1) являются мономорфизмами, и мы будем считать, что линеалы $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ и $\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{X}$ вложены в линеал $\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ посредством этих мономорфизмов.

Лемма 1. *Линеал* $\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ *является прямой суммой линеалов* $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ *и* $\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}$:

$$\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y}) = \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}\oplus\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}.$$

Доказательство. По определению (см. лекцию III.15), если $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(V, k) = (V, y^1, \ldots, y^m)$ — карты многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, центрированные в точках p_0 и q_0 соответственно, то пара $(U\times V, h\times k)$ будет картой многообразия $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, центрированной в точке (p_0, q_0). Локальными координатами последней карты будут функции $x^1\circ\pi_1, \ldots, x^n\circ\pi_1, y^1\circ\pi_2, \ldots, y^m\circ\pi_2$, которые для упрощения формул обозначаются просто через $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m$. Отображение i_{q_0} в этих координатах задается формулами

$$(3)\qquad \begin{aligned} x^i &= x^i, & i &= 1, \ldots, n,\\ y^j &= 0, & j &= 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

а отображение j_{p_0} — формулами

$$(4)\qquad \begin{aligned} x^i &= 0, & i &= 1, \ldots, n,\\ y^j &= y^j, & j &= 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Карте (U, h) отвечает в пространстве $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ базис, состоящий из векторов $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0}$, $1\leqslant i\leqslant n$, карте (V, k) отвечает в пространстве $T_{q_0}\mathscr{Y}$ базис, состоящий из векторов $\left(\dfrac{\partial}{\partial y^j}\right)_{q_0}$, $1\leqslant j\leqslant m$, а карте $(U\times V, h\times k)$ отвечает в пространстве $\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ базис, состоящий из векторов $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p_0, q_0)}$, $1\leqslant i\leqslant n$, и $\left(\dfrac{\partial}{\partial y^j}\right)_{(p_0, q_0)}$, $1\leqslant j\leqslant m$. При этом, как немедленно следует из формул (3) и (4) (см. в лекции III.12 определение дифференциала гладкого отображения), дифференциалы (2) отображений (1) действуют по формулам

$$\begin{aligned} (di_{q_0})_{p_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p_0, q_0)}, & i &= 1, \ldots, n,\\ (dj_{p_0})_{q_0}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{q_0} &= \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{(p_0, q_0)}, & j &= 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Это, очевидно, доказывает лемму 1. □

Для любых векторов $A\in\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$, $B\in\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}$ мы будем вектор

$$(di_{q_0})_{p_0}A + (dj_{p_0})_{q_0}B$$

обозначать символом (A, B).

Пусть $f\colon \mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}$ — гладкое отображение многообразия $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ в некоторое многообразие $\mathscr{Z}$ и пусть

$$df_{(p_0, q_0)}\colon \mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})\to\mathbf{T}_{r_0}\mathscr{Z}, \qquad r_0=f(p_0, q_0),$$

— его дифференциал в точке (p_0, q_0). Пусть, далее, отображения

$$R_{q_0}\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Z}, \quad L_{p_0}\colon \mathscr{Y}\to\mathscr{Z}$$

определены формулами

$$R_{q_0}p=f(p, q_0), \quad L_{p_0}q=f(p_0, q).$$

(Если отображение f рассматривать как умножение, то R_{q_0}—это умножение справа на q_0, а L_{p_0}—умножение слева на p_0.)

Следствие 1. *Для любого вектора $C\in\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ имеет место равенство*

$$(5)\qquad (df)_{(p_0, q_0)}C=(dR_{q_0})_{p_0}A+(dL_{p_0})_{q_0}B,$$

где $A\in\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ и $B=\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}$—такие векторы, что $C=(A, B)$.

Доказательство. В развернутом виде равенство $C=(A, B)$ означает, что

$$C=(di_{q_0})_{p_0}A+(dj_{p_0})_{q_0}B.$$

Поэтому

$$df_{(p_0, q_0)}C=d(f\circ i_{q_0})_{p_0}A+d(f\circ j_{p_0})_{q_0}B.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$R_{q_0}=f\circ i_{q_0} \quad \text{и} \quad L_{p_0}=f\circ j_{p_0}. \ \square$$

Пусть $\mathscr{S}$—еще одно гладкое многообразие.

