Лекция 23

Характеристические классы Чженя и Понтрягина.— Характеристические числа Чжеия и Понтрягина.— Свойства классов Чженя и Понтрягина.— Полные классы Чжеия и Понтрягииа.— Характеры Чженя и Понтрягииа.— Характеристический класс Эйлера.— $\tilde{K}$-функтор.— Расслоения и пространства конечного типа.

Напомним (см. предложение 1 лекции III.19), что для любых дифференциальных форм ω_1 и ω_2 имеет место формула

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

где r — степень формы ω_1. Следовательно,

а) если формы ω_1 и ω_2 замкнуты, то форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ также замкнута;

б) если хотя бы одна из замкнутых форм ω_1 и ω_2 точна, то форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ также точна.

Поэтому для любых классов когомологий $c_1 = [\omega_1]$ и $c_2 = [\omega_2]$ формула

$$c_1 \wedge c_2 = [\omega_1 \wedge \omega_2]$$

корректно определяет их произведение $c_1 \wedge c_2$. Это умножение классов когомологий ассоциативно и кососкоммутативно ($c_1 \wedge c_2 = (-1)^{r_1 r_2} c_2 \wedge c_1$, где $r_1 = \deg c_1$, $r_2 = \deg c_2$). В частности, *умножение классов когомологий четной степени коммутативно.*

Как правило, вместо $c_1 \wedge c_2$ мы будем писать просто $c_1 c_2$.

Замечание 1. В литературе употребляется также обозначение $c_1 \cup c_2$.

Теперь из утверждения задачи 3 лекции 22 немедленно вытекает, что *каждый характеристический класс $c^F(\xi)$ является многочленом от характеристических классов*

$$c^{\sigma_1}(\xi), \ \ldots, \ c^{\sigma_n}(\xi), \tag{1}$$

отвечающих элементарным инвариантным многочленам $\sigma_1, \ \ldots, \ \sigma_n$. Этим объясняется особое положение классов (1).

Определение 1. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ характеристические классы

$$c_r(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^r} c^{\sigma_r}(\xi), \qquad r = 1, \ \ldots, \ n,$$

называются *классами Чженя* комплексного векторного расслоения ξ.

Замечание 2. По-английски фамилия Чжень пишется Chern. Транслитерация этого написания на русский язык привела к «классам Черна», которые до сих пор можно встретить в литературе.

Согласно предложению 3 лекции 22 *все классы Чженя вещественны.*

Степень класса $c_r(\xi)$ равна $2r$. Значит, если $2r > m$, где $m = \dim \mathscr{X}$, то $c_r(\xi) = 0$. Поэтому классы $c_r(\xi)$ интересны только при $2r \leqslant m$.

Определение классов $c_r(\xi)$ удобно распространить на $r = 0$, считая по определению, что

$$c_0(\xi) = 1$$

для любого расслоения ξ. (Здесь 1 — элемент группы $H^0\mathscr{X}$, отвечающей функции, тождественно равной единице; см. предложение 1 лекции III.20.)

Определение 2. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ характеристические классы

$$p_r(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2r}} c^{\sigma_{2r}}(\xi), \quad r = 1, \ \ldots, \ \left[\frac{n}{2}\right],$$

называются *классами Понтрягина* вещественного векторного расслоения ξ. (Согласно предложению 4 лекции 22 классы $c^{\sigma_{2r+1}}(\xi)$ равны нулю.)

По определению дополнительно полагается

$$p_0(\xi) = 1$$

для любого расслоения ξ.

Степень класса $p_r(\xi)$ равна $4r$. Поэтому эти классы могут быть отличны от нуля только при $4r \leqslant m$.

Замечание 3. В алгебраической топологии характеристические классы Чженя и Понтрягина определяются иначе, как элементы так называемых *групп когомологий над* $\mathbb{Z}$, которые, вообще говоря, имеют элементы конечного порядка. Группы когомологий над $\mathbb{Z}$ естественным образом отображаются в группы когомологий де Рама $H^k\mathscr{X}$, причем все элементы конечного порядка переходят, естественно, в нуль и этот гомоморфизм отображает характеристические классы над $\mathbb{Z}$ в классы, определенные здесь (которые называются в этом контексте *характеристическими классами над* $\mathbb{R}$).

Если размерность m многообразия $\mathscr{X}$ четна, $m = 2l$, и многообразие $\mathscr{X}$ компактно и ориентируемо, то для любого комплексного расслоения ξ над $\mathscr{X}$ и любого разбиения $l = i_1 + \ldots + i_k$ числа l в сумму неотрицательных слагаемых определено (с точностью до знака, зависящего от выбора ориентации многообразия $\mathscr{X}$) число

$$c_i(\xi)=\int\limits_{\mathscr{X}} c_{i_1}(\xi)\wedge\ldots\wedge c_{i_k}(\xi),\qquad i=(i_1,\ \ldots,\ i_k),$$

называемое *i-м числом Чженя* комплексного расслоения ξ.

