Лекция 24

K-функтор.— Сравнение $\tilde{K}$- и K-функторов.— Операции λ^k.— Операции Адамса.— Группы $K_{\mathbb{C}}\mathbb{S}^n$.— Инвариант Хопфа.— Конструкция Хопфа.— Ряд элементарных импликаций.— Теорема о равносильности.

Имеется другой — в некоторых отношениях более удовлетворительный — подход к построению группы $\tilde{K}(\mathscr{X})$, основывающийся на общеалгебраической конструкции группы разностей.

Для любой абелевой полугруппы M *группа разностей* $\mathrm{G}M$ состоит из формальных разностей вида $a-b$, где $a, b \in M$. При этом две разности $a-b$ и a_1-b_1 тогда и только тогда считаются равными, когда в M существует такой элемент c, что $a+b_1+c=a_1+b+c$. Сложение в группе разностей определяется очевидным образом:

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$$

Задача 1. Проверьте, что тем самым действительно получается группа.

[Контрольный вопрос. Зачем нужен элемент c?]

В литературе группа разностей часто называется группой Гротендика, по имени французского математика, который широко использовал ее конструкцию и привлек к ней всеобщее внимание (хотя, конечно, в общей алгебре конструкция группы разностей была известна задолго до Гротендика; достаточно заметить, что именно таким способом из натуральных чисел строятся целые).

Формула

$$\chi\colon a \longmapsto (a+c)-c, \qquad c \in M \text{ — любое},$$

корректно определяет некоторое отображение

$$\chi\colon M \to \mathrm{G}M.$$

По определению $\chi(a)=\chi(b)$ тогда и только тогда, когда в M существует такой элемент c, что $a+c=b+c$.

Задача 2. Покажите, что для любого гомоморфизма $f\colon M \longrightarrow \mathrm{G}$ полугруппы M в группу G существует единственый гомоморфизм $\mathrm{G}f\colon \mathrm{G}M \longrightarrow \mathrm{G}$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{G}M \arrow[dl, "\mathrm{G}f"] \\ & \mathrm{G} & \end{tikzcd}$$

Группа разностей полугруппы $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ обозначается символом $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ (с теми же вариантами $K_O\mathscr{X}$, $K_U\mathscr{X}$ и т. д., как и для моноида $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$).

Ясно, что $K_{\mathbb{K}}$ естественным образом является контравариантным функтором: для любого непрерывного отображения $f\colon \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ формула

$$f^*(\xi-\eta)=f^*\xi-f^*\eta$$

корректно определяет гомоморфизм

$$f^*\colon K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}',$$

обладающий стандартными функториальными свойствами.

Задача 3. Покажите, что *при* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$

а) *операция тензорного умножения переносится в группу* $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$;

б) *относительно этой операции* $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ *является кольцом*.

Кольцо $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ обладает, очевидно, единицей: $1=\chi(\theta^1)$.

Так как гомоморфизмы c, ch, p и ph принимают значения в группах, то согласно утверждению задачи 1 они однозначно распространяются до гомоморфизмов

$$c,\ \mathrm{ch}\colon K_{\mathbb{C}}\mathscr{X} \to H^{2*}\mathscr{X} \quad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{C},$$
$$p,\ \mathrm{ph}\colon K_{\mathbb{R}}\mathscr{X} \to H^{4*}\mathscr{X} \quad \text{при} \quad \mathbb{K}=\mathbb{R}.$$

Здесь особо интересны гомоморфизмы ch и ph, поскольку в силу формул (11) лекции 23 (у нас не доказанных!) *эти гомоморфизмы являются гомоморфизмами колец.*

Замечание 1. Поскольку группы $H^{2*}\mathscr{X}$ и $H^{4*}\mathscr{X}$ являются линеалами над $\mathbb{R}$, гомоморфизмы ch и ph индуцируют гомоморфизмы алгебр

$$\mathrm{ch}^{\mathbb{R}}\colon K_{\mathbb{C}}\mathscr{X}\otimes\mathbb{R} \to H^{2*}\mathscr{X},$$
$$\mathrm{ph}^{\mathbb{R}}\colon K_{\mathbb{R}}\mathscr{X}\otimes\mathbb{R} \to H^{4*}\mathscr{X}.$$

Можно показать (это трудная теорема!), что *эти гомоморфизмы являются изоморфизмами.*

Эта теорема и является основным raison d'être гомоморфизмов ch и ph.

Легко видеть, что *для любых стационарно эквивалентных векторных расслоений* ξ *и* η *в группе* $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ *имеет место равенство*

$$\xi-\theta^n=\eta-\theta^m,$$

где $n=\dim\xi$, $m=\dim\eta$.

Действительно, по условию существуют такие числа h и k, что $\xi+\theta^h=\eta+\theta^k$ в $\mathrm{Vect}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$. Поэтому в $K_{\mathsf{K}}(\mathscr{X})$

$$\xi-\theta^n=(\xi+\theta^h)-\theta^{n+h}=(\eta+\theta^k)-\theta^{n+h}=\eta-\theta^m$$

(напомним, что $n+h=m+k$ и $\theta^{n+h}=\theta^n\oplus\theta^h$). □

Следовательно, формула $[\xi]\mapsto\xi-\theta^n$, где $n=\dim\xi$, корректно определяет некоторое отображение

$$\tilde{K}_{\mathsf{K}}(\mathscr{X})\to K_{\mathsf{K}}(\mathscr{X}). \tag{1}$$

Очевидно, что *отображение* (1) *является гомоморфизмом.*

Без труда проверяется, что *гомоморфизм* (1) *имеет тривиальное ядро.* Действительно, если в $K_{\mathsf{K}}(\mathscr{X})$ имеет место равенство $\xi-\theta^n=0$, то в $\mathrm{Vect}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ для любого расслоения η будет иметь место равенство $\xi\oplus\eta=\theta^n\oplus\eta$. В частности, при $\eta=\theta^1$ мы получаем, что $\xi\oplus\theta^1=\theta^{n-1}$, т. е. что $[\xi]=[\theta]$. □