Задача 1. Докажите, что

а) для любых гладких отображений $u\colon \mathscr{S}\to\mathscr{X}$ и $v\colon \mathscr{S}\to\mathscr{Y}$ отображение

$$u\times v\colon \mathscr{S}\to\mathscr{X}\times\mathscr{Y},$$

определенное формулой

$$(u\times v)(t)=(u(t), v(t)), \qquad t\in\mathscr{S},$$

гладко;

б) каждое гладкое отображение $\mathscr{S}\to\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ единственным образом представляется в виде $u\times v$;

в) в каждой точке $t\in\mathscr{S}$ для любого вектора $D\in\mathbf{T}_t\mathscr{S}$ имеет место равенство

$$(6)\qquad d(u\times v)_t D=(du)_t D+(dv)_t D.$$

Пусть $w\colon \mathcal{S} \to \mathcal{Z}$ — отображение

$$f \circ (u \times v)\colon \mathcal{S} \xrightarrow{u \times v} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{Z}.$$

Следствие 2. Для любого вектора $D \in \mathrm{T}_t\mathcal{S}$ имеет место равенство

$$(dw)_t D = d(R_{v(t)} \circ u)_t D + d(L_{u(t)} \circ v)_t D. \ \square \tag{7}$$

В частном случае, когда $\mathcal{S}$ является отрезком I оси $\mathbb{R}$ и, значит, u, v и w — кривыми $I \to \mathcal{X}$, $I \to \mathcal{Y}$ и $I \to \mathcal{Z}$, а D представляет собой вектор $\left(\frac{t}{dt}\right)_t$, формула (7) приобретает вид

$$\dot{w}(t) = (dR_{v(t)})_{u(t)} \dot{u}(t) + (dL_{u(t)})_{v(t)} \dot{v}(t). \tag{8}$$

(Действительно, по определению $\dot{w}(t) = (dw)_t \left(\frac{d}{dt}\right)_t$ и аналогично для кривых u и v.)

Нам понадобится также следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть $A\colon t \mapsto A(t)$, $t \in \boldsymbol{I}$, — гладкий путь в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e\mathcal{G}$. Тогда в группе Ли $\mathcal{G}$ существует единственный гладкий путь $a\colon t \mapsto a(t)$, $t \in \boldsymbol{I}$, начинающийся в точке e, для которого*

$$\dot{a}(t) = (dR_{a(t)})_e A(t) \tag{9}$$

при любом $t \in \boldsymbol{I}$.

Доказательство. По определению путь A является ограничением некоторой гладкой кривой $\bar{I} \to \mathcal{G}$, определенной на открытом интервале $\bar{I} \supset \boldsymbol{I}$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{I} = \mathbb{R}$. Имея это в виду, рассмотрим гладкое многообразие $\mathcal{X} = \mathcal{G} \times \mathbb{R}$. Так как

$$\mathrm{T}_{(a,s)}\mathcal{X} = \mathrm{T}_a\mathcal{G} \oplus \mathrm{T}_s\mathbb{R}$$

для любой точки $(a, s) \in \mathcal{X}$, то формула

$$X_{(a,s)} = (dR_a)_e A(s) + \left(\frac{d}{dt}\right)_s$$

корректно определяет на $\mathcal{X}$ некоторое векторное поле X. Ясно, что интегральная кривая этого поля, проходящая при $t = 0$ через точку $(e, 0)$, имеет вид $t \mapsto (a(t), t)$, где $t \mapsto a(t)$ — кривая в $\mathcal{G}$, удовлетворяющая соотношению (9) и такая, что $a(0)=e$. Поэтому для доказательства леммы 2 нужно только показать, что кривая $t\mapsto(a(t), t)$ определена для всех $t\in I$.

Пусть $\{\varphi_t\}$ — максимальный поток на многообразии $\mathscr{X}$, индуцированный векторным полем X (см. лекцию III.13). Тогда на I существует такая непрерывная положительная функция $\delta(s)$, что для любой точки вида (e, s), $s\in\mathbb{R}$, точка $\varphi_t(e, s)$ заведомо определена для всех t с $|t|<\delta(s)$ (причем $\varphi_0(e, s)=(e, s)$). В силу компактности отрезка I отсюда следует, что существует такое число $\delta_0>0$, что при $|t|<\delta_0$ точка $\varphi_t(e, s)$ определена для любого $s\in I$.

Пусть T_0 — верхняя грань таких чисел T, что при $0\leqslant t<T$ точка $\varphi_t(e, 0)=(a(t), t)$ определена. Лемма 2 будет доказана, если мы покажем, что $T_0\geqslant 1$.

Пусть $T_0<1$. Согласно определению верхней грани для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $t_0\in I$, что $t_0<T_0<$ $<t_0+\varepsilon$ и точка $\varphi_{t_0}(e, 0)$ определена. Рассмотрим точку $\varphi_t(e, t_0)$. Так как $t_0\in I$, то точка $\varphi_t(e, t_0)$ определена при $|t|<\delta_0$ и имеет вид $(b(t), t+t_0)$, где $\dot b(t)=(dR_{b(t)})_e A(t+t_0)$ и $b(0)=e$. Поэтому кривая $t\mapsto(b(t-t_0)a(t_0), t)$ определена при $t_0-\delta_0<t<t_0+\delta_0$, является интегральной кривой поля X и начинается в точке $(a(t_0), t_0)=\varphi_{t_0}(e, 0)$. Следовательно, эта кривая является ограничением на $(t_0-\delta_0, t_0+\delta_0)$ интегральной кривой $t\mapsto\varphi_t(e, 0)$ (здесь мы пользуемся максимальностью кривой $t\mapsto\varphi_t(e, 0)$). Значит, точка $\varphi_t(e, 0)$ определена при $0\leqslant t<t_0+\delta_0$, что при $\varepsilon<\delta_0$ противоречит выбору T_0. Поэтому неравенство $T_0<1$ невозможно. $\square$

Теперь у нас уже все готово для доказательства предложения 4 лекции 20.

