Лекция 22

Уравнения Максвелла электромагнитного поля.—Операторная интерпретация.—Калибровочные поля.—Инстантоны.—Формула для топологического заряда.—Функционал Янга—Миллса.—Инвариантные многочлены на пространстве матриц.—Характеристические классы векторных расслоений.

Кажущиеся произвольными построения конца предыдущей лекции находят себе оправдание в современной теории физических полей.

Из физики известно, что электромагнитное поле описывается двумя векторами электрической и магнитной напряженности $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, удовлетворяющими в вакууме уравнениям Максвелла

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0. \tag{2}$$

В четырехмерном формализме специальной теории относительности эти векторы объединяются в один кососимметрический тензор F, имеющий в координатах $x^0 = ict$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ компоненты

$$\begin{Vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & iE_x & iE_y & iE_z \\ -iE_x & 0 & H_z & -H_y \\ -iE_y & -H_z & 0 & H_x \\ -iE_z & H_y & -H_x & 0 \end{Vmatrix},$$

т. е. в другой системе понятий—в дифференциальную форму

$$F = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta =$$
$$= c\,(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz) \wedge dt +$$
$$+ H_z\,dx \wedge dy - H_y\,dx \wedge dz + H_x\,dy \wedge dz.$$

Внешний дифференциал этой формы выражается формулой

$$dF = \sum_{\alpha<\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\, dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta =$$
$$= \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$+\left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}-\frac{\partial F_{03}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}\right)dx^0\wedge dx^2\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3}-\frac{\partial F_{03}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0}\right)dx^0\wedge dx^1\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{02}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}\right)dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2=$$
$$=\left(\frac{\partial H_z}{\partial z}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_x}{\partial x}\right)dx\wedge dy\wedge dz-$$
$$-c\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}\right)dt\wedge dy\wedge dz-$$
$$-c\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}\right)dt\wedge dx\wedge dz-$$
$$-c\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)dt\wedge dx\wedge dy,$$

и, значит, первая пара (1) уравнений Максвелла равносильна тождественному обращению в нуль этого дифференциала:

$$dF=0, \tag{3}$$

т. е. замкнутости формы F.

При формальных преобразованиях удобно считать все переменные x^α, $0\leqslant\alpha\leqslant 4$ (в том числе и переменную x^0!), вещественными, т. е. рассматривать форму F на пространстве $\mathbb{R}^4$ (это равносильно введению в рассмотрение мнимого времени it; физики называют переход от t к it *виковским поворотом*). Тогда к форме F можно будет применить оператор Ходжа $*$, получив тем самым форму

$$\begin{aligned}*F&=F_{01}\,dx^2\wedge dx^3-F_{02}\,dx^1\wedge dx^3+F_{03}\,dx^1\wedge dx^2+\\&+F_{12}\,dx^0\wedge dx^3-F_{13}\,dx^0\wedge dx^2+F_{23}\,dx^0\wedge dx^1=\\&=-ic\,(H_x\,dx+H_y\,dy+H_z\,dz)\wedge dt+\\&+i\,(E_x\,dy\wedge dz-E_y\,dx\wedge dz+E_z\,dx\wedge dy)\end{aligned}$$

(см. формулы (25) лекции 21). Так как

$$d{*}F=\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{02}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{03}}{\partial x^3}\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^0}-\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{13}}{\partial x^3}\right)dx^0\wedge dx^2\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0}-\frac{\partial F_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^3}\right)dx^0\wedge dx^1\wedge dx^3+$$

$$+\left(\frac{\partial F_{03}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^2}\right)dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2=$$
$$=i\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz+$$
$$+ic\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)dt\wedge dy\wedge dz+$$
$$+ic\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}-\frac{\partial H_z}{\partial x}+\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)dt\wedge dx\wedge dz+$$
$$+ic\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}-\frac{\partial H_y}{\partial x}+\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)dt\wedge dx\wedge dy,$$

то, следовательно, вторая пара (2) уравнений Максвелла равносильна уравнению

$$d{*}F=0. \tag{4}$$

[В присутствии зарядов уравнение (3) сохраняется, а уравнение (4) приобретает вид $d{*}F={*}4\pi i\varphi$, где $\varphi=\rho\,dt+j_x\,dx+j_y\,dy+j_z\,dz$ (здесь ρ — плотность заряда, а j_x, j_y, j_z — компоненты вектора плотности тока).]

Согласно лемме Пуанкаре (см. лекцию III.20) из (3) следует, что на пространстве $\mathbb{R}^4$ существует *потенциал*, т. е. такая линейная форма

$$A=A_\alpha(x)\,dx^\alpha,\qquad \alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{5}$$

что

$$F=dA. \tag{6}$$

Для коэффициентов это означает выполнение равенств

$$F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta},\qquad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{7}$$

Потенциал A должен удовлетворять уравнению второго порядка

$$d{*}dA=0, \tag{8}$$

получающегося подстановкой $F=dA$ в уравнение (4). Он определен с точностью до преобразований вида

$$A\mapsto A+df, \tag{9}$$

где f — произвольная функция. Преобразования (9) называются *калибровочными преобразованиями.*

В трехмерном формализме 4-вектор A распадается на *скалярный потенциал* φ и *векторный потенциал* $\mathbf{A}$. Пользуясь преобразованиями (9), можно всегда обратить потенциал φ и дивергенцию $\operatorname{div}\mathbf{A}$

потенциала A в нуль (это — так называемая *лоренцева калибровка* потенциала). В лоренцевой калибровке уравнение (8) превращается в волновое уравнение д'Аламбера

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=\Delta A,$$

а равенство (6) приобретает вид

$$E=-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad H=\operatorname{rot} A.$$

Отсюда следует, что *поля E и H удовлетворяют тому же уравнению д'Аламбера.* Физически это означает, что электромагнитное поле в пустоте имеет вид электромагнитных волн.