Поэтому, *если моноид* $\tilde{K}_{\mathsf{K}}(\mathscr{X})$ *является группой* (например, пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово, нормально и имеет конечный тип), *то гомоморфизм* (1) *представляет собой мономорфизм.*

По построению образ гомоморфизма (1) состоит из всех элементов вида $\xi-\theta^n$, $n=\dim\xi$, и потому содержится в ядре гомоморфизма

$$\dim\colon K_{\mathsf{K}}(\mathscr{X})\to\mathbb{Z}, \tag{2}$$

определенного (очевидно, корректно) формулой

$$\dim(\xi-\eta)=\dim\xi-\dim\eta.$$

Оказывается, что *в случае, когда моноид* $\tilde{K}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ *является группой, гомоморфизм* (1) *представляет собой изоморфизм на ядро гомоморфизма* (2). Действительно, пусть $\dim(\xi-\eta)=0$, т. е. $\dim\xi=\dim\eta$. Так как $\tilde{K}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ — группа, то для расслоений ξ и η существуют такие расслоения ξ' и η' и такие числа h и k, что $\xi\oplus\xi'=\theta^h$ и $\eta\oplus\eta'=\theta^k$. Рассмотрим расслоение $\zeta=\xi\oplus\eta'$. Его ранг равен $\dim\xi+(k-\dim\eta)=k$, и в группе $K_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$

$$\xi-\eta=(\xi+\eta')-(\eta+\eta')=\zeta-\theta^k. \ □$$

Элементы группы $K_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ называются *виртуальными расслоениями*, а значение гомоморфизма (2) на виртуальном расслоении — его *рангом* (или *размерностью*). Таким образом, *над нормальными хаусдорфовыми пространствами конечного типа классы стационарно эквивалентных век-*

торных расслоений естественным образом отождествляются с виртуальными расслоениями ранга (размерности) нуль. Это означает, что для таких пространств группу $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ можно определить как ядро гомоморфизма (2).

Виртуальные расслоения вида $\chi(\xi)$ называются *положительными.* Как правило, они обозначаются просто через ξ. (Но расслоение $\chi(\theta^n)$ обозначается через n.)

Таким образом, в этих обозначениях отображение

$$\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$$

задается формулой

$$[\xi] \mapsto \xi - \dim \xi.$$

Как правило, мы будем отождествлять $[\xi]$ и $\xi - \dim\xi$.

Замечание 2. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ гомоморфизм (2) является, очевидно, гомоморфизмом колец (ибо $\dim(\xi \otimes \eta) = \dim\xi \dim\eta$). Поэтому его ядро является идеалом кольца $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ и, в частности, само является кольцом. Поэтому *в случае, когда моноид $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ является группой, формула*

$$[\xi][\eta] = [\xi \otimes \eta] - m[\xi] - n[\eta], \qquad n = \dim\xi, \quad m = \dim\eta,$$

определяет в группе по сложению $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ умножение, по отношению к которому эта группа является кольцом.

Алгебраически кольцо $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ получается из кольца $\tilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ формальным присоединением единицы.

Кольцо $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ обладает замечательной дополнительной алгебраической структурой.

Напомним (см. задачу 11 лекции 12), что для любого $\mathbb{K}$-векторного ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) расслоения ξ над $\mathscr{X}$ и любого целого числа $k \geqslant 0$ определено $\mathbb{K}$-векторное расслоение $\Lambda^k\xi$. (При $k = 0$ условно считается, что $\Lambda^0\xi = \theta^1$.)

Предложение 1. *Существуют такие отображения*

$$\lambda^k \colon K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}, \qquad k \geqslant 0,$$

что

а) *для любых элементов $x, y \in K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ имеет место равенство*

$$\lambda^k(x+y) = \sum_{i+j=k} \lambda^i(x)\lambda^j(y);$$

б) *если $x = \chi(\xi)$, то*

$$\lambda^k(x) = \chi(\Lambda^k\xi).$$

Эти свойства однозначно характеризуют отображения λ^k.

Доказательство. Пусть $1+(K_{\mathbf{K}}\mathscr{X})[[t]]^+$—мультипликативная группа всех формальных рядов над кольцом $K_{\mathbf{K}}\mathscr{X}$ со свободным членом 1.

Рассмотрим отображение

$$\Lambda_t\colon \operatorname{Vect}_{\mathbf{K}}\mathscr{X} \to 1+(K_{\mathbf{K}}\mathscr{X})[[t]]^+,$$

определенное формулой

$$\Lambda_t\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\,[\Lambda^k\xi]\,t^k.$$

Задача 4. Докажите, что Λ_t *является гомоморфизмом*. [Указание. Для любых линеалов $\mathscr{V}^\circ$ и $\mathscr{W}^\circ$ линеал $\Lambda^k(\mathscr{V}^\circ\oplus\mathscr{W}^\circ)$ естественно изоморфен прямой сумме линеалов $\Lambda^i\mathscr{V}^\circ\otimes\Lambda^j\mathscr{W}^\circ$ по всем $i\geqslant 0$, $j\geqslant 0$, для которых $i+j=k$.]

Поэтому (см. задачу 2) существует единственный гомоморфизм

$$\lambda_t\colon K_{\mathbf{K}}\mathscr{X} \to 1+(K_{\mathbf{K}}\mathscr{X})[[t]]^+,$$

замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Vect}_K \mathscr{X} \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "\Lambda_t"'] & & K_K \mathscr{X} \arrow[dl, "\lambda_t"] \\
& 1+(K\mathscr{X})[[t]]^+ &
\end{tikzcd}$$

Пусть

$$\lambda_t(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k(x)\,t^k, \qquad x\in K_{\mathbf{K}}\mathscr{X}.$$

Тогда $\lambda^k\colon x\mapsto\lambda^k(x)$ будут отображениями

$$K_{\mathbf{K}}\mathscr{X}\to K_{\mathbf{K}}\mathscr{X},$$

удовлетворяющими условию **б**.

Утверждение, что λ_t является гомоморфизмом, означает, что

$$\lambda_t(x+y)=\lambda_t(x)\,\lambda_t(y).$$

для любых элементов $x, y\in K_{\mathbf{K}}\mathscr{X}$. Раскрыв скобки, мы немедленно убедимся, что это тождество в точности равносильно условию **а**.