Доказательство предложения 4 лекции 20. Пусть w: $I\to\mathscr{E}$ — произвольное поднятие пути u в пространство $\mathscr{E}$, начинающееся в точке p_0. (Так как расслоение ξ локально тривиально, а отрезок I компактен, то хотя бы одно поднятие w существует.) Тогда любое другое поднятие v пути u, начинающееся в точке p_0, будет иметь вид $t\mapsto w(t)a(t)$, где a: $t\mapsto a(t)$ — некоторый путь в группе Ли $\mathscr{G}$, начинающийся в единице e. Нам нужно показать, что путь a можно выбрать так, чтобы путь v был горизонтален.

Согласно формуле (8) (в которой u, v, w и $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$ заменены соответственно на w, a, v и $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{E}$, а за f принято действие $\mathscr{E}\times\mathscr{G}\to\mathscr{E}$) для касательного вектора $\dot v(t)$

пути v имеет место равенство

$$\dot{v}(t)=(dR_{a(t)})_{w(t)}\dot{w}(t)+(dL_{w(t)})_{a(t)}\dot{a}(t).$$

Последнее слагаемое справа допускает следующее преобразование:

$$\begin{aligned}(dL_{w(t)})_{a(t)}\dot{a}(t)&=\\ &=[(dL_{w(t)})_{a(t)}\circ(dL_{a(t)})_e]((dL_{a(t)})_e^{-1}\dot{a}(t))=\\ &=(dL_{v(t)})_e((dL_{a(t)})_e^{-1}\dot{a}(t))=\\ &=((dL_{a(t)})_e^{-1}\dot{a}(t))^{\#}_{v(t)}\end{aligned}$$

(см. формулу (19) лекции 16), где во второй строчке $L_{a(t)}$ рассматривается как левый сдвиг в группе $\mathcal{G}$ и, значит, вектор $(dL_{a(t)})_e^{-1}\dot{a}(t)$ — как вектор из $\mathbf{T}_e\mathcal{G}=\mathfrak{g}$. Поэтому для любой $\mathfrak{g}$-значной фундаментальной формы θ на $\mathscr{E}$

$$\theta_{v(t)}((dL_{w(t)})_{a(t)}\dot{a}(t))=(dL_{a(t)})_e^{-1}\dot{a}(t).$$

С другой стороны, если форма θ эквивариантна, то

$$\begin{aligned}\theta_{v(t)}((dR_{a(t)})_{w(t)}\dot{w}(t))&=(\mathrm{Ad}\,a(t)^{-1})\,\theta_{w(t)}(\dot{w}(t))=\\ &=(dL_{a(t)})_e^{-1}[(dR_{a(t)})_e\,\theta_{w(t)}(\dot{w}(t))].\end{aligned}$$

Следовательно, равенство $\theta_{v(t)}(\dot{v}(t))=0$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$(dR_{a(t)})_e\,\theta_{w(t)}(\dot{w}(t))+\dot{a}(t)=0.$$

При $H=\mathrm{Ann}\,\theta$ этим доказано, что *путь* v: $t\mapsto w(t)a(t)$ *тогда и только тогда горизонтален, когда*

$$\dot{a}(t)=-(dR_{a(t)})_e\,\theta_{w(t)}(\dot{w}(t)) \tag{10}$$

для любого $t\in I$.

Для завершения доказательства остается заметить, что соотношение (10) имеет вид (9) (при $A(t)=-\theta_{w(t)}(\dot{w}(t))$) и воспользоваться леммой 2. □

Форму кривизны $\mathbf{\Omega}$ связности $\boldsymbol{H}$ на главном расслоении ξ мы в лекции 20 ввели так, чтобы возможно проще вывести из теоремы Амброза—Сигнера предложение 1 лекции 20. Сейчас мы дадим этой форме другое определение, во многих отношениях более удобное.

Связность $\boldsymbol{H}$ мы при этом будем интерпретировать как проектор $\boldsymbol{H}$: $\mathfrak{a}\mathscr{E}\to\mathfrak{a}\mathscr{E}$ (см. лекцию 17).