Аналогично, если $m=4l$, то для любого вещественного расслоения ξ над $\mathscr{X}$ определено i-е *число Понтрягина*

$$p_i(\xi)=\int\limits_{\mathscr{X}} p_{i_1}(\xi)\wedge\ldots\wedge p_{i_k}(\xi),$$
$$i=(i_1,\ \ldots,\ i_k),\quad i_1+\ldots+i_k=l.$$

Замечательный факт — непосредственно вытекающий из сказанного в замечании 3, но не имеющий, по-видимому, прямого аналитического доказательства — состоит в том, что *все числа $c_i(\xi)$ и $p_i(\xi)$ являются целыми числами.*

Пример 1. При $\dim\mathscr{X}=4$ для любого комплексного расслоения ξ над $\mathscr{X}$ определены два числа Чженя $c_{(1,1)}(\xi)$ и $c_{(2)}(\xi)$, выражающиеся (при соответствующем выборе ориентации многообразия $\mathscr{X}$) формулами

$$c_{(1,1)}(\xi)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathscr{X}}\operatorname{Tr}\Omega\wedge\operatorname{Tr}\Omega,\quad c_{(2)}(\xi)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathscr{X}}\det\Omega.$$

Если ξ является $\mathrm{SU}(n)$-расслоением и, значит, форма Ω принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{su}(n)$ бесследных косоэрмитовых матриц, то $\operatorname{Tr}\Omega=0$, и потому $c_{(1,1)}(\xi)=0$. Пусть $n=2$. Поскольку, как показывает элементарное вычисление, для любой бесследной косоэрмитовой матрицы A второго порядка имеет место равенство $\det A=-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A^2$, то в этом случае

$$c_{(2)}(\xi)=-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathscr{X}}\operatorname{Tr}(\Omega\wedge\Omega).$$

С точностью до обозначений правая часть этой формулы совпадает (при $\mathscr{X}=\mathbb{S}^4$) с правой частью формулы (23′) лекции 22. Следовательно, *топологический заряд k произвольного поля Янга — Миллса F равен числу Чженя $c_{(2)}(\xi)$ соответствующего векторного расслоения* (ассоциированного с главным $\mathrm{SU}(2)$-расслоением, на котором F является формой кривизны).

Таким образом, действительно, понятие топологического заряда подпадает под общую теорию характеристических классов.

Кроме того, мы видим, что в рассматриваемом случае число $c_{(2)}(\xi)$ на самом деле является целым числом.

Задача 1. Докажите, что для любого $r \geqslant 0$

$$p_r(\xi) = (-1)^r c_{2r}(\xi^{\mathbb{C}}),$$

где $\xi^{\mathbb{C}}$ — комплексификация (см. лекцию 6) вещественного векторного расслоения ξ.

Теорема 1. *Характеристические классы Чженя и Понтрягина обладают следующими свойствами:*

а. *Для любого гладкого отображения $f\colon \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ и всех $r \geqslant 0$*

$$c_r(f^*\xi) = f^*c_r(\xi), \quad p_r(f^*\xi) = f^*p_r(\xi).$$

б. *Для тривиального расслоения $\theta = \theta^n_{\mathscr{X}}$ все классы положительной степени равны нулю:*

$$c_r(\theta) = 0, \quad p_r(\theta) = 0, \qquad r > 0.$$

в. *Для любых двух векторных расслоений ξ и η над одним и тем же многообразием $\mathscr{X}$ и всех $r \geqslant 0$*

$$c_r(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=r} c_i(\xi)c_j(\eta) = \\ = c_r(\xi) + c_{r-1}(\xi)c_1(\eta) + \ldots + c_1(\xi)c_{r-1}(\eta) + c_r(\eta),$$

$$p_r(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=r} p_i(\xi)p_j(\eta) = \\ = p_r(\xi) + p_{r-1}(\xi)p_1(\eta) + \ldots + p_1(\xi)p_{r-1}(\eta) + p_r(\eta).$$

Доказательство. Свойство **а** очевидным образом вытекает из соответствующих свойств связностей и форм кривизны. Для доказательства свойства **б** достаточно заметить, что на тривиальном расслоении θ существует связность, для которой все формы ω^i_j, а потому и все формы Ω^i_j, тождественно равны нулю. Докажем свойство **в**.

Пусть H^ξ и H^η — произвольные связности на расслоениях ξ и η соответственно. В каждой карте вида $\mathscr{E}^\zeta_U$, где $\zeta = \xi$ или η, связность H^ζ является аннулятором форм

(2) $$\overset{(\zeta)}{\theta}{}^i = d\overset{(\zeta)}{a}{}^i + \overset{(\zeta)}{\Gamma}{}^i_{jk}\overset{(\zeta)}{a}{}^j dx^k, \quad i = 1, \ldots, n_\zeta = \dim\zeta,$$

где $\overset{(\zeta)}{a}{}^i$, x^k — координаты на $\mathscr{E}^\zeta_U$, отвечающие данной тривиализации расслоения ζ над U и данной системе локальных координат на U (см. лекцию 10). С другой стороны, тривиализации расслоений ξ и η над U естественным образом определяют тривиализацию расслоения $\xi\oplus\eta=(\mathscr{E},\pi,\mathscr{X})$ над U, которой в $\mathscr{E}_U$ отвечают координаты

$$\overset{(\xi)}{a^i},\ \overset{(\eta)}{a^j},\ x^k,$$

$$\text{где}\quad 1\leqslant i\leqslant n_\xi,\quad 1\leqslant j\leqslant n_\eta\quad\text{и}\quad 1\leqslant k\leqslant m.$$

Поэтому формы (2) мы можем также рассматривать, как формы над $\mathscr{E}_U$, и ясно, что их аннулятором будет некоторая связность расслоения $\xi\oplus\eta$ над U. Над различными окрестностями U эти связности согласованы на пересечениях (докажите!) и потому определяют единую связность H на всем расслоении $\xi\oplus\eta$. Матрица форм этой связности над окрестностью U является, по построению, блочной матрицей вида

$$\begin{Vmatrix}\omega^\xi & 0\\ 0 & \omega^\eta\end{Vmatrix},$$

где ω^ξ и ω^η — матрицы форм связностей H^ξ и H^η, т. е. — в другой терминологии — прямой суммой $\omega^\xi\oplus\omega^\eta$ матриц ω^ξ и ω^η. Но тогда — как непосредственно вытекает из структурного уравнения Картана — матрица Ω форм кривизны связности H также будет прямой суммой $\Omega^\xi\oplus\Omega^\eta$ матриц форм кривизны связностей H^ξ и H^η.