Каждая гладкая функция f определяет на линейном пространстве F всех гладких функций на $\mathbb{R}^4$ линейный оператор

$$(10) \qquad T_f\colon \psi \mapsto f\psi, \qquad \psi \in \mathsf{F},$$

умножения на f. Этот оператор тогда и только тогда обратим, когда функция f нигде не обращается в нуль.

Наряду с операторами (10) мы будем рассматривать на F также операторы частного дифференцирования

$$\partial_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \qquad \alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

по координатам и их суммы $\partial_\alpha+T_f$ с оператором (10). Впрочем, удобно вместо T_f писать f и, следовательно, вместо $\partial_\alpha+T_f$ писать $\partial_\alpha+f$.

Имея это в виду, мы каждому потенциалу (5) поставим в соответствие операторный 4-вектор ∇ с компонентами

$$(11) \qquad \nabla_\alpha=\partial_\alpha+A_\alpha, \qquad \alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Для любых двух операторов ∇_α, ∇_β вида (11) их коммутатор $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ выражается формулой

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha.$$

Это показывает, во-первых, что этот коммутатор является оператором умножения на функцию, а во-вторых — см. формулу (7) — что эта функция представляет собой не что иное, как коэффициент $F_{\alpha\beta}$ формы F. Таким образом,

$$(12) \qquad F_{\alpha\beta}=[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$$

для любых α, $\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3$ (что является, конечно, лишь другой записью соотношения (6)).

Чтобы получить в операторной интерпретации калибровочные преобразования (9), мы для произвольной всюду отличной от нуля функции g рассмотрим составной оператор $\nabla_\alpha \circ T_g$, т. е. оператор

$$\psi \mapsto \nabla_\alpha(g\psi) = (\partial_\alpha + A_\alpha)(g\psi) = (\partial_\alpha g)\psi + (\partial_\alpha + A_\alpha)\psi = \\ = g(\nabla_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g)\psi.$$

Видно, что

$$\nabla_\alpha \circ T_g = T_g \circ \nabla'_\alpha,$$

где $\nabla'_\alpha = \nabla_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g$ — операторы (11), отвечающие потенциалу A' с компонентами

$$A'_\alpha = A_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g = A_\alpha + \partial_\alpha \ln g,$$

т. е. потенциалу, получающемуся из потенциала A преобразованием (9) с $f = \ln g$. Таким образом, калибровочные преобразования — это в точности преобразования $A \mapsto A'$, отвечающие преобразованиям вида $\nabla_\alpha \mapsto T_g^{-1} \circ \nabla_\alpha \circ T_g$, т. е. — в другой записи — вида

$$\nabla_\alpha \mapsto g^{-1} \circ \nabla_\alpha \circ g \tag{13}$$

(трансформациям посредством операторов $g = T_g$).

Резюмируя, мы получаем, что *потенциал электромагнитного поля мы можем интерпретировать как операторный 4-вектор с компонентами* (11), *само поле F — как дифференциальную форму на $\mathbb{R}^4$ с операторными коэффициентами* (12), *а калибровочные преобразования — как трансформации вида* (13). (При этом функции ψ, на которых действуют операторы, физически интерпретируются как компоненты электронно-позитронного поля Дирака.)

Эта формулировка допускает немедленное обобщение, состоящее в том, что в операторах (11) функции A_α считаются принимающими значения в некоторой матричной алгебре Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n; \mathbb{K})$, т. е. *потенциал* (5) *считается линейной $\mathfrak{g}$-значной дифференциальной формой на* $\mathbb{R}^4$. Тогда из-за некоммутативности матричного умножения коммутаторы (12) будут выражаться формулой

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta].$$

Иными словами, форма

$$F = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

будет $\mathfrak{g}$-значной дифференциальной формой второй степени, выражающейся через форму A по формуле

$$F = dA + A \wedge A. \tag{14}$$

Физическое поле, описывающееся формой вида (14), называется *калибровочным полем с потенциалом* A. Таким образом, в этой терминологии электромагнитное поле является не чем иным, как калибровочным полем с $\mathfrak{gl}(1; \mathbb{R})$-значным потенциалом. (Впрочем, чтобы не выходить за рамки алгебр Ли компактных групп — что часто бывает удобно — целесообразно все умножить на мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$ и считать, что потенциал электромагнитного поля принимает значения в алгебре Ли $i\mathbb{R} = \mathfrak{u}(1)$ унитарной группы $\mathrm{U}(1)$.