Предложение 1. *Имеет место формула*

$$\Omega = d\theta \circ (H \times H). \tag{11}$$

Доказательство. Формула (11) означает, что

$$\Omega(X, Y) = d\theta(X^H, Y^H)$$

для любых векторных полей X, Y на $\mathcal{E}$, т. е., другими словами, что

$$\Omega_p(A, B) = (d\theta)_p(A^H, B^H) \tag{12}$$

для любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любых векторов A, $B \in \mathbf{T}_p\mathcal{E}$. В этом виде мы и будем ее доказывать.

Поскольку обе стороны формулы (12) линейны по A и B, нам достаточно доказать эту формулу лишь в предположении, что каждый из векторов A и B либо горизонтален, либо вертикален.

Случай 1. Векторы A и B горизонтальны (т. е. $\theta_p(A) = 0$ и $\theta_p(B) = 0$). Тогда $[\theta, \theta]_p(A, B) = 0$ и, значит, $\Omega_p(A, B) = (d\theta)_p(A, B)$. Поскольку $A^H = A$ и $B^H = B$, это доказывает (12).

Случай 2. Векторы A и B вертикальны (т. е. $A^H = 0$ и $B^H = 0$). В этом случае правая часть формулы (12) равна нулю, а левая равна значению в точке p $\mathfrak{g}$-значной функции

$$\Omega(X, Y) = d\theta(X, Y) + \frac{1}{2}[\theta, \theta](X, Y), \tag{13}$$

где X и Y — такие векторные поля на $\mathcal{E}$, что $X_p = A$ и $X_p = B$. При этом, как мы знаем (см. задачу 13 лекции 16), поля X и Y можно выбрать среди фундаментальных векторных полей, т. е. можно считать, что $X = C^\#$ и $Y = D^\#$, где C и D — некоторые (однозначно определенные) элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как $\theta(C^\#) = C = \mathrm{const}$ и $\theta(D^\#) = D = \mathrm{const}$, то (см. формулы (22) и (34) лекции 16) при $X = C^\#$ и $Y = D^\#$

$$\begin{aligned}(d\theta)(X, Y) &= X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta[X, Y] = -\theta[X, Y] = \\ &= -\theta[C^\#, D^\#] = -\theta[C, D]^\# = -[C, D].\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}[\theta, \theta](X, Y) &= [\theta(X), \theta(Y)] - [\theta(Y), \theta(X)] = \\ &= 2[\theta(X), \theta(Y)] = 2[C, D].\end{aligned}$$

Поэтому функция (13) тождественно равна нулю. Значит, равно нулю и ее значение в точке p.

Случай 3. Один из векторов A, B вертикален, а другой горизонтален. Пусть для определенности вектор A вертикален, а вектор B горизонтален. Тогда $A^H=0$ и правая часть формулы (12) равна нулю. Кроме того, так как $\theta(B)=0$, то левая часть равна $(d\theta)_p(A, B)$ и, значит, равна значению в точке p функции

$$d\theta(X, Y)=X\theta(Y)-Y\theta(X)-\theta([X, Y]), \tag{14}$$

где X — такое поле вида $C^\#$, $C\in\mathfrak{g}$, что $C_p^\#=A$, а Y — горизонтальное поле, для которого $Y_p=B$. Но согласно предложению 2 лекции 17 поле $[X, Y]=[C^\#, Y]$ в этом случае горизонтально, и потому $\theta([X, Y])=0$. Так как, кроме того, $\theta(Y)=0$ и $\theta(X)=C=\text{const}$, то, следовательно, функция (14) тождественно равна нулю. Поэтому равно нулю и ее значение в точке p.

Тем самым предложение 1 полностью доказано. □

Следствие. *Форма Ω горизонтальна.* □

Для произвольной (вообще говоря, $\mathcal{V}^\rho$-значной) дифференциальной формы ω степени r на многообразии $\mathcal{E}$ форма

$$D\omega=d\omega\circ(\underbrace{H\times\ldots\times H}_{r+1 \text{ раз}}),$$

т. е. форма

$$(D\omega)(X_0, X_1, \ldots, X_r)=(d\omega)(X_0^H, X_1^H, \ldots, X_r^H),$$
$$X_0, X_1, \ldots, X_r\in\mathfrak{a}\mathcal{E},$$

называется *внешним ковариантным дифференциалом* формы ω.

Заметим, что для любой формы ω форма $D\omega$ горизонтальна.