Задача 2. Покажите, что *для любых двух матриц A и B порядков n_1 и n_2 имеет место равенство*

$$(3)\qquad \sigma_r(A\oplus B)=\sum_{i+j=r}\sigma_i(A)\sigma_j(B),\qquad \sigma_0(A)=\sigma_0(B)=1,$$

где, конечно, σ_r слева и σ_i, σ_j справа обозначают элементарные инвариантные многочлены от матриц порядков n_1+n_2 и n_1, n_2 соответственно. [Указание. Пусть $\sigma_i(\lambda)$ и $\sigma_j(\mu)$ — элементарные симметрические функции переменных $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n_1}$ и $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_{n_2}$ соответственно, а $\sigma_r(\lambda,\mu)$ — элементарные симметрические функции переменных $\lambda_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \lambda_{n-1},\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{n_2}$. Так как имеют место тождества

$$\sum_{i=0}^{n_1}\sigma_i(\lambda)\,t^i=\prod_{i=1}^{n_1}(1+\lambda_i t)$$

и аналогичные тождества для $\sigma_j(\lambda)$ и $\sigma_r(\lambda,\ \mu)$, то

$$\left(\sum_{i=0}^{n_1}\sigma_i(\lambda)\,t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n_2}\sigma_j(\mu)\,t^j\right)=\sum_{r=0}^{n_1+n_2}\sigma_r(\lambda,\ \mu)\,t^r$$

и, значит,

$$\sigma_r(\lambda, \mu) = \sum_{i+j=r} \sigma_i(\lambda)\sigma_j(\mu).$$

Это доказывает формулу (3) для диагональных матриц, а потому и для матриц вида $C^{-1}DC$, где D — диагональная матрица. Общий случай вытекает теперь по непрерывности (ср. задачу 4 лекции 22).]

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось применить формулу (3) к матрицам $A = \Omega^{\xi}$ и $B = \Omega^{\eta}$ (и при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ учесть, что классы $c^{\sigma_{2r+1}}(\xi)$ равны нулю). $\square$

На языке теории категорий свойство **а** характеристических классов означает, что эти классы обладают свойством функториальности. Оно имеет место, конечно, не только для классов Чженя или Понтрягина, но и для любых классов $c^F(\xi)$. Из него следует, что для изоморфных расслоений ξ, ξ' и любого инвариантного многочлена F имеет место равенство $c^F(\xi) = c^F(\xi')$. Поэтому c^F можно рассматривать как отображение множества $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ всех классов изоморфных векторных расслоений ранга n над $\mathscr{X}$ в группу когомологий $H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$.

Отображение c^F также называется — не слишком удачно — *характеристическим классом*.

Свойство **в** классов Чженя и Понтрягина подсказывает ввести в рассмотрение прямые суммы

$$H^{2*}_{\mathbb{K}}\mathscr{X} = H^0_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \oplus H^2_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \oplus \ldots \oplus H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \oplus \ldots$$

линеалов $H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$. Элементами линеала $H^{2*}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ являются формальные суммы вида

$$a = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2r} + \ldots$$

(обрывающиеся при $2r > n$), где a_{2r} — произвольный элемент линеала $H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ (называемый *однородной составляющей* элемента a). Очевидным образом распространив на такие суммы операцию умножения, мы превратим $H^{2*}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ в коммутативную алгебру с единицей над полем $\mathbb{K}$.

Теперь характеристический класс $c^F(\xi) \in H^{2}\mathscr{X}$ мы можем ввести для любого не обязательно однородного инвариантного многочлена F, положив по определению

$$c^F(\xi) = c^{F_0}(\xi) + c^{F_1}(\xi) + \ldots + c^{F_r}(\xi) + \ldots,$$

где F_r, $r \geqslant 0$, — однородные составляющие многочлена F.

Определение 3. Элементы

$$c(\xi)=\sum_{r=0}^{n} c_r(\xi)=1+c_1(\xi)+\ \dots\ +c_n(\xi) \qquad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{C},$$

$$p(\xi)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} p_r(\xi)=1+p_1(\xi)+\ \dots\ +p_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\xi) \quad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$$

алгебры $H^{2*}\mathscr{X}$ называются соответственно *полным классом Чженя* комплексного расслоения ξ и *полным классом Понтрягина* вещественного расслоения ξ.

Заметим, что класс $p(\xi)$ принадлежит на самом деле подалгебре

$$H^{4*}\mathscr{X}=H^0\mathscr{X}\oplus H^4\mathscr{X}\oplus \dots \oplus H^{4r}\mathscr{X}\oplus \dots$$

алгебры $H^{2*}\mathscr{X}$.

Свойство **б** из теоремы 1 означает теперь, что для тривиального расслоения θ

(4) $$c(\theta)=1 \quad \text{и} \quad p(\theta)=1,$$

а свойство **в** — что для любых расслоений ξ и η

(5) $$c(\xi\oplus\eta)=c(\xi)\,c(\eta) \quad \text{и} \quad p(\xi\oplus\eta)=p(\xi)\,p(\eta).$$

Отображения $c\colon \xi\mapsto c(\xi)$ и $p\colon \xi\mapsto p(\xi)$ из $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ и $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}\mathscr{X}$ (векторное расслоение и его класс изоморфизма мы обозначаем для простоты одним и тем же символом) в $H^{2*}\mathscr{X}$ и $H^{4*}\mathscr{X}$ соответственно также называются *полными классами Чженя и Понтрягина.*

Обратим внимание, что *отображения c и p определены для любого $n\geqslant 0$* и, следовательно, могут рассматриваться как отображения

$$c\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}\to H^{2*}\mathscr{X}, \quad p\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\mathscr{X}\to H^{4*}\mathscr{X},$$

где

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}=\coprod_{n=0}^{\infty}\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$$

— дизъюнктное объединение множеств $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$.