Что же касается калибровочных преобразований, то для матричных потенциалов они определяются как преобразования $A \mapsto A'$, отвечающие трансформациям вида (13), где g — произвольная функция на $\mathbb{R}^4$, принимающая значения в матричной группе Ли $\mathcal{G}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

Являясь матрицами порядка n, коэффициенты форм A и F действуют на n-компонентных векторных полях ψ на $\mathbb{R}^4$. Так как для любого такого поля ψ и любой $\mathcal{G}$-значной матричной функции g имеют место тождества

$$(\partial_\alpha \circ g)\,\psi = \partial_\alpha (g\psi) = (\partial_\alpha g)\,\psi + g\,(\partial_\alpha \psi),$$
$$\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

где $\partial_\alpha g$ при $g = \| g^i_j \|$ — матрица $\| \partial_\alpha g^i_j \|$, то (мы, как и выше, опускаем знак $\circ$)

$$(g^{-1} \nabla_\alpha g)\,\psi = (g^{-1}\partial_\alpha g)\,\psi + \partial_\alpha \psi + (g^{-1} A_\alpha g)\,\psi =$$
$$= (\partial_\alpha + g^{-1} A_\alpha g + g^{-1} \partial_\alpha g)\,\psi.$$

Это означает, что для матричных потенциалов калибровочные преобразования имеют вид

$$A \mapsto g^{-1} A g + g^{-1}\,dg. \tag{15}$$

При каждом таком преобразовании форма F переходит в форму

$$d(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) + (g^{-1}Ag + g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}Ag + g^{-1}dg) =$$
$$= dg^{-1} \wedge Ag + g^{-1}\,dAg - g^{-1}A \wedge dg + dg^{-1} \wedge dg +$$
$$+ g^{-1}A \wedge Ag + g^{-1}A \wedge dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}Ag +$$
$$+ g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg = g^{-1}(dA + A \wedge A)\,g = g^{-1}Fg$$

(напомним, что $dg^{-1}=-g^{-1}dg\,g^{-1}$). Преобразование $F\to g^{-1}Fg$ также называется калибровочным.

Сравнив теперь формулу (14) с формулой (38′) лекции 19 (структурным уравнением Картана), мы немедленно обнаружим, что *калибровочное поле является не чем иным, как формой* (*тензором*) *кривизны некоторой связности, а его потенциал — формой этой связности*! Калибровочные же преобразования (14) представляют собой не что иное, как преобразование форм связности в различных тривиализациях (см. формулу (17″) лекции 10).

Появление в этом контексте связностей можно пояснить следующим образом.

В принципе каждое калибровочное поле F связано с некоторым *полем материи* ψ. Например, для электромагнитного поля таким полем будет биспинорное поле Дирака, частицами которого являются электроны и позитроны. В общем случае в конструкцию поля материи входит задание некоторой матричной группы Ли $\mathcal{G}$, называемой *группой внутренних симметрий*. (Для электронно-позитронного поля Дирака группой $\mathcal{G}$ является группа U (1) фазовых преобразований $\psi\mapsto e^{i\varepsilon}\psi$.) Имеется в виду, что частицы поля обладают некоей внутренней структурой, на которую действует группа $\mathcal{G}$. Для нуклонного (протонно-нейтронного) поля внутренняя структура частиц описывается изотопическим спином, а группой $\mathcal{G}$ является группа SU (2) (группа *изотопической симметрии*). Для кваркового поля внутренняя структура задается тройкой цветов, а группой $\mathcal{G}$ является группа SU (3) (*группа цветовой симметрии*) и т. д. При движении частицы из точки x пространства Минковского в точку y по двум разным мировым линиям, частица приходит в точку y, вообще говоря, с разными внутренними состояниями. Физически это изменение означает, что на частицу подействовало соответствующее калибровочное поле, а геометрически — что вектор внутреннего состояния частицы подвергся преобразованию из группы голономии $\mathcal{G}$.

Аналогом уравнения Максвелла (3) (напомним, тождественно выполняющегося в силу равенства (6)) является уравнение Бианки

$$dF=F\wedge A-A\wedge F \qquad (\text{или } DF=0),$$

тождественно выполняющееся в силу равенства (14), а аналогом уравнения Максвелла (4) — уравнение

$$D*F=0, \tag{16}$$

называемое *уравнением Янга — Миллса*. (Таким образом, калибровочные поля — это не любые связности на $\mathbb{R}^4$, а лишь удовлетворяющие уравнению (16).)

При $\mathcal{G} = SU(2)$ калибровочные поля называются *полями Янга — Миллса.*

Так как равенство (14) означает (см. формулу (15) лекции 21), что $F = DA$, то для потенциала A уравнение (16) приобретает вид

$$D * DA = 0, \tag{17}$$

полностью аналогичный уравнению (8).

По физическим соображениям каждое калибровочное поле должно, кроме того, обращаться в бесконечности в нуль, т. е. быть таким, что для любых α, β

$$F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{18}$$

Удобный технический способ учесть условие (18) состоит в переходе к компактифицированному пространству $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$, получающемуся из пространства $\mathbb{R}^4$ добавлением одной точки ∞. (Поле F продолжается в точку ∞ нулем.) Здесь хорошо воспользоваться стереографической проекцией и перейти от пространства $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ к сфере $\mathbb{S}^4$. Тогда в стереографических координатах с полюсом e_4 потенциал A будет линейной дифференциальной формой на проколотой сфере $U^{(+)} = \mathbb{S}^4 \setminus \{e_4\}$, а условие (18) будет выполнено тогда и только тогда, когда на проколотой сфере $U^{(-)} = \mathbb{S}^4 \setminus \{-e_4\}$ будет существовать потенциал B, равный нулю в точке e_4 и калибровочно эквивалентный вне точек $\pm e_4$ потенциалу A. На $\mathbb{R}^4$ потенциал B определен вне точки $\mathbf{0}$ и вне этой точки связан с потенциалом A соотношением

$$A = g^{-1}Bg + g^{-1}dg, \tag{19}$$

где g — некоторое гладкое отображение $\mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathcal{G}$.