Предложение 1 означает теперь, что *форма кривизны Ω является внешним ковариантным дифференциалом формы связности*:

$$\Omega=D\theta. \tag{15}$$

Предложение 2 (тождество Бианки). *Внешний ковариантный дифференциал формы кривизны равен нулю*:

$$D\Omega=0. \tag{16}$$

Доказательство. Так как $d\circ d=0$, то $D\circ d=0$ и, значит,

$$D\Omega=\frac{1}{2}D[\theta, \theta]=\frac{1}{2}d[\theta, \theta]\circ(H\times H\times H).$$

С другой стороны, согласно общей формуле (35) лекции 16 для любой $\mathfrak{g}$-значной формы ω степени 2 и любых векторных полей X, Y, Z имеет место равенство

$$d\omega(X, Y, Z)=X\omega(Y, Z)+Y\omega(Z, X)+Z\omega(X, Y)-\\ -\omega([X, Y], Z)-\omega([Y, Z], X)-\omega([Z, X], Y).$$

Поэтому, если форма ω на $\mathcal{E}$ вертикальна (равна нулю, когда хотя бы один из ее аргументов является горизонтальным полем), то

$$d\omega\circ(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H})=0.$$

Следовательно, нам нужно лишь доказать, что *форма* $[\theta, \theta]$ *вертикальна*. Но это немедленно вытекает из определения: так как

$$[\theta, \theta](X, Y)=[\theta(X), \theta(Y)]-[\theta(Y), \theta(X)],$$

то $[\theta, \theta](X, Y)=0$, еслн, скажем, поле X горизонтально (и, значит, $\theta(X)=0$). □

Заметим, что, вообще говоря, $D\circ D\neq 0$.

Задача 2. Покажите, что в случае, когда ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ, тождество (16) равносильно тождеству Бианки из предложения 1 лекции 19 (см. формулу (39) лекции 19).

Дифференциальная $\mathfrak{g}$-значная форма ω степени r на многообразии $\mathcal{E}$ называется *эквивариантной*, если

$$R_a^*\omega=(\operatorname{Ad}a^{-1})\,\omega$$

для любого элемента $a\in\mathcal{G}$, т. е. если в каждой точке $p\in\mathcal{E}$ для любых векторов $A_1, \ldots, A_r\in\mathbf{T}_p\mathcal{E}$ имеет место равенство

$$\omega_{pa}((dR_a)_p A_1, \ldots, (dR_a)_p A_r)=(\operatorname{Ad}a^{-1})\,\omega_p(A_1, \ldots, A_r).$$

Задача 3. Докажите, что *форма кривизны* $\boldsymbol{\Omega}$ *эквивариантна*. [Указание. Пользуясь тем, что $R_a^*\circ\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\circ R_a^*$ на векторных полях и $R_a^*\circ d=d\circ R_0^*$ на дифференциальных формах, докажите, что если форма ω эквивариантна, то формы $\omega\circ(\boldsymbol{H}\times\ldots\times\boldsymbol{H})$ и $d\omega$ (а значит, и форма $D\omega$) эквивариантны.]

Задача 4. Докажите, что

$$D\omega=d\omega+[\omega, \theta] \tag{17}$$

для любой эквивариантной горизонтальной формы ω на $\mathcal{E}$. [Указание. Рассмотрите сначала случай $r=2$.]

Формула (17) называется структурным уравнением Картана. При $\omega=\theta$ она переходит в формулу (5) лекции 20, которая поэтому также называется структурным уравнением.

Так как Ad является представлением структурной группы $\mathcal{G}$ в линейном пространстве $\mathfrak{g}$, то определено (см. лекцию 17) ассоциированное векторное расслоение $\xi[\mathrm{Ad}]$, и, значит (см. лекцию 16), можно говорить о $\xi[\mathrm{Ad}]$-значных дифференциальных формах на $\mathcal{B}$ степени $r \geqslant 0$.

По определению каждая такая форма ω любой точке $b \in \mathcal{B}$ и любым векторам $A_1, \ldots, A_r \in \mathbf{T}_b\mathcal{B}$ ставит в соответствие элемент $\omega_b(A_1, \ldots, A_r)$ слоя $\mathcal{F}_b(\xi[\mathrm{Ad}])$ расслоения $\xi[\mathrm{Ad}]$. С другой стороны (см. лекцию 1), точки этого слоя являются орбитами $[p, A]$, $p \in \mathcal{F}$, $A \in \mathfrak{g}$, действия группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{E} \times \mathfrak{g}$, определенного формулой

$$(p, A)a = (pa, (\mathrm{Ad}\, a^{-1})A), \qquad a \in \mathcal{G},$$

и для любой точки $p \in \mathcal{F}$ формула $j_p(A) = [p, A]$, $A \in \mathfrak{g}$, определяет изоморфизм линейного пространства $\mathfrak{g}$ на слой $\mathcal{F}_b(\xi[\mathrm{Ad}])$. Поэтому формула

$$\hat{\omega}_p(A_1, \ldots, A_r) = j_p^{-1}(\omega_b((d\pi)_p A_1, \ldots, (d\pi)_p A_r)),$$
$$A_1, \ldots, A_r \in \mathbf{T}_p\mathcal{E},$$

корректно определяет на $\mathcal{E}$ некоторую $\mathfrak{g}$-значную дифференциальную форму $\hat{\omega}$.