Тем самым утверждение 1 полностью доказано. □

Ясно, что *отображения* λ^k *функториальны*, т. е. для любого непрерывного отображения $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{K}}\mathcal{X} & \xrightarrow{\lambda^k} & K_{\mathbb{K}}\mathcal{X} \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ K_{\mathbb{K}}\mathcal{Y} & \xrightarrow{\lambda^k} & K_{\mathbb{K}}\mathcal{Y} \end{array}$$

Конечно, $\lambda^1(x) = x$ для любого $x \in K_{\mathbb{K}}\mathcal{X}$ (т. е. $\lambda^1 = \mathrm{id}$).

Явную формулу для $\lambda^k x$, $x = \xi - \eta$, выражающую виртуальное расслоение $\lambda^k x$ через расслоения ξ и η, мы укажем ниже (см. задачу 7).

Так как ряд $\lambda_t(x)$ обратим, то определен ряд

$$\psi_t(x) = -t\frac{d}{dt}\ln\lambda_{-t}(x) = -t\,\frac{\dfrac{d}{dt}\lambda_{-t}(x)}{\lambda_{-t}(x)}.$$

Свободный член ряда $\psi_t(x)$ равен нулю, т. е. этот ряд имеет вид $\psi_t(x) = \psi^1(x)\,t + \ldots + \psi^k(x)\,t^k + \ldots$ Отображения

$$\psi^k\colon K_{\mathbb{K}}\mathcal{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathcal{X}$$

называются *операциями Адамса.*

Задача 5. Докажите, что для любого $n \geqslant k$ имеет место формула

$$\psi^k(x) = s_k(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x)),$$

где $s_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — многочлены Ньютона, выражающие симметрический многочлен $x_1^k + \ldots + x_n^k$ через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. В частности (см. в лекции 23 формулы Варинга),

$$\begin{aligned} &\psi^1(x) = \lambda^1(x) = x,\\ &\psi^2(x) = \lambda^1(x)^2 - 2\lambda^2(x) = x^2 - 2\lambda^2(x),\\ &\psi^3(x) = x^3 + 3\lambda^3(x) - 3x\lambda^2(x) \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

[Указание. Пусть $f(t) = (1 + x_1 t)\ldots(1 + x_n t)$. Тогда

$$t\frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{tx_1}{1+x_1t} + \ldots + \frac{tx_n}{1+x_1t} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}(x_1^k + \ldots + x_n^k)(-t)^k.]$$

Преимущество операций ψ^k по сравнению с операциями λ^k состоит в том, что *для каждого* $k \geqslant 1$ *операция* ψ^k *является гомоморфизмом колец*, т. е. для любых элементов x, $y \in K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ имеют место формулы

$$\psi^k(x+y) = \psi^k(x) + \psi^k(y), \tag{3}$$

$$\psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y). \tag{4}$$

Формула (3), равносильная тождеству $\psi_t(x+y) = \psi_t(x) + \psi_t(y)$, доказывается без труда:

$$\begin{aligned}\psi_t(x+y) &= -t\frac{d}{dt}\ln\lambda_{-t}(x+y) = \\ &= -t\frac{d}{dt}\ln(\lambda_{-t}(x)\lambda_{-t}(y)) = \\ &= -t\frac{d}{dt}[\ln\lambda_{-t}(x) + \ln\lambda_{-t}(x)] = \\ &= \psi_t(x) + \psi_t(y).\end{aligned}$$

Иначе дело обстоит с формулой (4). Эта формула выражает очень глубокий геометрический факт, и ее доказательство основывается иа следующем утверждении:

Принцип расщепления. *Для любого $\mathbb{K}$-векторного расслоения $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ существует такое пространство $\mathscr{Y}$ и такое непрерывное отображение f: $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, что*

а) *отображение f^*: $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{Y}$ является мономорфизмом;*

б) *расслоение $f^*\xi$ над $\mathscr{Y}$ является суммой линейных (т. е. ранга 1) расслоений.*

Для справедливости этого принципа база $\mathscr{X}$ расслоения ξ должна удовлетворять определенным условиям. Например, достаточно, чтобы $\mathscr{X}$ было хаусдорфовым и паракомпактным (в частности, компактным) пространством. При этом пространство $\mathscr{Y}$ также можно найти в классе хаусдорфовых и паракомпактных (соответственно компактных) пространств. Мы оставим принцип расщепления без доказательства.

Задача 6. Постройте расслоение $\mathsf{P}\xi = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{X})$, слоем которого над точкой $b \in \mathscr{X}$ является проективное пространство $\mathsf{P}(\mathscr{F}_b^\xi)$ над линейным пространством $\mathscr{F}_b^\xi$ (точками пространства $\mathsf{P}(\mathscr{F}_b^\xi)$ являются одномерные подпространства пространства $\mathscr{F}_b^\xi$), и рассмотрите иад $\mathscr{E}'$ прообраз $(\pi')^*\xi$ векториого расслоения ξ. Покажнте, что *расслоение $(\pi')^*\xi$ является прямой суммой линейного расслоения и расслоения ранга $n-1$.* [Указание. Точками тотального пространства этого лннейного расслоения являются пары (L, p), где $L \in \mathscr{E}'$ и $p \in L$.]

Эта конструкция обеспечивает индуктивный шаг в доказательстве принципа расщепления.

Из принципа расщепления и формулы (3) следует, что формулу (4) достаточно доказать лишь в случае, когда x и y являются линейными расслоениями. С другой стороны, легко видеть, что *если x линейно, то*

$$\psi^k(x) = x^k. \tag{5}$$

[Действительно, если x линейно, то $\lambda^i(x) = 0$ при $i \geqslant 2$ и, значит, $\lambda_t(x) = 1 + tx$. Поэтому

$$\psi_t(x) = -t\frac{d}{dt}\ln(1-tx) = \frac{tx}{1-tx} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k t^k,$$

что равносильно (5).] Следовательно, если x и y линейны, то

$$\psi^k(xy) = (xy)^k = x^k y^k = \psi^k(x)\psi^k(y)$$

(заметим, что для линейных x и y расслоение xy также линейно). Это доказывает (4). □

Аналогичным образом доказывается, что

$$\psi^k\psi^l(x) = \psi^{kl}(x).$$

(Когда x линейно, для доказательства достаточно применить формулу (5). Общий случай вытекает отсюда по принципу расщепления.) Это означает, что

$$\psi^k \circ \psi^l = \psi^{kl} \tag{6}$$

для любых $k, l \geqslant 1$.