Трактуемое как отображение $\mathbb{S}^4 \setminus \{-e_4, e_4\} \to \mathcal{G}$ отображение g является не чем иным, как коциклом над группой $\mathcal{G}$ двухэлементного покрытия $\{U^{(-)}, U^{(+)}\}$ сферы $\mathbb{S}^4$ и, значит, определяет над $\mathbb{S}^4$ некоторое главное $\mathcal{G}$-расслоение ξ. При этом потенциалы A и B будут формами некоторой связности ∇ на этом расслоении, а поле F — формой кривизны этой связности (над $U^+ = \mathbb{S}^4 \setminus \{e_4\}$; в точке e_4 форма кривизны связности ∇ по условию равна нулю).

Так как в точке e_4 потенциал B равен нулю, то на $\mathbb{R}^4$ условие (19) равносильно асимптотическому равенству

$$A \sim g^{-1}dg \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{19$'$}$$

Задание такого равенства однозначно определяет расслоение ξ и потенциал B, а значит, и связность ∇.

Таким образом, мы имеем два равносильных языка. На одном языке потенциалы калибровочных полей с группой $\mathcal{G}$ — это $\mathfrak{g}$-значные линейные дифференциальные формы (5) на $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющие соотношению (19′) с некоторой $\mathcal{G}$-значной функцией g, определенной на $\mathbb{R}^4$ вблизи ∞. На другом языке — это связности на главных $\mathcal{G}$-расслоениях с базой $\mathbb{S}^4$. Функции g являются при этом не чем иным, как склеивающими коциклами этих расслоений.

Два поля (потенциала) называются *калибровочно эквивалентными*, если они переходят друг в друга при некотором автоморфизме расслоения ξ над $\mathbb{S}^4$.

Подчеркнем, что это сведение калибровочных полей к связностям нельзя считать полным, поскольку поле должно, помимо всего прочего, удовлетворять уравнению Янга — Миллса (16), не имеющего пока геометрической интерпретации.

Все же некоторую пользу для физики извлечь можно. Например, мы видим, что каждое калибровочное поле обладает неким инвариантом, являющимся гомотопическим классом отображений $\mathbb{S}^3 \to \mathcal{G}$. Для группы $SU(2) = \mathbb{S}^3$ этот инвариант характеризуется целым числом k (степенью). Взятый с обратным знаком, он называется физиками *топологическим зарядом*.

С другой стороны, существует способ вообще полностью элиминировать таинственные уравнения (16). Он состоит в том, что мы ограничиваемся лишь автодуальными или антиавтодуальными полями, т. е. — см. лекцию 21 — полями F, для которых

$$*F = \pm F. \tag{20}$$

Для этих полей уравнение (16) сводится к уравнению Бианки $DF = 0$ и, значит, заведомо выполнено. Таким образом, *потенциалы (анти)автодуальных полей на $\mathbb{R}^4$ — это в точности связности в главных расслоениях над $\mathbb{S}^4$ с (анти)автодуальными формами кривизны (обращающимися в нуль в точке e_4).*

Здесь уже редукция к геометрии вполне адекватна.

Заметим, что понятие (анти)автодуальных полей имеет смысл только над евклидовым пространством $\mathbb{R}^4$. [Хотя над пространством Минковского и можно определить оператор Ходжа $*$, но для этого оператора будет иметь место равенство $*^2=-1$, и потому уравнения (20) будут удовлетворяться только при $F=0$.]

При $\mathscr{G}=\mathrm{SU}(2)$ автодуальные поля, имеющие положительный заряд, и антиавтодуальные поля, имеющие отрицательный заряд, называются *мультиинстантонами*. Мультиинстантон с зарядом k называется *k-инстантоном*. Таким образом, k-инстантоны — это поля Янга—Миллса F с зарядом k, для которых

$$*F=(\operatorname{sign} k)\,F.$$

[Ниже мы увидим, что равенство $*F=-(\operatorname{sign} k)\,F$ возможно только при $F=0$.] Мультиинстантоны с $k=1$ называются просто *инстантонами*, а с $k=-1$ — *антиинстантонами*.

Теперь мы понимаем, что, собственно говоря, было сделано в конце лекции 21. *Это было явное построение целой серии инстантонов* $F_{\lambda,\,b}$. Впервые оно было осуществлено в 1975 г. в пионерской работе Белавина, Полякова, Шварца и Тюпкина. Позже в 1978 г. Атья, Дринфельд, Хитчин и Манин доказали, что *любой инстантон калибровочно эквивалентен одному и только одному инстантону* $F_{\lambda,\,b}$. Мы лишены возможности изложить здесь их доказательство.

Аналоги инстантонов $F_{\lambda,\,b}$ можно построить для любого k (и для них также будет верна теорема Атья, Дринфельда, Хитчина и Манина), но при $|k|>1$ это описание не дает явных формул (при $k>1$ роль λ и $\boldsymbol{b}$ играют кватернионный вектор $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k)$ и кватернионная симметрическая $k\times k$-матрица $\boldsymbol{B}$, но не любые, а связанные определенными зависимостями, нуждающимися в дополнительном исследовании).