Замечание 4. В случае, когда многообразие $\mathscr{X}$ несвязно, целесообразно за $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ принимать дизъюнктное объединение множеств $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}\mathscr{X}'$ по всем $n\geqslant 0$ и всем компонентам $\mathscr{X}'$ многообразия $\mathscr{X}$ (т. е. допускать к рассмотрению векторные расслоения, имеющие на различных компонентах многообразия $\mathscr{X}$ различные ранги). Это приводит к большей формальной красоте, но утяжеляет изложение тривиальными оговорками. Поэтому мы сохраним прежнее определение. Читатель может — и должен! — самостоятельно выяснить, что меняется, когда ранг расслоений на различных компонентах может быть различным.

Если в расслоении, являющемся прямой суммой расслоений, слагаемые заменить изоморфными расслоениями, то все расслоение также заменится изоморфным расслоением. Это означает, что операция $\oplus$ фактически определена на множестве $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \mathscr{X}$ и ясно, что *относительно этой операции множество* $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \mathscr{X}$ *является абелевой полугруппой.*

Формулы (5) означают теперь, что *характеристические классы c и p являются аддитивно-мультипликативными (переводящими сумму в произведения) гомоморфизмами полугрупп* $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}} \mathscr{X}$ *и* $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \mathscr{X}$ *в мультипликативные полугруппы алгебр $H^{2*}\mathscr{X}$ и $H^{4*}\mathscr{X}$ (состоящие из всех их отличных от нуля элементов).*

[На самом деле, конечно, характеристические классы c и p являются гомоморфизмами в мультипликативные *группы* $1+(H^{2*}\mathscr{X})^+$ и $1+(H^{4*}\mathscr{X})^+$, состоящие из элементов алгебр $H^{2*}\mathscr{X}$ и $H^{4*}\mathscr{X}$, однородная составляющая степени 0 которых равна 1.]

Замечание 5. Для характеристических классов над $\mathbb{Z}$ (см. замечание 2) первая формула (5) остается в силе, тогда как вторая верной быть перестает (добавляются элементы конечного порядка).

Инвариантным формальным рядом мы будем называть формальную сумму вида

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_r + \ldots, \tag{6}$$

где F_r — однородные инвариантные многочлены степени r на $\operatorname{Mat}_n \mathbb{K}$ (*однородные составляющие* ряда F). Так как $c^{F_r}(\xi) = 0$ при $2r > m$, то для каждого такого ряда сумма

$$c^F(\xi) = c^{F_0}(\xi) + \ldots + c^{F_r}(\xi) + \ldots$$

конечна и представляет собой некоторый элемент алгебры $H^{2*}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$. Этот элемент (а также отображение $c^F\colon \xi \mapsto c^F(\xi)$, $\xi \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \mathscr{X}$) называется *характеристическим классом*, отвечающим инвариантному ряду F.

Чтобы построить ряд (6) при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, можно взять формальный ряд вида

$$F=F_0+F_1+\ \dots\ +F_r+\ \dots,$$

где F_r — произвольные симметрические многочлены степени r от n переменных, и для любой матрицы $A\in\operatorname{Mat}_n\mathbb{C}$ положить

$$F(A)=F(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n), \tag{7}$$

где $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n$ — характеристические корни матрицы A. Если многочлены F_r выбраны так, что для вещественных матриц A числа (7) вещественны, то эта конструкция дает инвариантный ряд (6) и при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Пусть, например,

$$F(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)=e^{\lambda_1/2\pi i}+\ \dots\ +e^{\lambda_n/2\pi i},$$

т. е.

$$F(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2\pi i)^r}\frac{s_r}{r!}, \tag{8}$$

где $s_r=\lambda_1^r+\ \dots\ +\lambda_n^r$.

В теории симметрических многочленов доказывается формула Варинга, согласно которой

$$s_r=r\sum(-1)^{i_2+i_4+\dots}\frac{(i_1+i_2+\ \dots\ +i_n-1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!}\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{i_2}\dots\sigma_n^{i_n},$$

где суммирование распространено на все неотрицательные целые числа $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_n$, удовлетворяющие условию $i_1+2i_2+\ \dots\ +ni_n=r$.

Определение 4. Отвечающий ряду (8) характеристический класс на $\operatorname{Vect}^n_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ обозначается символом ch и называется *характером Чженя* (или Черна; см. выше замечание 2). Его однородные составляющие ch_r представляют собой отображения

$$\mathrm{ch}_r\colon \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}\to H^{2r}\mathscr{X}.$$

Из формулы Варинга следует, что для любого комплексного расслоения ξ класс $\mathrm{ch}_r\xi$ выражается через классы Чженя по формуле

$$\mathrm{ch}_r\xi=\frac{1}{(r-1)!}\sum(-1)^{i_2+i_4+\dots}\frac{(i_1+i_2+\dots+i_n-1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!}\times \\ \times c_1(\xi)^{i_1}c_2(\xi)^{i_2}\dots c_n(\xi)^{i_n}. \tag{9}$$

Например,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}_0\,\xi = n \qquad (n=\dim\xi),\\
&\mathrm{ch}_1\,\xi = c_1(\xi),\\
&\mathrm{ch}_2\,\xi = c_1(\xi^2)-2c_2(\xi),\\
&\mathrm{ch}_3\,\xi = \frac{c_1(\xi)^3-3c_1(\xi)\,c_2(\xi)+3c_3(\xi)}{2}
\end{aligned}$$

и т. д.