Замечание 3. Если пространство $\mathscr{X}$ гладко, то пространство $\mathscr{Y}$ и отображение f в принципе расщепления также можно выбрать гладкими. Тогда будет определен гомоморфизм $f^*\colon H^*\mathscr{X} \to H^*\mathscr{Y}$ и *этот гомоморфизм будет мономорфизмом.*

Это немедленно дает нам (см. задачу 3 лекции 23) формулы (11) лекции 23 (мультипликативность отображений ch и ph).

Задача 7. Для линейных пространств — а значит, и для векторных расслоений — наряду с функтором Λ^k, $k \geqslant 0$, можно рассматривать также функтор S^k, сопоставляющий пространству $\mathscr{V}$ линейное пространство $S^k\mathscr{V}$ всех симметрических тензоров степени k на $\mathscr{V}$. Докажите для этого функтора аналог предложения 1, т. е. постройте такие отображения

$$s^k\colon K_{\mathbf{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbf{K}}\mathscr{X}, \qquad k \geqslant 0,$$

что $s^k(x) = \chi(S^k\xi)$, когда $x = \chi(\xi)$ и

$$s^k(x+y) = \sum_{i+j=k} s^i(x)\,s^j(y)$$

для любых $x, y \in K_{\mathbf{K}}\mathscr{X}$.

Докажите также, что для любых векторных расслоений ξ и η в кольце $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ имеет место формула

$$\lambda^k(\xi-\eta)=\sum_{i+j=k}(-1)^j\lambda^i(\xi)s^j(\eta).$$

[Указание. Воспользуйтесь принципом расщепления.]

Особый интерес группы $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ представляют при $\mathscr{X}=\mathbb{S}^n$. Мы опишем эти группы при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ [случай $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ технически чуть более сложен из-за несвязности группы $\mathrm{O}(n)$]. Для этого мы воспользуемся комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$.

По определению точками пространства $\mathbb{C}P^n$ являются одномерные подпространства линейного пространства $\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть $\mathscr{E}$ — подпространство прямого произведения $\mathbb{C}^{n+1}\times\times\mathbb{C}P^n$, состоящее из таких пар (z, L), $z\in\mathbb{C}^{n+1}$, $L\in\mathbb{C}P^n$, что $z\in L$, и пусть $\pi\colon \mathscr{E}\to\mathbb{C}P^n$ — ограничение проекции $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$ на $\mathscr{E}$.

Задача 10. Покажите, что *тройка* $\eta_{n+1}=(\mathscr{E}, \pi, \mathbb{C}P^n)$ *является линейным векторным расслоением.*

Слоем этого расслоения над точкой $L=\mathbb{C}P^n$ является, очевидно, само пространство L. На этом основании расслоение η_{n+1} называется *тавтологическим расслоением.*

При $n=1$ пространство $\mathbb{C}P^1$ является не чем иным, как сферой Римана $\mathbb{C}^+$, и потому естественным образом отождествляется со сферой $\mathbb{S}^2$. В силу этого отождествления расслоение η_2 будет линейным комплексным расслоением над $\mathbb{S}^2$ и потому будет определять элемент $\beta_2=[\eta_2]$ группы $K_{\mathbb{C}}\mathbb{S}^2$.

Можно показать (это трудная задача!), что *группа $K_{\mathbb{C}}\mathbb{S}^2$ является бесконечной циклической группой с образующей* β_2. (См. ниже лекцию 27.)

Рассматриваемый как элемент кольца $K_{\mathbb{C}}\mathbb{S}^2$ элемент β_2 выражается формулой

$$\beta_2=\eta_2-1.$$

Считая, что $n=2m$, отождествим каждую точку $t=(t_1, \ldots, t_n)\in I^n$ с точкой $(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_m)$ произведения $I^2\times\ldots\times I^2$ (m раз), где $\boldsymbol{t}_i=(t_{2i-1}, t_{2i})$, $i=1, \ldots, m$. Ясно, что точка t куба I^n тогда и только тогда принадлежит его границе $\dot{I}^n$, когда хотя бы для одного i точка $\boldsymbol{t}_i$ принадлежит границе квадрата I^2. Поэтому существует непрерывное отображение

$$f\colon \underbrace{\mathbb{S}^2\times\ldots\times\mathbb{S}^2}_{m\ \text{раз}}\to\mathbb{S}^{2m},$$

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I^2\times\ldots\times I^2 & = & I^{2m} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \underbrace{\chi_2\times\ldots\times\chi_2}_{m\text{ раз}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \chi_{2m}} \\ S^2\times\ldots\times S^2 & \longrightarrow & S^{2m} \end{array}$$

где χ_n — отображение $I^n\to S^n$, гомеоморфно отображающее внутренность куба I^n на проколотую сферу $S^n\setminus\{s_0\}$, а его границу $\dot{I}^n$ в точку s_0.

Пусть pr_i: $S^2\times\ldots\times S^2\to S^2$ — проекция на i-й множитель, $i=1, \ldots, m$, и пусть

$$\beta'_n=\mathrm{pr}_1^*\beta_2\cdot\ldots\cdot\mathrm{pr}_m^*\beta_2\in\tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^2\times\ldots\times S^2).$$

(Конечно, здесь имеется в виду умножение, описанное выше в замечании 2.) Оказывается — к сожалению, мы лишены возможности здесь это доказать — что

а. *Гомоморфизм*

$$f^*\colon \tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^{2m})\to\tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^2\times\ldots\times S^2)$$

является мономорфизмом.