Эти зависимости следующие:

а) матрица $\bar{B}B+\bar{\lambda}^{\mathsf{T}}\lambda$ вещественна и диагональна;

б) для любого кватерниона $x\in\mathbb{H}$ уравнения

$$B\xi=x\xi,\quad \lambda\xi=0,$$

где $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_k)^{\mathsf{T}}$ — столбец кватернионов, имеют единственное решение $\xi=0$.

Изменение знака у k сводится к перестановке dx и $d\bar{x}$.

В связи с понятием топологического заряда поля Янга—Миллса естественным образом возникает вопрос о его явном вычислении непосредственно по полю F, минуя потенциал A. Оказывается, что на этот вопрос существует красивый ответ.

Для любых двух форм

$$F=\sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad G=\sum_{\alpha<\beta} G_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

степени 2 на $\mathbb{R}^4$ форма $F \wedge *G$ имеет максимальную степень 4 и выражается, как легко видеть, формулой

$$F \wedge *G=\Big(\sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}\Big)\,dx, \tag{21}$$

где $dx=dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$. Если формы F и G удовлетворяют условию (18) и, значит, могут рассматриваться как формы на $\mathbb{S}^4$, то форма $F \wedge *G$ также будет формой на $\mathbb{S}^4$, и потому — в силу компактности сферы $\mathbb{S}^4$ — будет существовать интеграл

$$\int_{\mathbb{S}^4} F \wedge *G=\int_{\mathbb{R}^4}\Big(\sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}\Big)\,dx.$$

В случае, когда коэффициенты форм F и G являются числовыми (вещественными) функциями, этот интеграл обозначается символом $\langle F, G\rangle$ и называется *скалярным произведением* форм F и G. Из формулы (21) непосредственно следует, что это умножение задает на пространстве форм $\Omega^2(\mathbb{S}^4)$ структуру евклидова пространства (или в другой, более предпочтительной из-за бесконечномерности пространства $\Omega^2(\mathbb{S}^4)$ терминологии — структуру предгильбертова пространства).

В случае форм с коэффициентами из алгебры матриц $\mathfrak{su}(2)$ нужно предварительно перейти к следу. Кроме того, чтобы получилось положительно определенное скалярное умножение, нужно все умножить на -1. Таким образом, для $\mathfrak{su}(2)$-значных форм мы полагаем

$$\langle F, G\rangle=-\int_{\mathbb{S}^4} \operatorname{Tr}(F \wedge *G). \tag{22}$$

В интерпретации $\mathfrak{su}(2)$-значных форм как форм с коэффициентами из $\mathbb{H}'$ след переходит в операцию $2\operatorname{Re}$ и, значит,

$$\langle F, G\rangle=-2\int_{\mathbb{S}^4} \operatorname{Re}(F \wedge *G). \tag{22'}$$

Задача 1. Покажите, что для любого поля Янга — Миллса F его топологический заряд k выражается формулой

$$k=\frac{1}{8\pi^2}\langle F, *F\rangle, \tag{23}$$

т. е. формулой

(23′) $$k=-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S^4}\operatorname{Tr}(F\wedge F).$$

Неожиданным образом формула (23) позволяет также охарактеризовать мультиинстантоны как точки минимума некоторого функционала. Действительно, ясно, что по отношению к скалярному умножению (22) оператор Ходжа $*$ самосопряжен (симметричен). Поэтому его собственные подпространства, принадлежащие собственным значениям ± 1 (т. е. пространства автодуальных и антиавтодуальных форм), ортогональны и приводят этот оператор. Это означает, что любая форма F единственным образом представляется в виде

$$F=F^{(+)}+F^{(-)},$$

где формы $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$ ортогональны, причем форма $F^{(+)}$ автодуальна, а форма $F^{(-)}$ антиавтодуальна. Поэтому для квадрата нормы $\|F\|^2=\langle F,\ F\rangle$ этой формы имеет место формула

$$\|F\|^2=\|F^{(+)}\|^2+\|F^{(-)}\|^2,$$

а для топологического заряда k—формула

$$k=\frac{1}{8\pi^2}(\|F^{(+)}\|^2-\|F^{(-)}\|^2).$$

Поэтому

(24) $$\|F\|\geqslant 8\pi^2|k|,$$

причем равенство может иметь место только при $*F=$ $=(\operatorname{sign}k)F$, т. е. для мультиинстантонов. (Кроме того, мы видим, что равенство $*F=-(\operatorname{sign}k)F$ возможно только при $F=0$; см. выше.)

С другой стороны, непосредственное вычисление, использующее явные формулы Белавина, Полякова, Шварца и Тюпкина, указанные в лекции 21, показывает, что для мультиинстантонов неравенство (24) переходит в равенство.

Задача 2. Проверьте это утверждение при $k=1$.

Функционалом Янга—Миллса называется функционал на пространстве всех $\mathfrak{su}(2)$-значных потенциалов A, определенный формулой

(25) $$A\mapsto\|F_A\|,$$

где F_A — форма кривизны связности A. Мы видим, таким образом, что *мультиинстантоны (или, точнее, их потенциалы) — это в точности точки минимума функционала Янга — Миллса.*

Замечание 1. В нелинейном функциональном анализе (вариационном исчислении) имеется понятие стационарной точки функционала (аналогичное понятию стационарной точки функции конечного числа переменных). Оказывается, что *поля Янга — Миллса — это в точности стационарные точки функционала Янга — Миллса.*

Впрочем, существуют ли такие поля, не являющиеся мультиинстантонами, до сих пор неизвестно. (Для группы SU(3) — случай глюонного поля — они построены.)