Обратим внимание, что, подобно классам Чженя, характер Чженя определен для всех $n\geqslant 0$ и потому может рассматриваться как отображение

$$\mathrm{ch}\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\,\mathscr{X}\to H^{2*}\mathscr{X},$$

а его однородные составляющие ch_r — как отображения

$$\mathrm{ch}_r\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\,\mathscr{X}\to H^{2r}\mathscr{X}.$$

Аналогично, исходя из инвариантного ряда $e^{\lambda_1/2\pi}+\ldots$ $\ldots+e^{\lambda_n/2\pi}$ определяется *характер Понтрягина*

$$\mathrm{ph}\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,\mathscr{X}\to H^{4*}\mathscr{X}$$

с однородными составляющими

$$\mathrm{ph}_r\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,\mathscr{X}\to H^{4r}\mathscr{X}.$$

На расслоениях ξ ранга n однородные составляющие ph_r характера Понтрягина выражаются через классы Понтрягина по формуле

$$(10)\quad \mathrm{ph}_r\xi=\frac{1}{(2r-1)!}\sum(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_l}\times \\ \times\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_l-1)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\,p_1(\xi)^{k_1}p_2(\xi)^{k_2}\ldots p_l(\xi)^{k_l},$$

где $l=\left[\frac{n}{2}\right]$ и суммирование распространено на все неотрицательные целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_l$, удовлетворяющие условию $k_1+2k_2+\ldots+lk_l=r$.

Предложение 1. *Отображения* c *и* p *удовлетворяют соотношениям*

$$\mathrm{ch}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ch}\,\xi+\mathrm{ch}\,\eta,\qquad \mathrm{ph}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ph}\,\xi+\mathrm{ph}\,\eta,$$

т. е. являются гомоморфизмами полугрупп $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\,\mathscr{X}$ *и* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,\mathscr{X}$ *в аддитивные группы алгебр* $H^{2*}\mathscr{X}$ *и* $H^{4*}\mathscr{X}$ *соответственно (а следовательно, отображения* ch_r *и* ph_r *— гомоморфизмами в линейные пространства* $H^{2r}\mathscr{X}$ *и* $H^{4r}\mathscr{X}$*).*

Доказательство. Пусть $F(\lambda)$ — ряд (8) от переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_\xi}$, $F(\mu)$ — ряд (8) от переменных $\mu_1, \ldots, \mu_{n_l}$ и $F(\lambda, \mu)$ — ряд (8) от переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_\xi}, \mu_1, \ldots, \mu_{n_\eta}$. Достаточно доказать, что

$$F(\lambda, \mu) = F(\lambda) + F(\mu).$$

Но это очевидно, так как

$$F(\lambda) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \ldots + e^{\lambda_{n_\xi}/2\pi i}, \quad F(\mu) = e^{\mu_1/2\pi i} + \ldots + e^{\mu_{n_l}/2\pi i}$$

и

$$F(\lambda, \mu) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \ldots + e^{\lambda_{n_\xi}/2\pi i} + e^{\mu_1/2\pi i} + \ldots + e^{\mu_{n_\eta}/2\pi i}. \ \square$$

Поскольку аддитивная структура алгебр $H^{2*}\mathscr{X}$ и $H^{4*}\mathscr{X}$ контролируется существенно проще ее мультипликативной структуры, характеры Чженя и Понтрягина значительно удобнее соответствующих полных классов. [К сожалению, из-за знаменателей в формулах (9) и (10) эти характеры нельзя определить над $\mathbb{Z}$; см. выше замечание 2.]

Другое преимущество характеристических классов ch и ph состоит в том, что *они являются также гомоморфизмами и по отношению к тензорному умножению*, т. е. для любых векторных расслоений ξ и η имеет место равенство

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\operatorname{ch}(\xi \otimes \eta) = \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta \quad \text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ &\operatorname{ph}(\xi \otimes \eta) = \operatorname{ph}\xi \operatorname{ph}\eta \quad \text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Ничего подобного для характеристических классов c и p места не имеет.)

К сожалению, доказательство этих формул далеко выходит за рамки наших возможностей. (См., впрочем, замечание 3 лекции 24.)

Задача 3. Докажите формулы (11) при $\dim \xi = 1$ и $\dim \eta = 1$.

Кроме классов вида c^F для вещественных расслоений можно определить еще один замечательный характеристический класс.

Напомним (см. лекцию II.10), что для любой кососимметрической матрицы A четного порядка определен ее пфаффиан $\operatorname{Pf} A$, являющийся многочленом от элементов матрицы A, удовлетворяющим соотношениям

$$(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A \quad \text{и} \quad \operatorname{Pf}(C^{\top} A C) = \det C \cdot \operatorname{Pf} A,$$

где C — произвольная матрица.

Имея это в виду, предположим, что вещественное векторное расслоение ξ

а) ориентировано (см. лекцию 7),

б) метризовано,

в) имеет четный ранг $n=2l$.

Пусть $U\subset\mathscr{X}$ — тривиализирующая расслоение ξ окрестность, $s_1, \ldots, s_n$ — положительно ориентированный ортонормированный базис модуля $F(\xi|_U)$ и $\Omega=\|\Omega_j^i\|$ — матрица форм кривизны в базисе $s_1, \ldots, s_n$ некоторой согласованной с метрикой связности на расслоении ξ. Тогда на U определена дифференциальная форма $\operatorname{Pf}\Omega$. При изменении базиса $s_1, \ldots, s_n$ форма Ω заменяется формой $C^{-1}\Omega C$, где C — матрица перехода. Так как матрица C ортогональна ($C^\top=C^{-1}$) и собственна ($\det C=1$), то $\operatorname{Pf}(C^{-1}\Omega)=\operatorname{Pf}\Omega$. Это показывает, что формы $\operatorname{Pf}\Omega$ согласованы на пересечениях и, значит, составляют некоторую дифференциальную форму $\operatorname{Pf}R$ степени n на всем многообразии $\mathscr{X}$.