б. *Элемент* β'_n *принадлежит его образу* (а значит, существует однозначно определенный элемент $\beta_n\in\tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^{2m})$, для которого $f^*(\beta_n)=\beta'_n$).

в. *Элемент* β_n *имеет бесконечный порядок и порождает группу* $K_{\mathbf{C}}S^{2m}$.

Таким образом, мы видим, что *для любого* $m\geqslant 1$ *группа* $K_{\mathbf{C}}S^{2m}$ *является бесконечной циклической группой.* [Можно показать, что $K_{\mathbf{C}}S^{2m+1}=0$.]

З а д а ч а 9. Докажите, что $\beta_2^2=0$. [У к а з а н и е. Используя матричную формулу

$$\left\|\begin{matrix}0 & -a\\ a^{-1} & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}a & 0\\ 0 & b\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}ab & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|, \tag{8}$$

докажите, что $\eta_2\oplus\eta_2=\eta_2\otimes\eta_2\oplus\theta^1$.]

Отсюда следует, что $\beta_n^2=0$ для любого $n\geqslant 2$.

Так как расслоение η_2 линейно, то для каждого $k\geqslant 1$ в кольце $K_{\mathbf{C}}S^2=1+\tilde{K}_{\mathbf{C}}S^2$ имеет место формула

$$\psi^k\beta_2=\psi^k(\eta_2-1)=\eta_2^k-1.$$

Но так как $\eta_2 = 1+\beta_2$ и $\beta_2^2 = 0$, то $\eta_2^k = 1+k\beta_2$ и, значит,

$$\psi^k\beta_2 = k\beta_2.$$

Следовательно, в силу функториальности

$$\psi^k\beta_n' = \mathrm{pr}_1^*(\psi^k\beta_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{pr}_m^{*}(\psi^k\beta_2) = $$
$$= k^m(\mathrm{pr}_1^*\beta_2\cdot\ldots\cdot\mathrm{pr}_m^*\beta_2) = k^m\beta_n',$$

и потому

(9) $$\psi_k\beta_n = k^m\beta_n, \qquad k\geqslant 1,\ n=2m$$

(мы здесь снова пользуемся функториальностью операции ψ^k, а также утверждением а).

Эти результаты о группах $\tilde{K}_{\mathbb{C}}\mathbb{S}^n$ находят замечательное применение к комплексу проблем, которые мы рассматривали в лекции 8.

Пусть

$$f\colon \mathbb{S}^{2n-1}\longrightarrow\mathbb{S}^n$$

— произвольное непрерывное отображение сферы $\mathbb{S}^{2n-1}$ в сферу $\mathbb{S}^n$. Пользуясь этим отображением, мы введем в дизъюнктное объединение $\mathbb{B}^{2n}\sqcup\mathbb{S}^n$ шара $\mathbb{B}^{2n}$ и сферы $\mathbb{S}^n$ отношение эквивалентности, считая точки x и y тогда и только тогда эквивалентными, когда либо $x=y$, либо $x\in\mathbb{S}^{2n-1}$, $y\in\mathbb{S}^n$ и $f(x)=y$. Соответствующее факторпространство мы обозначим символом $C(f)$. Оно содержит подпространство, гомеоморфное сфере $\mathbb{S}^n$, дополнение к которому гомеоморфно открытому шару $\mathring{\mathbb{B}}^{2n}$. [О пространстве $C(f)$ говорят, что оно получено *приклеиванием* шара $\mathbb{B}^{2n}$ к сфере $\mathbb{S}^n$ посредством отображения f.]

Для любого пространства $\mathscr{X}$ и любого его подпространства $\mathscr{A}$ символом $\mathscr{X}/\mathscr{A}$ обозначается факторпространство пространства $\mathscr{X}$ по отношению эквивалентности, в котором две точки пространства $\mathscr{X}$ тогда и только тогда эквивалентны, когда либо они совпадают, либо обе принадлежат $\mathscr{A}$.

Задача 10. Покажите, что $\mathscr{X}/\mathscr{A}$ является результатом приклеивания пространства $\mathscr{X}$ к точке pt посредством отображения $\mathscr{A}\longrightarrow\mathrm{pt}$.

В частности, для пространства $C(f)$ определено пространство $C(f)/\mathbb{S}^n$.

Задача 11. Покажите, что *пространство $C(f)$ естественно гомеоморфно сфере* $\mathbb{S}^{2n}$.

Таким образом, мы имеем два отображения

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{j} \mathbb{S}^{2n},$$

где i—вложение, а j—отображение факторизации. Оказывается, что *последовательность групп и гомоморфизмов*

$$0 \to \tilde{K}_{\mathbf{C}}\mathbb{S}^{2n} \xrightarrow{j^*} \tilde{K}_{\mathbf{C}}C(f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}_{\mathbf{C}}\mathbb{S}^n \to 0$$

является точной последовательностью.

Мы также оставим это утверждение без доказательства.

Из него следует, что *при $n=2m$ группа $\tilde{K}_{\mathbf{C}}C(f)$ является свободной абелевой группой с двумя образующими a и b, где*

$$a = j^*(\beta_{2n}), \quad i^*(b) = \beta_n$$

(образующая a определяется единственным образом, а образующая b—с точностью до слагаемого вида ka).

При этом, так как $i^*(b^2) = \beta_n^2 = 0$, то существует такое число $H(f)$, что

$$b^2 = H(f)\,a.$$

Это число называется *инвариантом Хопфа* отображения f. [Название объясняется тем, что число $H(f)$ зависит только от гомотопического класса отображения f. Этот факт нам не понадобится.]

Так как отображение j^* мономорфно, то $a^2=0$. Так как $i^*(a)=0$ и, значит, $i^*(ab)=0$, то $ab=\varepsilon a$, где ε—некоторое число. (На самом деле $\varepsilon=0$, но этот факт нам также не нужен.) Поэтому

$$(b+ka)^2 = b^2 + 2k\varepsilon a = (H(f)+2k\varepsilon)\,a.$$

Мы видим, что при замене образующей b число $H(f)$ может меняться на четное число (так что инвариантом является только его вычет по модулю 2). [На самом деле, поскольку $\varepsilon=0$, инвариантно само число $H(f)$.]