Ключевая формула (23′) является примером весьма общих интегральных формул, относящихся к произвольным главным или — что в принципе равносильно — к произвольным векторным расслоениям ξ и выражающих топологические инварианты этих расслоений (а точнее — классы когомологий некоторых замечательных дифференциальных форм на их базах) через формы кривизны связностей на ξ.

Чтобы построить такие формы, мы должны начать сравнительно издалека.

Пусть $\mathrm{Mat}_n \mathbb{K}$ — линейное пространство всех квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и пусть

(26) $$F\colon \mathrm{Mat}_n \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

— функция $A \mapsto F(A)$, $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{K}$, являющаяся многочленом от элементов a^i_j матрицы $A = \|a^i_j\|$.

Определение 1. Функция (26) называется *инвариантным многочленом*, если

$$F(AB) = F(BA)$$

для любых матриц A, $B \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{K}$.

Задача 3. Покажите, что *функция* (26) *тогда и только тогда является инвариантным многочленом, когда*

$$F(C^{-1}AC) = F(A)$$

для любой невырожденной матрицы $C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ (и любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$).

Примерами инвариантных многочленов являются след $\mathrm{Tr}\, A$, определитель $\det A$ и все элементарные симметрические функции $\sigma_k(A)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, от характеристических корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A (т. е. — с точностью до знака

$(-1)^k$ — коэффициенты характеристического многочлена $f_A(\lambda) = \det|A - \lambda E|$ матрицы A).

Заметим, что $\sigma_1 = \mathrm{Tr}$ и $\sigma_n = \det$.

Задача 4. Докажите, что *любой инвариантный многочлен F может быть представлен в виде многочлена от многочленов* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. [Указание. Докажите, что значение многочлена F на произвольной диагональной матрице $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ является симметрическим многочленом от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и, значит, — согласно так называемой основной теореме теории симметрических функций — многочленом от $\sigma_1(D), \ldots, \sigma_n(D)$. Затем воспользуйтесь тем, что матрицы вида $C^{-1}DC$, $C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$, всюду плотны в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.]

Задача 5. Докажите, что *если многочлен F инвариантен, то*

$$F(A^\top) = F(A)$$

для любой матрицы A. [Указание. Матрицы A и $A^\top$ имеют одни и те же характеристические корни.]

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать лишь однородные инвариантные многочлены.

Задача 6. Докажите, что *однородные составляющие произвольного инвариантного многочлена также являются инвариантными многочленами.*

Таким образом, каждый инвариантный многочлен является суммой однородных инвариантных многочленов.

Пусть $F_i^j = \dfrac{\partial F}{\partial a_j^i}$ — частные производные многочлена F по его аргументам a_j^i. Для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ значения $F_i^j(A)$ этих производных в свою очередь составляют матрицу $\|F_i^j(A)\|$. Мы обозначим эту матрицу символом $F'(A)$.

Заметим, что классическая формула $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x^i} dx^i$ для дифференциала в случае функции (26) имеет вид

$$dF = F_i^j \, da_j^i.$$

В матричных обозначениях эту формулу можно переписать так:

$$dF(A) = \mathrm{Tr}(F'(A)\, dA). \tag{27}$$

Содержательный смысл формулы (27) состоит в том, что для любой гладкой матричной функции $t \mapsto A(t) = \|a_j^i(t)\|$

имеет место равенство

(28) $$\frac{dF(A(t))}{dt} = \mathrm{Tr}\left(F'(A(t))\frac{dA(t)}{dt}\right),$$

где $\dfrac{dA(t)}{dt}$ — матрица производных $\left\|\dfrac{da_j^i(t)}{dt}\right\|$.

Лемма 1. *Если многочлен F инвариантен, то для произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ матрицы $F'(A)$ и A перестановочны:*

(29) $$AF'(A) = F'(A)A.$$

Доказательство. Пусть E_k^l — матричная единица $\|\delta_k^i \delta_j^l\|$ (все элементы этой матрицы равны нулю, за исключением элемента в k-й строке и l-м столбце, который равен единице). В силу инвариантности многочлена F для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

(30) $$F((E + tE_k^l)A) = F(A(E + tE_k^l)).$$

Так как матрица

$$\frac{d(E + tE_k^l)A}{dt} = E_k^l A$$

выражается формулой

$$E_k^l A = \|\delta_k^i a_j^l\|$$

(все ее строки равны нулю, за возможным исключением k-й, которая совпадает с l-м столбцом матрицы A), а матрица

$$\frac{dA(E + tE_k^l)}{dt} = AE_k^l$$

— формулой

$$AE_k^l = \|a_k^i \delta_j^l\|$$

(все ее столбцы равны нулю, за возможным исключением l-го, который совпадает с k-й строкой матрицы A), то, продифференцировав с помощью формулы (28) равенство (30) и положив $t = 0$, мы получим соотношение

$$F_k^j(A) a_j^l = F_l^j(A) a_k^i,$$

в точности равносильное тождеству (29). □

Пусть теперь $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ — гладкое векторное расслоение ранга n над гладким многообразием $\mathscr{X}$. Произвольно задав на ξ некоторую связность H, рассмотрим ее тензор кривизны R и матричные формы Ω, задающие тензор R на тривиализирующих окрестностях $U \subset \mathscr{X}$ (см. лекцию 19).