Задача 4. Докажите, что $d\operatorname{Pf}R=0$. [Указание. Докажите, что для любой кососимметрической матрицы A матрицы $\operatorname{Pf}'A=\left\|\dfrac{\partial \operatorname{Pf}A}{\partial a_j^i}\right\|$ и A перестановочны; см. лемму 1 лекции 22.]

Задача 5. Докажите, что *класс когомологий* $[\operatorname{Pf}R]$ *формы* $\operatorname{Pf}R$ *не зависит от выбора метрики и метрической связности на* ξ. [Указание. Для любых двух метрик Q_0 и Q_1 на ξ функция $(1-t)Q_0+tQ_1$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, также является метрикой.]

Определение 5. Класс когомологий

$$e(\xi)=\frac{(-1)^l}{(2\pi)^l}[\operatorname{Pf}R], \qquad l=\frac{n}{2},$$

называется *классом Эйлера* ориентированного вещественного векторного расслоения ξ ранга $n=2l$.

Его степень равна n, и

$$e(\xi)^2=p_l(\xi).$$

При n нечетном условно считается, что $e(\xi)=0$.

Подчеркнем, что, в отличие от характеристических классов Понтрягина, класс Эйлера определен только для ориентированного расслоения ξ.

Задача 6. Пусть $-\xi$ — противоположно ориентированное расслоение ξ. Покажите, что

$$e(-\xi)=-e(\xi).$$

Для любого комплексного расслоения ξ ранга n его овеществление $\xi_{\mathbb{R}}$ (см. лекцию 6) является вещественным ориентированным (задача 6 лекции 7) векторным расслоением четного ранга $2n$, и потому для него определен класс Эйлера $e(\xi_{\mathbb{R}})$.

Задача 7. Покажите, что

$$e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n(\xi).$$

Класс Эйлера обладает, конечно, свойством функториальности (свойство **а** из теоремы 1) и равен нулю для тривиального расслоения θ (свойство **б** из теоремы 1). Имеет место и аналог свойства **в**.

Задача 8. Докажите, что *для любых ориентированных векторных расслоений ξ и η имеет место равенство*

$$e(\xi \oplus \eta) = e(\xi)\, e(\eta), \tag{12}$$

где, конечно, предполагается, что ориентация расслоения $\xi \oplus \eta$ индуцирована ориентациями расслоений ξ и η. [Указание. Докажите, что $\operatorname{Pf}(A \oplus B) = \operatorname{Pf} A \cdot \operatorname{Pf} B$ для любых кососимметрических матриц A и B.]

Подчеркнем, что формула (12) *справедлива для расслоений ξ и η произвольных* (*не обязательно четных*) *рангов.* Поэтому, в частности, *если расслоение ξ имеет прямое слагаемое нечетного ранга, то $e(\xi) = 0$.*

Так, например, дело обстоит, если расслоение ξ обладает сечением, ни в одной точке не равным нулю (поскольку такое сечение порождает — докажите! — прямое слагаемое ранга 1). Следовательно, *если $e(\xi) \neq 0$, то каждое сечение расслоения ξ хотя бы в одной точке обращается в нуль.*

На этом утверждении основывается доказательство неожиданно большого числа элегантных и трудных геометрических теорем.

Пример 2. В своем месте мы прямым вычислением покажем, что для касательного расслоения τ над двумерной сферой $\mathbb{S}^2$ класс Эйлера $e(\tau)$ отличен от нуля. Следовательно, *на сфере $\mathbb{S}^2$ не существует всюду отличного от нуля гладкого поля касательных векторов.* Наглядно это утверждение означает, что идеализированного (всюду покрытого иголками) ежа невозможно гладко причесать или, иначе, что на покрытой волосами голове обязательно должна быть макушка. На этом основании оно известно как теорема о еже и теорема о макушке.

Из формул (4) и (5) немедленно следует, что для каждого векторного расслоения $\xi \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \mathscr{X}$ и любого $h \geqslant 0$

имеют место равенства

$$(13) \qquad \begin{aligned} c(\xi + \theta^h) &= c(\xi) \quad &\text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ p(\xi + \theta^h) &= p(\xi) \quad &\text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где θ^h — тривиальное расслоение ранга h.

[Заметим, что аналог формул (13) для класса Эйлера $e(\xi)$ *места не имеет*. Для характеров Чженя и Понтрягина он имеет место только по отношению к однородным составляющим положительной степени:

$$\mathrm{ch}_r(\xi + \theta^h) = \mathrm{ch}_r(\xi), \quad \mathrm{ph}_r(\xi + \theta^h) = \mathrm{ph}_r(\xi)$$

при $r > 0$.]

Формулы (13) наводят на мысль ввести следующее определение:

Определение 6. Векторные расслоения ξ и η с одной и той же базой $\mathscr{X}$ называются *стационарно эквивалентными*, если существуют такие числа h и k, что расслоения $\xi \oplus \theta^h$ и $\eta \oplus \theta^k$ изоморфны, т. е., иными словами, в полугруппе $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \mathscr{X}$ имеет место равенство

$$\xi + \theta^h = \eta + \theta^k$$

(при этом, конечно, $\dim \xi + h = \dim \eta + k$).

Очевидно, что это отношение является эквивалентностью в общеалгебраическом смысле.

Основным полем $\mathbb{K}$ здесь можно считать не только поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, но и тело кватернионов $\mathbb{H}$.