Теорема 1. *Отображение f с нечетным инвариантом Хопфа $H(f)$ может существовать только при $n=2, 4, 8$.*

Снова те же таинственные значения!

Доказательство. Пусть отображение f с нечетным $H(f)$ существует. Рассмотрим соответствующее пространство $C(f)$ и образующие a, b группы $\tilde{K}_{\mathbf{C}}C(f)$. Так как $\psi^k(\beta_n) = k^m\beta_n$ и $\psi^k(\beta_{2n}) = k^n\beta_{2n}$, то

$$\psi^k(a) = k^n a \quad \text{и} \quad \psi^k(b) = q(k)\,a + k^m b, \qquad n=2m,$$

где $q(k)$ — некоторое целое число. В частности, $\psi^2(b)=q(2)a+2^m b$. Но, как мы знаем (см. задачу 5),

$$\psi^2(b)=b^2-2\lambda^2(b)=H(f)a-2\lambda^2(b)$$

и, значит, $\psi^2(b)\equiv a \bmod 2$. Поэтому число $q(2)$ нечетно.

С другой стороны,

$$\psi^2\psi^k(b)=\psi^2(q(k)a+k^m b)=$$
$$=(2^n q(k)+k^m q(2))a+2^m k^m b\equiv k^m q(2)a \mod 2^m$$

и

$$\psi^k\psi^2(b)=\psi^k(q(2)a+2^m b)=$$
$$=k^n q(2)a+2^m\psi^k(b)\equiv k^n q(2)a \mod 2^m.$$

Поскольку $\psi^2\circ\psi^k=\psi^k\circ\psi^2$ (см. формулу (6)), этим доказано, что

$$k^m q(2)\equiv k^n q(2) \mod 2^m$$

и, значит (так как число $q(2)$ нечетно, а $n=2m$), что

$$k^m(k^m-1)\equiv 0 \mod 2^m$$

для любого $k\geqslant 1$.

В частности, для любого нечетного k должно иметь место сравнение

$$k^m-1\equiv 0 \mod 2^m. \tag{10}$$

При $k=5$ и $m>1$ отсюда следует, что $5^m\equiv 1 \mod 4$, что возможно только при $m=2l$ четном. Но тогда при $k=1+2^l$

$$k^m=(1+2^l)^{2l}\equiv(1+2^{l+1})^l\equiv 1+l2^{l+1} \mod 2^m$$

и, следовательно, сравнение (10) возможно только при $l2^{l+1}\equiv 0 \mod 2^m$, т. е. при $2l\equiv 0 \mod 2^l$. Поскольку последнее сравненне имеет место только при $l=1$ и 2, этим доказано, что $m=1$, 2 или 4, т. е. что $n=2$, 4 или 8. □

Чтобы связать теорему 1 с проблемами из лекции 8, мы по произвольному непрерывному умножению

$$\mu\colon \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}$$

на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ (вообще говоря, единицы не имеющего) построим некоторое отображение

$$c_\mu\colon \mathbb{S}^{2n-1}\to\mathbb{S}^n,\qquad n=2m. \tag{11}$$

Для этого, считая сферу $\mathbb{S}^{2n-1}$ единичной сферой унитарного пространства $\mathbb{C}^n$, мы будем представлять себе последнее пространство разложенным в прямую сумму $\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m$ двух пространств $\mathbb{C}^m$. В соответствии с этим точки сферы $\mathbb{S}^{2n-1}$ мы будем записывать в виде пар $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, где $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^m$ и

$$|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 = 1.$$

Пользуясь этим, мы разложим сферу $\mathbb{S}^{2n-1}$ в объединение $H^{(-)} \cup H^{(+)}$ двух множеств $H^{(-)}$ и $H^{(+)}$, где $H^{(+)}$ — подмножество сферы $\mathbb{S}^{2n-1}$, состоящее из точек $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, для которых $|\boldsymbol{u}| \geqslant |\boldsymbol{v}|$, а $H^{(-)}$ — подмножество, состоящее из точек $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, для которых $|\boldsymbol{u}| \leqslant |\boldsymbol{v}|$.

Задача 12. Покажите, что формулы

$$\varphi^{(+)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2}}, \sqrt{2}\,\boldsymbol{v}\right), \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in H^{(+)},$$

$$\varphi^{(-)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left(\sqrt{2}\,\boldsymbol{u}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}}\right), \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in H^{(-)},$$

задают гомеоморфизмы

$$\varphi^{(+)}: H^{(+)} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{B}^n, \quad \varphi^{(-)}: H^{(-)} \longrightarrow \mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^{n-1},$$

где, как всегда, $\mathbb{S}^{n-1} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m;\ |\boldsymbol{z}| = 1\}$, $\mathbb{B}^n = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m;\ |\boldsymbol{z}| \leqslant 1\}$.

На пересечении $H^{(0)} = H^{(-)} \cap H^{(+)}$ $\left(\text{характеризующемся уравнениями } |\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}\right)$ гомеоморфизмы $\varphi^{(+)}$ и $\varphi^{(-)}$ совпадают и представляют собой гомеоморфизм

$$\varphi^{(0)}: H^{(0)} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto (\sqrt{2}\,\boldsymbol{u}, \sqrt{2}\,\boldsymbol{v}).$$

Например, при $m = 1$ подмножество $H^{(0)}$ гомеоморфно тору $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, а подмножества $H^{(-)}$ и $H^{(+)}$ являются полноториями с краем $H^{(0)}$.

Каждая точка $\boldsymbol{y}$ сферы $\mathbb{S}^n$ (в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с базисом $\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_n$) представляется в виде

$$\boldsymbol{y} = \cos\theta \cdot \boldsymbol{x} + \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_n,$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$, а $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. При $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0$ мы обозначим эту точку символом $[\boldsymbol{x}, t]^{(-)}$, где $t = 1 + \frac{2}{\pi}\theta$, а при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ — символом $[\boldsymbol{x}, t]^{(+)}$, где $t = 1 - \frac{2}{\pi}\theta$ (в обоих случаях t меняется от 0 до 1, причем при $t = 1$ получается точка $\boldsymbol{x}$, а при $t = 0$ — соответственно точки $-\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_n$).