Каждая функция (26) очевидным образом распространяется на матрицы A, элементы которых являются не числами, а элементами произвольной коммутативной алгебры над полем $\mathbb{K}$. В частности, поскольку умножение дифференциальных форм четной степени коммутативно, то для произвольного однородного многочлена (26) определена на каждой тривиализирующей окрестности U дифференциальная форма $F(\Omega)$ (чтобы вычислить эту форму, надо в F вместо переменных a^i_j подставить формы Ω^i_j и все умножения понимать как внешние умножения $\wedge$). Матрица Ω зависит от выбора тривиализации расслоения ξ над U и для другой тривиализации заменяется матрицей $C^{-1}\Omega C$, где C — матрица перехода над алгеброй $\mathsf{F}U$, связывающая эти тривиализации (базисы $\mathsf{F}U$-модуля $\Gamma(\xi|_U)$). Поэтому, если многочлен F инвариантен, то форма $F(\Omega)$ не зависит от выбора тривиализации над U и, значит, формы $F(\Omega)$, построенные для всевозможных окрестностей U, согласованы на пересечениях. Следовательно, они определяют некоторую дифференциальную форму (над полем $\mathbb{K}$) на всем многообразии $\mathscr{X}$.

Мы будем обозначать эту форму символом $F(R)$.

Заметим, что степень формы $F(R)$ равна $2r$, где r — степень многочлена F (напомним — однородного и инвариантного).

Предложение 1. *Для любого однородного инвариантного многочлена F форма $F(R)$ замкнута:*

$$dF(R) = 0.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $dF(\Omega) = 0$ на любой окрестности U. Так как на формах четной степени оператор d является дифференцированием (удовлетворяет обычному правилу дифференцирования произведения), то для вычисления формы $dF(\Omega)$ пригодна формула (27), принимающая при $A = \Omega$ вид

$$dF(\Omega) = \operatorname{Tr}(F'(\Omega) \wedge d\Omega).$$

С другой стороны, согласно тождеству Бианки (формула (39) лекции 19)

$$F'(\Omega) \wedge d\Omega = F'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega - F'(\Omega) \wedge \Omega \wedge \omega,$$

а согласно лемме 1 (примененной к матрице $A=\Omega$)

$$F'(\Omega)\wedge\Omega=\Omega\wedge F'(\Omega).$$

Поэтому

$$F'(\Omega)\wedge d\Omega=\Xi\wedge\Omega-\Omega\wedge\Xi,$$

где $\Xi=F'(\Omega)\wedge\omega$, и, значит,

$$\operatorname{Tr}(F'(\Omega)\wedge d\Omega)=\operatorname{Tr}(\Xi\wedge\Omega-\Omega\wedge\Xi)=0. \ \square$$

Напомним (см. лекцию III.20), что для любого многообразия $\mathscr{X}$ и каждого $k\geqslant 0$ определена группа когомологии де Рама $H^k\mathscr{X}$ (на самом деле $\mathbb{R}$-линейное пространство), элементами которой являются классы когомологий $[\omega]$ замкнутых форм ω степени k на $\mathscr{X}$. Если рассматривать формы с комплексными коэффициентами, то аналогичным образом возникнут *комплексные группы когомологии* $H^k_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$.

Задача 7. Покажите, что линеал $H^k_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ является комплексификацией линеала $H^k\mathscr{X}$. [Указание. Если $\omega=\omega_1+i\omega_2$, где ω_1 и ω_2 — формы с вещественными коэффициентами, то $d\omega=d\omega_1+i\,d\omega_2$, где $d\omega_1$ и $d\omega_2$ — также формы с вещественными коэффициентами.]

Для единообразия линеал $H^k\mathscr{X}$ обозначается также символом $H^k_{\mathbb{R}}\mathscr{X}$.

Так как согласно предложению 1 форма $F(R)$ замкнута, то в группе $H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ определен ее класс когомологий $[F(R)]$. Оказывается, что этот класс не зависит от выбора связности H.

Предложение 2. *Пусть H_0 и H_1 — две связности на $\mathbb{K}$-векторном расслоении ξ и пусть R_0 и R_1 — их тензоры кривизны. Тогда для любого однородного инвариантного многочлена F в группе $H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ имеет место равенство*

$$[F(R_0)]=[F(R_1)].$$

Доказательство. Пусть pr^*H_0 и pr^*H_1 — прообразы связностей H_0 и H_1 при проекции $\mathrm{pr}\colon \mathscr{X}\times I\to\mathscr{X}$. Так как (см. лекцию 18) связности на любом векторном расслоении составляют аффинное пространство, то для каждого $s\in\mathbb{R}$ на расслоении $\xi\times I$ определена связность

$$H'_s=(1-s)\,\mathrm{pr}^*H_0+s\,\mathrm{pr}^*H_1.$$

Ясно, что связности H'_s составляют гладкое семейство связностей на $\xi\times I$ и потому определяют связность $\{H'_s\}$ на $(\xi\times I)\times I$. Пусть $H'=\{H'_s\}_{s=t}$ — ее диагонализация (см.