Замечание 6. Для несвязных многообразий $\mathscr{X}$ определение 6 не очень удобно. (Ср. замечание 4.) Но все же мы его менять не будем.

Класс стационарной эквивалентности расслоения ξ мы будем обозначать символом $[\xi]$, а множество всех классов стационарной эквивалентности $\mathbb{K}$-векторных расслоений над $\mathscr{X}$ — символом $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$. [В литературе вместо $\tilde{K}_{\mathbb{R}}\mathscr{X}$ часто пишут $\tilde{K}_O\mathscr{X}$ или $\widetilde{KO}(\mathscr{X})$, вместо $\tilde{K}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ пишут $\tilde{K}_U\mathscr{X}$ или $\widetilde{KU}(\mathscr{X})$, а вместо $\tilde{K}_{\mathbb{H}}\mathscr{X}$ пишут $\tilde{K}_{Sp}\mathscr{X}$ или $\widetilde{KSp}(\mathscr{X})$. Предупреждение! Вместо $\tilde{K}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ часто пишут $\tilde{K}(\mathscr{X})$.]

Ясно, что формула

$$[\xi] + [\eta] = [\xi \oplus \eta]$$

корректно определяет в множестве $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ операцию сложения, по отношению к которой оно является абелевым моноидом (полугруппой с нулем). Нулем этого моноида служит класс $[\theta]$, состоящий из тривиальных расслоений θ^h, $h \geqslant 0$.

[Обратим внимание, что в полугруппе $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ нуля нет!]

Замечание 7. Конструкция моноида $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ имеет смысл для любого топологического пространства $\mathscr{X}$. Так как (см. замечания 1 и 2 лекции 10) каждое векторное расслоение над гладким многообразием изоморфно гладкому расслоению, а изоморфные гладкие расслоения гладко изоморфны, то для случая, когда $\mathscr{X}$ является гладким многообразием, это обобщение приводит к тому же моноиду $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$.

Очевидно, что для любого непрерывного отображения $f\colon \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ формула

$$f^{\bullet}[\xi] = [f^{*}\xi]$$

корректно определяет гомоморфизм

$$f^{\bullet}\colon \tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to \tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}',$$

причем $(\mathrm{id})^{\bullet} = \mathrm{id}$ и $(f \circ g)^{\bullet} = g^{\bullet} \circ f^{*}$ (т. е. $\tilde{K}_{\mathbb{K}}$ является *контравариантным функтором*, принимающим значения в категории множеств).

Как ни странно, моноид $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ не имеет никакого выразительного названия (несмотря на то, что он оказался чрезвычайно полезным не только в геометрии, но и, скажем, в теории дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений, а в алгебре его конструкция стимулировала создание большой самостоятельной теории со своими многочисленными приложениями). Его принято называть *$\tilde{K}$-функтором* (или, в случае, когда он является группой, *$\tilde{K}$-группой*) пространства $\mathscr{X}$ (а инспирированную его конструкцией теорию в алгебре — *алгебраической K-теорией*). Хотя эти названия возникли по случайному поводу и ничего по существу не отражают, они укоренились и являются общепринятыми.

Согласно формулам (13) на стационарно эквивалентных расслоениях характеристические классы c и p (а также классы ch_r и ph_r при $r > 0$) принимают одно и то же значение, т. е. формулы

$$c[\xi] = c(\xi) \quad \text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C},$$
$$p[\xi] = p(\xi) \quad \text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

корректно определяют аддитивно-мультипликативные гомоморфизмы

$$c\colon \tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathscr{X}) \to 1 + (H^{2*}\mathscr{X})^{+},$$
$$p\colon \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathscr{X}) \to 1 + (H^{4*}\mathscr{X})^{+},$$

а формулы

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}_r[\xi] = \operatorname{ch}_r \xi \qquad && \text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ &\operatorname{ph}_r[\xi] = \operatorname{ph}_r \xi && \text{при} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

— аддитивные гомоморфизмы

$$\operatorname{ch}_r\colon \tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathscr{X}) \to H^{2r}\mathscr{X},$$
$$\operatorname{ph}_r\colon \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathscr{X}) \to H^{4r}\mathscr{X}.$$

Подчеркнем, что последние гомоморфизмы определены только при $r > 0$.

Поскольку группы поддаются изучению значительно легче моноидов, интересно выяснить, когда моноид $\tilde{K}(\mathscr{X})$ является группой. Оказывается, что этот вопрос имеет чисто топологический характер и по существу никак не связан с гладкой структурой на многообразии $\mathscr{X}$. Поэтому мы обсудим его, предполагая $\mathscr{X}$, вообще говоря, произвольным хаусдорфовым нормальным (см. определение 3 лекции III.9) топологическим пространством. В процессе этого обсуждения гладкие многообразия мы будем также называть *гладкими пространствами*.

Задача 9. Докажите, что *любое гладкое хаусдорфово многообразие является нормальным пространством.*

Напомним (ср. определение 1 лекции III.22), что семейство функций $\eta_i\colon \mathscr{X} \to I$, $1 \leqslant i \leqslant N$ (которое мы здесь предполагаем конечным), называется *разбиением единицы*, подчиненным открытому покрытию $\{U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ пространства $\mathscr{X}$, если $\eta_1 + \ldots + \eta_N = 1$ и $\eta_i = 0$ вне множества U_i для любого $i = 1, \ldots, N$. Если пространство $\mathscr{X}$ гладко, то все функции η_i предполагаются гладкими.