Введя эти обозначения, мы определим отображение c_μ формулой

$$c_\mu(u, v) = \begin{cases} \left[\mu\left(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right), \sqrt{2}|v|\right]^{(+)}, & \text{если } (u, v) \in H^{(+)}, \\ \left[\mu\left(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right), \sqrt{2}|u|\right]^{(-)}, & \text{если } (u, v) \in H^{(-)}. \end{cases}$$

Легко видеть, что эти формулы корректно (даже при $u=0$ или $v=0$) определяют непрерывное отображение (13). □

Об отображении c_μ говорят, что оно получено из умножения μ *конструкцией Хопфа.*

Выбрав и зафиксировав в сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ точку s_0, рассмотрим отображения

(12) $$x \mapsto \mu(s_0, x), \quad x \mapsto \mu(x, s_0)$$

сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в себя. Пусть d_1 и d_2—степени этих отображений. [Контрольный вопрос. Зависят ли степени d_1 и d_2 от выбора точки s_0?]

Являясь отображением $\mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^n$ при n четном, отображение c_μ обладает инвариантом Хопфа $H(c_\mu)$. Оказывается, что

(13) $$H(c_\mu) = d_1 d_2.$$

Мы эту формулу также примем без доказательства.

В случае, когда умножение μ обладает единицей s_0, отображения (13) представляют собой тождественные отображения, и потому $d_1 = 1$, $d_2 = 1$. Следовательно, в этом случае $H(c_\mu) = 1$, что согласно теореме 1 возможно только при $n = 2, 4, 8$.

Множества, в которых определено умножение с единицей, называются *унитоидами,* а топологические пространства, являющиеся унитоидами с непрерывным умножением,—*топологическими унитоидами.* Таким образом, мы видим, что *сфера $\mathbb{S}^n$ может быть топологическим унитоидом только при $n = 1, 3, 7$.* (С другой стороны, из лекции 8 мы знаем, что при этих значениях n сфера $\mathbb{S}^n$ является даже гладкой квазигруппой.)

В лекции 8 мы рассматривали следующие условия на натуральное число n:

Qua. *Сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ квазикомплексифицируема.*

Prl. *Сфера $\mathbb{S}^n$ параллелизуема.*

Qgr. *Сфера $\mathbb{S}^n$ является гладкой квазигруппой.*

Div. *Пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ является алгеброй с делением.*

Div₁. *Пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ является алгеброй с делением, имеющей единицу,*

и установили между этими условиями ряд импликаций. Например, согласно утверждению задачи 9 лекции 8 ***Div*** $\Rightarrow$ ***Div***$_1$.

Теперь мы добавим еще следующие условия:

Unt. *Сфера $\mathbb{S}^n$ является топологическим унитоидом.*

Odd. *Существует отображение $\mathbb{S}^{2n+1}\to\mathbb{S}^{n+1}$ с нечетным инвариантом Хопфа.*

(Собственно говоря, в последнем условии следует предполагать, что число n нечетно. Во избежание тривиальных оговорок условимся считать, что это условие при n четном также имеет смысл, но никогда не выполнено.)

Как выше было показано — правда, на основе недоказанной формулы (13) — ***Unt*** $\Rightarrow$ ***Odd***.

В лекции 8 было доказано, что ***Qgr*** $\Rightarrow$ ***Prl***. Обратная импликация в ослабленном виде ***Prl*** $\Rightarrow$ ***Unt*** также легко доказывается. Действительно, утверждение, что сфера $\mathbb{S}^n$ параллелизуема, означает, что в каждой точке $x\in\mathbb{S}^n$ определен ортонормированный базис $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ касательного пространства, непрерывно зависящий от x. Пусть $A(x)$ — матрица порядка $n+1$, строками которой являются векторы $x, f_1(x), \ldots, f_n(x)$. Эта матрица ортогональна и обладает тем свойством, что $eA(x)=x$, где $e_0=(1, 0, \ldots, 0)$. Поэтому формула

$$\mu(x, y)=xA(e_0)^{-1}A(y)$$

определяет на $\mathbb{S}^n$ умножение с единицей e_0. □

Билинейная операция $x, y\mapsto x\times y$ на евклидовом пространстве $\mathcal{A}$ называется *векторным умножением*, если для любых векторов $x, y\in\mathcal{A}$

а) вектор $x\times y$ ортогонален векторам x и y:

$$(x, x\times y)=0, \quad (x\times y, y)=0;$$

б) имеет место равенство

$$|x\times y|^2+|(x, y)|^2=|x|^2|y|^2$$

(см. формулу (8) лекции I.15; в отличие от семестра I мы теперь обозначаем скалярное произведение векторов x и y символом (x, y)).

Произвольная (не обязательно билинейная) операция $x, y \mapsto x \times y$ на евклидовом пространстве $\mathcal{A}$, обладающая свойствами **а** и **б**, называется *непрерывным векторным умножением*.

Евклидово пространство $\mathcal{A}$, одновременно являющееся алгеброй над $\mathbb{R}$, называется *нормированной алгеброй*, если

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}$.

Эти определения позволяют ввести еще четыре условия:

Vect. *На $\mathbb{R}^n$ существует векторное умножение.*

Cont. *На $\mathbb{R}^n$ существует непрерывное векторное умножение.*

Norm. *На $\mathbb{R}^{n+1}$ существует умножение, по отношению к которому $\mathbb{R}^n$ является нормированной алгеброй.*

Norm₁. *На $\mathbb{R}^{n+1}$ существует умножение, по отношению к которому $\mathbb{R}^n$ является нормированной алгеброй с единицей.*

Пример обычного векторного умножения показывает, что условие ***Vect*** выполнено при $n = 3$. Оно выполнено также при $n = 1$. (На одномерном евклидовом пространстве свойствами **а** и **б** обладает нулевое умножение.)

Пример полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ тела $\mathbb{H}$ и алгебры $\mathbb{C}a$ показывает, что условие ***Norm***$_1$ выполнено при $n + 1 = 1, 2, 4, 8$.