лекцию 10), а R' — форма кривизны связности H'. Тогда для любого $t \in I$ будет иметь место формула

$$i_t^* H' = i_t^* H_t'$$

(см. формулу (18) лекции 10), где $i_t\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times I$ — вложение $b \mapsto (b, t)$, $b \in \mathscr{X}$. Но так как $\mathrm{pr} \circ i_t = \mathrm{id}$ для любого $t \in I$, то в рассматриваемом случае $i_t^* H_s' = (1-s) H_0 + sH_1$ и, значит, $i_t^* H_t' = (1-t) H_0 + tH_1$. Следовательно,

$$i_t^* H' = (1-t) H_0 + tH_1$$

и, в частности, $i_0^* H' = H_0$, $i_1^* H' = H_1$. Поэтому $R_0 = i_0^* R'$, $R_1 = i_1^* R'$ (см. задачу 1 лекции 19) и, значит,

$$F(R_0) = i_0^* F(R'), \quad F(R_1) = i_1^* F(R').$$

Но мы знаем (см. предложение 3 лекции III.20), что для любого k соответствие $\omega \mapsto (\mathrm{pr})^* \omega$ индуцирует изоморфизм групп когомологий $H^k \mathscr{X} \to H^k(\mathscr{X} \times I)$ (а значит, и изоморфизм $H_{\mathbb{C}}^k \mathscr{X} \to H_{\mathbb{C}}^k (\mathscr{X} \times I)$).

Поскольку $\mathrm{pr} \circ i_t = \mathrm{id}$ для любого $t \in I$, обратный изоморфизм будет задаваться соответствием $\omega \mapsto i_t^* \omega$, откуда следует, что для произвольной замкнутой формы ω на $\mathscr{X} \times I$ класс когомологий $i_t^* [\omega] = [i_t^* \omega]$ на $\mathscr{X}$ не зависит от $t \in I$. В частности, при $t = 0, 1$ мы получим, что $[i_0^* \omega] = [i_1^* \omega]$. При $\omega = F(R')$ это дает искомое равенство $[F(R_0)] = [F(R_1)]$. □

Таким образом, для любого однородного инвариантного многочлена F формула

$$c^F(\xi) = [F(R)]$$

корректно определяет в группе $H_{\mathbb{K}}^{2r} \mathscr{X}$ некоторый элемент $c^F(\xi)$.

Определение 2. Элемент $c^F(\xi)$ называется *характеристическим классом* векторного расслоения ξ, отвечающим инвариантному многочлену F.

Чтобы классы $c^F(\xi)$ были определены, необходимо и достаточно, чтобы на расслоении $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ существовала хотя бы одна связность. Следовательно (см. предложение 2 лекции 18), *классы $c^F(\xi)$ определены для любого нумерируемого векторного расслоения* ξ. В частности, они определены, если многообразие $\mathscr{X}$ паракомпактно.

Во избежание надоедливых оговорок будем в дальнейшем считать, что *многообразие $\mathscr{X}$ паракомпактно.*

Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Поскольку линеал $H^{2r}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ является комплексификацией линеала $H^{2r}_{\mathbb{R}}\mathscr{X}=H^{2r}\mathscr{X}$, имеет смысл вопрос, при каких F характеристический класс $c^F(\xi)$ является вещественным (принадлежит $H^{2r}\mathscr{X}$) или чисто мнимым (имеет вид $i[\omega]$, где $[\omega]\in H^{2r}\mathscr{X}$)?

Пусть F — однородный инвариантный многочлен степени r с вещественными коэффициентами.

Предложение 3. *Для любого комплексного векторного расслоения ξ характеристический класс $c^F(\xi)$ вещественен при r четном и чисто мним при r нечетном.*

Доказательство. Поскольку многообразие $\mathscr{X}$ паракомпактно и, следовательно, расслоение ξ нумерируемо, на ξ существует метрика и связность H, согласованная с этой метрикой (задача 7 лекции 11). Над каждой тривиализирующей окрестностью U матрица Ω форм кривизны этой связности в ортонормированном базисе модуля $\Gamma(\xi|_U)$ косоэрмитова (предложение 4 лекции 11), т. е. удовлетворяет соотношению

$$\Omega^{\top}=-\overline{\Omega}. \tag{31}$$

Но мы знаем (задача 4), что $F(\Omega^{\top})=F(\Omega)$, а так как коэффициенты многочлена F вещественны, то

$$F(\overline{\Omega})=\overline{F(\Omega)}.$$

Поскольку

$$F(-\Omega)=(-1)^r F(\Omega),$$

этим доказано, что

$$F(\Omega)=F(\Omega^{\top})=F(-\overline{\Omega})=(-1)^r\overline{F(\Omega)}.$$

При r четном это означает, что форма $F(R)$ вещественна (и, значит, ее класс когомологий $[F(R)]$ в $H^{2r}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ принадлежит $H^{2r}\mathscr{X}$), а при r нечетном — что она имеет вид $i\omega$, где ω — вещественная форма (и, значит, ее класс когомологий имеет вид $i[\omega]$, где $[\omega]\in H^{2r}\mathscr{X}$). □

Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Предложение 4. *Для любого однородного инвариантного многочлена F нечетной степени r и любого вещественного векторного расслоения ξ характеристический класс $c^F(\xi)$ равен нулю:*

$$c^F(\xi)=0.$$

Доказательство этого предложения во всем подобно доказательству предложения 3. Единственное отличие состоит в том, что свойство косоэрмитовости (31) заменяется свойством кососимметричности:

$$\Omega^{\top} = -\Omega.$$

Поэтому $F(\Omega) = (-1)^r F(\Omega)$, откуда при r нечетном следует, что $F(\Omega) = 0$ и, значит, что $F(R) = 0$. Следовательно,

$$c^F(\xi) = 0. \quad \square$$

Мы продолжим изучение классов $c^F(\xi)$ в следующей лекции.