Задача 5. Покажите, что

а) форма $\hat{\omega}$ гладка, горизонтальна и эквивариантна;

б) формула $\omega \longmapsto \hat{\omega}$ устанавливает изоморфизм между $\mathsf{F}\mathcal{B}$-модулем $\Gamma(\mathrm{Hom}(\Lambda^r\tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi[\mathrm{Ad}]))$ всех $\xi[\mathrm{Ad}]$-значных дифференциальных форм степени r на $\mathcal{B}$ и $\mathsf{F}\mathcal{B}$-модулем горизонтальных эквивариантных форм степени r на пространстве $\mathcal{E}$.

Это означает, что *горизонтальные эквивариантные формы на $\mathcal{E}$ естественным образом отождествляются с $\xi[\mathrm{Ad}]$-значными формами на $\mathcal{B}$.*

В частности, мы видим, что *связности на главном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ (или, точнее, их формы связности) — это в точности $\xi[\mathrm{Ad}]$-значные линейные формы на $\mathcal{B}$.*

Еще одно определение связности!

Форма же кривизны Ω каждой такой связности — это $\xi[\mathrm{Ad}]$-значная форма степени 2 на $\mathcal{B}$.

Задача 6. Покажите, что в случае, когда ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ, расслоение $\xi[\mathrm{Ad}]$ естественно изоморфно расслоению End ξ. [Указание. Каждая точка пространства $\mathscr{E}(\xi[\mathrm{Ad}]) = \mathscr{E}\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$ имеет вид $[p, A]$, где $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — репер в некотором слое $\mathscr{F}_b$ расслоения ξ, а A — элемент алгебры $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, причем $[p, A] = [p', A']$ тогда и только тогда, когда существует такая матрица $C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, что $p' = pC$ и $A' = C^{-1}AC$. Поэтому линейный оператор $\mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_b$, имеющий в базисе p матрицу A, зависит только от точки $[p, A]$.]

Задача 7. Докажите, что указанный в задаче 6 изоморфизм переводит форму кривизны связности H на расслоении ξ в форму кривизны соответствующей связности H на расслоения ξ.

Таким образом, для связностей на расслоении реперов мы, как и следовало ожидать, не получаем ничего нового.

Мы заключим эту лекцию, построив некоторые специальные $\mathrm{SU}(2)$-связности на пространстве $\mathbb{R}^4$. Роль и значение этих связностей будут выяснены в следующей лекции.

Напомним (см. задачу 5 лекции 7), что кватернионы $\xi = a + bj$ естественным образом отождествляются с матрицами вида

$$A_\xi = \begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Поскольку унимодулярные унитарные матрицы второго порядка (элементы групп $\mathrm{SU}(2)$) — это в точности матрицы вида (18) с $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$, мы, в частности, видим, что это отождествление индуцирует отождествление группы $\mathrm{SU}(2)$ с группой $\mathbb{S}^3$ кватернионов с нормой 1 (единичной сферой евклидова пространства $\mathbb{H}$):

$$\mathrm{SU}(2) = \mathbb{S}^3.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{l}\mathbb{S}^3$ группы $\mathbb{S}^3$ (касательное пространство к сфере $\mathbb{S}^3$ в точке 1) естественным образом отождествляется при этом с ортогональным дополнением в $\mathbb{H}$ элемента 1, т. е. с линеалом $\mathbb{H}'$ мнимых кватернионов. Соответствующие матрицы A_ξ имеют вид

$$\begin{Vmatrix} ia & b \\ -\bar{b} & -ia \end{Vmatrix}, \quad a \text{ вещественно},$$

т. е. являются косоэрмитовыми бесследными матрицами. Поскольку последние матрицы составляют алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$ группы Ли $\mathrm{SU}(2)$ (см. лекцию III.11), мы видим, таким образом, что *при $\xi \in \mathbb{H}'$ соответствие $\xi \mapsto A_\xi$ является изоморфизмом линеала $\mathbb{H}'$ на алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$*.

Это позволяет все $\mathfrak{su}(2)$-значные дифференциальные формы (например, формы связности на главных $\mathrm{SU}(2)$-расслоениях) считать формами, принимающими значения в $\mathbb{H}'$.

[Контрольный вопрос. Изоморфизм $\mathbb{H}' \approx \mathfrak{su}(2)$ позволяет перенести операцию Ли в линеал $\mathbb{H}'$. Что это за операция?

В частности, SU(2)-связности, заданные на пространстве $\mathbb{R}^4$, являются не чем иным, как $\mathbb{H}'$-значными линейными дифференциальными формами вида

$$A(x) = A_\alpha(x)\, dx^\alpha, \tag{19}$$

где $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и α пробегает индексы от 0 до 3. Пространство $\mathbb{R}^4$ удобно при этом отождествлять с линеалом $\mathbb{H}$, т. е. считать в (19) аргумент x кватернионом. (Обратите внимание на смену обозначений для формы связности.)