Задача 10. Докажите, что *для любого конечного открытого покрытия* $\{U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ *нормального пространства* $\mathscr{X}$ *существует подчиненное ему разбиение единицы.* [Указание. Постройте сжатие $\{V_i\}$ покрытия $\{U_i\}$ (см. предложение 6 лекции III.9) и для каждого $i = 1, \ldots, N$ функцию Урысона φ_i пары $(U_i, \overline{V}_i)$ (в общем случае существование такой функции обеспечивается теоремой Урысона; см. замечание 1 лекции II.24, а для гладкого $\mathscr{X}$ —

предложением 2 лекции III.14). Затем положите $\eta_i=\varphi_i/\varphi$, где $\varphi=\varphi_1+\ldots+\varphi_N$.]

Определение 7. Говорят, что расслоение $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ имеет *конечный тип*, если пространство $\mathscr{X}$ может быть покрыто конечной системой открытых множеств, над каждым из которых расслоение тривиализируется. Пространство $\mathscr{X}$ имеет *конечный тип*, если любое расслоение ξ над $\mathscr{X}$ имеет конечный тип.

Ясно, например, что *любое компактное пространство $\mathscr{X}$ имеет конечный тип.*

Однако существуют и некомпактные пространства (и многообразия) конечного типа.

Задача 11. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ имеет конечный тип. [Указание. Докажите, что над $\mathbb{R}^n$ любое векторное расслоение тривиализируется.]

Предложение 2. *Для любого векторного расслоения ξ конечного типа над нормальным пространством $\mathscr{X}$ существует такое векторное расслоение η (гладкое, если гладки $\mathscr{X}$ и ξ), что в моноиде $\tilde{K}_{\mathbb{K}}(\mathscr{X})$ имеет место равенство*

$$[\xi]+[\eta]=0. \tag{14}$$

В частности, если нормальное пространство $\mathscr{X}$ имеет конечный тип, то моноид $\tilde{K}(\mathscr{X})$ является группой.

Доказательство. По условию для расслоения $\xi=(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ существует конечный тривиализирующий атлас $\{(U_i, \varphi_i), 1\leqslant i\leqslant N\}$. Пусть $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ (см. задачу 10). Для каждого $i=1, \ldots, N$ построим отображение $g_i\colon \mathscr{E}\to\mathbb{R}^n$, $n=\dim\xi$, положив для любой точки $p\in\mathscr{E}$

$$g_i(p)=\begin{cases}\eta_i(b)\,\boldsymbol{x}, & \text{если } p\in\mathscr{E}_{U_i} \text{ и } \varphi_i(p)=(b, \boldsymbol{x}),\\ & \qquad b\in\mathscr{B}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m,\\ \mathbf{0}, & \text{если } p\notin\mathscr{E}_{U_i},\end{cases}$$

где $b=\pi(p)$. Ясно, что отображение g_i непрерывно (и гладко, если $\mathscr{X}$ и ξ гладки).

Пусть g — отображение $\mathscr{E}\to\mathbb{R}^{nN}$, определенное формулой

$$g(p)=(g_1(p), \ldots, g_N(p)), \qquad p\in\mathscr{E}$$

[мы отождествляем здесь $\mathbb{R}^{nN}$ с $\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n$ (N раз)], и пусть

$$\varphi\colon \xi\to 0^{nN}$$

— соответствующий морфизм расслоения ξ в тривиальное расслоение $\theta^{nN}=(\mathscr{X}\times\mathbb{R}^{nN}, \mathrm{pr}, \mathscr{X})$ (действующий по формуле $\varphi(p)=(\pi(p), g(p))$, $p\in\mathscr{E}$).

Для любой точки $b\in\mathscr{X}$ индуцированное морфизмом φ отображение слоев

$$\varphi_b\colon \mathscr{F}_b\to\mathbb{R}^{nN}$$

является не чем иным, как ограничением на $\mathscr{F}_b$ отображения g. Поэтому, если $\varphi_b(p)=0$, $p\in\mathscr{F}_b$, то $g_i(p)=0$ для всех $i=1, \ldots, N$. С другой стороны, так как $\eta_1+\ldots+\eta_N=1$, то существует такой индекс i_0, что $\eta_{i_0}(b)\neq 0$. Тогда $p\in U_{i_0}$, и если $\varphi_{i_0}(p)=(b, \boldsymbol{x})$, то $\eta_{i_0}(b)\boldsymbol{x}=0$. Следовательно, $\boldsymbol{x}=0$ и, значит, p является нулем линеала $\mathscr{F}_b$. Этим доказано, что *для любой точки $b\in\mathscr{X}$ линейное отображение φ_b является мономорфизмом.*

Пусть $\mathscr{E}'$ — подпространство произведения $\mathscr{X}\times\mathbb{R}^{nN}$, состоящее из таких точек $(b, \boldsymbol{x})$, что вектор $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{nN}$ ортогонален образу $\operatorname{Im}\varphi_b$ мономорфизма φ_b, и пусть π' — ограничение на $\mathscr{E}'$ проекции $\mathrm{pr}\colon \mathscr{X}\times\mathbb{R}^{nN}\to\mathscr{X}$.

Задача 12. Покажите, что *тройка $\eta=(\mathscr{E}', \pi', \mathscr{X})$ является векторным расслоением, гладким, если гладки $\mathscr{X}$ и ξ.* (Конечно, единственно, что требует доказательства,— это свойство локальной тривиальности.)

По построению для любой точки $b\in\mathscr{X}$ прямая сумма $\mathscr{F}_b\oplus\mathscr{F}'_b$ слоев расслоений ξ и η изоморфна пространству $\operatorname{Im}\varphi_b\ominus\mathscr{F}'_b=\mathbb{R}^{nN}$. Следовательно,

$$\xi\oplus\eta=\theta^{nN},$$

что равносильно (14). $\square$

Следствие. *Для каждого компактного хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ моноид $\tilde{K}(\mathscr{X})$ является группой.* $\square$