Рассмотрим, например, форму вида (19), заданную формулой

$$A(x) = \operatorname{Im} \frac{x\, d\bar{x}}{1+|x|^2} = \frac{1}{2}\, \frac{x\, d\bar{x} - dx\, \bar{x}}{1+|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{H}. \tag{20}$$

Здесь мы пользуемся условными, но понятными обозначениями. В развернутом виде форма (20) записывается формулой

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{1+|x|^2}\, dx_0 + \frac{-x_0 i - x_3 j + x_2 k}{1+|x|^2}\, dx_1 + \\ &+ \frac{x_3 i - x_0 j - x_1 k}{1+|x|^2}\, dx_2 + \frac{-x_2 i + x_1 j - x_0 k}{1+|x|^2}\, dx_3 = \\ &= \frac{x_1\, dx_0 - x_0\, dx_1 + x_3\, dx_2 - x_2\, dx_3}{1+|x|^2}\, i + \\ &+ \frac{x_2\, dx_0 - x_3\, dx_1 - x_0\, dx_2 + x_1\, dx_3}{1+|x|^2}\, j + \\ &+ \frac{x_3\, dx_0 + x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2 - x_0\, dx_3}{1+|x|^2}\, k. \end{aligned}$$

Ее можно записать также в виде

$$A(x) = \operatorname{Im}\{f(x)\, d\bar{x}\}, \quad \text{где } f(x) = \frac{x}{1+|x|^2}.$$

Форма кривизны связности (20), которую мы обозначим символом F, задается формулой

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A = \\ &= \operatorname{Im}\{df(x) \wedge d\bar{x} + f(x)\, d\bar{x} \wedge f(x)\, d\bar{x}\} = \\ &= \operatorname{Im}\left\{ \frac{(1+|x|^2)\, dx - x\,(d\bar{x}\,x + \bar{x}\, dx)}{(1+|x|^2)^2} \wedge d\bar{x} + \frac{x\, d\bar{x} \wedge x\, d\bar{x}}{(1+|x|^2)^2} \right\} = \\ &= \operatorname{Im} \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1+|x|^2)^2}, \end{aligned}$$

т. е. — поскольку под знаком Im стоит, очевидно, мнимый кватернион — формулой

(21) $$F=\frac{dx\wedge d\bar{x}}{(1+|x|^2)^2}.$$

Более общим образом можно рассмотреть форму

(22) $$A_{\lambda, b}(x)=\operatorname{Im}\frac{(x-b)\,d\bar{x}}{\lambda^2+|x-b|^2},$$

где $b\in\mathbb{H}$ и λ — произвольное положительное число. Эта форма получается из формы (20) преобразованием

$$x\longmapsto\lambda x+b,\qquad b\in\mathbb{H},$$

являющимся композицией гомотетии $x\longmapsto\lambda x$ и трансляции $x\longmapsto x+b$.

Задача 8. Покажите, что форма кривизны связности (22) выражается формулой

(23) $$F_{\lambda, b}=\frac{\lambda^2\,dx\wedge d\bar{x}}{\lambda^2+|x-b|^2}.$$

Оказывается, что среди всех форм вида (19) формы (22) выделяются двумя важными свойствами. Первое из этих свойств относится к поведению формы (22) при $|x|\longmapsto\infty$.

Мы будем говорить, что функция (форма и т. п.) *определена вблизи* ∞, если существует такое $R_0>0$, что эта функция (форма) определена при $|x|>R_0$.

Напомним, что две числовые функции f и g, определенные вблизи ∞, называются *асимптотически равными при* $|x|\longmapsto\infty$ (в записи $f\sim g$ при $|x|\longmapsto\infty$), если

$$\frac{f(x)}{g(x)}\longmapsto 1\qquad\text{при}\quad |x|\to\infty.$$

Для функций f и g, принимающих значения в $\mathbb{H}'$ (или в любом другом линеале $\mathcal{V}^\circ$), формула $f\sim g$ при $|x|\to\infty$ по определению означает, что при $|x|\to\infty$ асимптотически равны все их координаты (т. е. — в более инвариантных терминах — что $l\circ f\sim l\circ g$ для любого линейного функционала $l\colon\mathcal{V}^\circ\to\mathbb{R}$). Аналогично, для двух дифференциальных форм $A=A_\alpha\,dx^\alpha$ и $B=B_\alpha\,dx^\alpha$, определенных вблизи ∞, формула $A\sim B$ при $|x|\longmapsto\infty$ по определению означает, что $A_\alpha\sim B_\alpha$ для всех $\alpha=0, 1, 2, 3$.

Пусть гладкое отображение $g\colon\mathbb{H}\to\mathbb{S}^3$ определено при $|x|>R_0$. Тогда для любого $R>R_0$ композиция гомотетии $x\longmapsto Rx$ и ограничения функции g на сфере $|x|=R$ будет гладким отображением $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, и потому будет определена степень этого отображения. (См. лекцию III.26.) Эту степень, взятую с обратным знаком, мы обозначим через k (ср. ниже стр. 383).

Задача 9. Покажите, что число k не зависит от выбора числа R.

Теперь мы уже можем сформулировать первое свойство формы (22).

Свойство 1. *Существует такое гладкое отображение $g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{S}^3$, определенное вблизи ∞, что*

$$A_{\lambda, b}(x) \sim g^{-1}(x)\,dg(x) \quad \textit{при} \quad |x| \to \infty \tag{24}$$

для любых λ и b. Число k для этого отображения равно 1.

Доказательство. Ясно, что $A_{\lambda, b} \sim A$ при $|x| \to \infty$, где $A = A_{1,0}$ — форма (20). Поэтому соотношение (24) достаточно доказать лишь для формы A.

Но ясно, что

$$\frac{x}{1+|x|^2} = \bar{x}^{-1}\frac{|x|^2}{1+|x|^2} \sim \bar{x}^{-1} \quad \text{при} \quad |x| \to \infty$$

и

$$d|x| = d\sqrt{x\bar{x}} = \frac{d\bar{x}x + \bar{x}\,dx}{2|x|},$$

$$d\left(\frac{\bar{x}}{|x|}\right) = \frac{d\bar{x}\,|x| - d|x|\,\bar{x}}{|x|^2} = \frac{|x|^2\,d\bar{x} - \bar{x}\,dx\,\bar{x}}{2|x|^3} = \bar{x}\frac{x\,d\bar{x} - dx\bar{x}}{2|x|^3}.$$

Следовательно,

$$A(x) \sim \operatorname{Im}\bar{x}^{-1}\,d\bar{x} = \operatorname{Im}\frac{x\,d\bar{x}}{|x|^2} =$$

$$= \frac{x\,d\bar{x} - dx\bar{x}}{2|x|^2} = g^{-1}(x)\,dg(x) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty,$$

где $g(x) = \dfrac{\bar{x}}{|x|}$. Для завершения доказательства остается заметить, что отображение g переводит сферу $\mathbb{S}^3$ в себя и является на $\mathbb{S}^3$ симметрией $x \mapsto \bar{x}$. $\square$

Перейдем теперь ко второму свойству.

Так как пространство $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ обладает стандартной евклидовой структурой и ориентацией, то (см. теорему 1 лекции II.9б) для кососимметрических тензоров на нем определен оператор Ходжа $*$. Поскольку же касательное пространство пространства $\mathbb{R}^4$ в любой его точке естественным образом отождествляется с $\mathbb{R}^4$, этот оператор определен для кососимметрических тензоров в каждой точке пространства $\mathbb{R}^4$, т. е. для дифференциальных форм на $\mathbb{R}^4$. При этом на базисных дифференциальных формах степени 2 этот оператор действует, как легко видеть, по формулам

$$\begin{aligned} &*(dx^0 \wedge dx^1) = dx^2 \wedge dx^3, && *(dx^1 \wedge dx^2) = dx^0 \wedge dx^3, \\ (25)\quad &*(dx^0 \wedge dx^2) = -dx^1 \wedge dx^3, && *(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^0 \wedge dx^2, \\ &*(dx^0 \wedge dx^3) = dx^1 \wedge dx^2, && *(dx^2 \wedge dx^3) = dx^0 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

По линейности оператор $*$ распространяется на формы со значениями в произвольном линеале (и, в частности, на $\mathbb{H}'$-значные формы).

Заметим (см. формулу (17) лекции II.9б), что $*^2 = 1$.

Дифференциальная форма F степени 2 на пространстве $\mathbb{R}^4$ называется *автодуальной*, если

$$*F = F$$

(и *антиавтодуальной*, если $*F = -F$).

Свойство 2. *Каждая форма* (23) *автодуальна.*

Доказательство. Из формул (25) следует, что базис пространства автодуальных форм состоит из форм

$$\begin{gathered} dx^0 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3, \\ dx^0 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3, \\ dx^0 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2. \end{gathered}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} dx \wedge d\bar{x} = \\ &= (dx^0 + dx^1 i + dx^2 j + dx^3 k) \wedge (dx^0 - dx^1 i - dx^2 j - dx^3 k) = \\ &= -2 \{(dx^0 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)\, i + \\ &+ (dx^0 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3)\, j + (dx^0 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2)\, k\}, \end{aligned}$$

это доказывает свойство 2. □

Как уже было сказано, роль и значение этих свойств будут объяснены в следующей лекции.