Ясно, что любая нормированная алгебра является алгеброй с делением (для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ операторы $x \mapsto ax$ и $x \mapsto xa$ имеют нулевое ядро и потому—в силу конечномерности пространства $\mathcal{A}$—невырождены). Поэтому ***Norm*** $\Rightarrow$ ***Div***.

Задача 13. Покажите, что ***Norm*** $\Leftrightarrow$ ***Norm***$_1$. [Указание. Ср. задачу 9 лекции 8.]

Пусть e—единица нормированной алгебры $\mathcal{A}$ с единицей и $\mathcal{A}^\perp$—ее ортогональное дополнение. Для любых векторов $x, y \in \mathcal{A}^\perp$ мы обозначим через $x \times y \in \mathcal{A}^\perp$ ортогональную проекцию вектора xy на $\mathcal{A}^\perp$.

Задача 14. Покажите, что операция $x, y \mapsto x \times y$ *является векторным умножением на* $\mathcal{A}^\perp$. [Указание. Докажите, что

$$xy \cdot \bar{y} = (y, y)\, x, \text{ где } \bar{y} = ke - y', \text{ если } y = ke + y' \text{ и } e \perp y'.]$$

Следовательно, ***Norm***$_1$ $\Rightarrow$ ***Vect***.

Обратно, пусть $\mathcal{A}'$—евклидово пространство с векторным умножением. Рассмотрим евклидово пространство

$\mathcal{A} = \mathbb{R}e \oplus \mathcal{A}'$ со скалярным произведением $(ae + \boldsymbol{x}, be + \boldsymbol{y}) = ab + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (ортогональную прямую сумму одномерного пространства $\mathbb{R}e$ и пространства $\mathcal{A}'$).

Задача 15. Покажите, что *относительно умножения*

$$(ae + \boldsymbol{x})(be + \boldsymbol{y}) = (ab - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))e + (a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$$

пространство $\mathcal{A}$ является нормированной алгеброй с единицей e.

Следовательно, $\boldsymbol{Vect} \Rightarrow \boldsymbol{Norm}_1$.

Эта же конструкция доказывает, что $\boldsymbol{Cont} \Rightarrow \boldsymbol{Unt}$.

Далее, легко видеть, что $\boldsymbol{Vect} \Rightarrow \boldsymbol{Qua}$. Действительно, каждое векторное умножение в пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ определяет в касательном пространстве $I_{\boldsymbol{x}}\mathbb{S}^{n-1} = (\mathbb{R}\boldsymbol{x})^{\perp}$ оператор

$$I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} \in I_{\boldsymbol{x}}\mathbb{S}^{n-1}.$$

Так как $|\boldsymbol{x}| = 1$ и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, то $|I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = |\boldsymbol{y}|^2$ и, значит, оператор $I_{\boldsymbol{x}}$ ортогонален, а так как $(I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0$, то этот оператор и кососимметричен. Поэтому $I_{\boldsymbol{x}}^2 = -\mathrm{id}$ (см. задачу 3 лекции 8), т. е. операторы $I_{\boldsymbol{x}}$ являются операторами комплексной структуры. □

Этим построением мы фактически уже пользовались в лекции 8.

Обратная импликация здесь опять элементарно доказывается лишь в ослабленном виде $\boldsymbol{Qua} \Rightarrow \boldsymbol{Cont}$.

Пусть $\boldsymbol{x} \mapsto I_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$,— квазикомплексная структура на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что для любого единичного вектора $\boldsymbol{y} \in I_{\boldsymbol{x}}\mathbb{S}^{n-1}$ векторы $\boldsymbol{y}$ и $I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$ линейно независимы (составляют базис порожденного ими подпространства $[\boldsymbol{y}, I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}]$). [Действительно, если $a\boldsymbol{y} + bI_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = 0$, то $aI_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} - b\boldsymbol{y} = 0$ и, значит, $(a^2 + b^2)\boldsymbol{y} = 0$.] Поэтому определен вектор

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \frac{I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} - (I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}}{|I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} - (I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}|}$$

(единичный вектор, составляющий вместе с вектором $\boldsymbol{y}$ ортонормированный базис плоскости $[\boldsymbol{y}, I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}]$, одноименный с базисом $\boldsymbol{y}$, $I_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$). Тем самым произведение $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ определено для любых ортогональных векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Распространим его на любые векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, положив

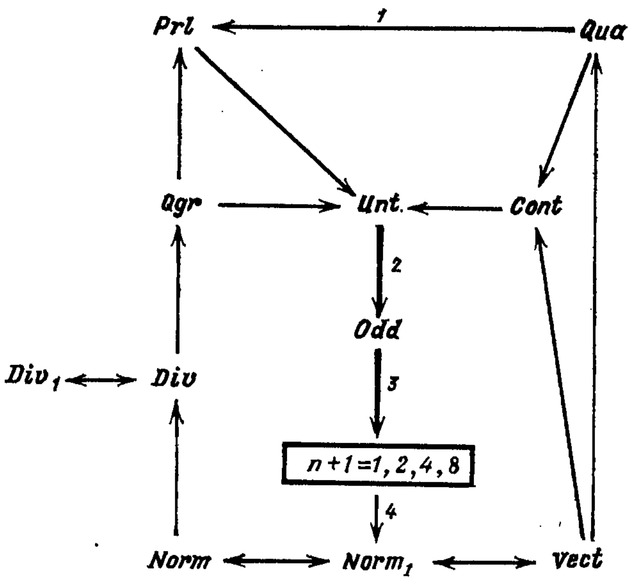
$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{cases} 0, \text{ если векторы } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ линейно зависимы,} \\ \sqrt{|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$u = \frac{x}{|x|}, \quad v = \frac{|x|^2 y - (x, y)\, x}{||x|^2 y - (x, y)\, x|}$$

— векторы, получающиеся из векторов x, y процессом ортогонализации Грама—Шмидта. Ясно, что построенное так умножение обладает свойствами **а** и **б**. □

Соберем вместе все наши импликации. Тонкие стрелки здесь изображают импликации, либо тривиальные, либо



элементарно доказываемые. Импликация *1* составляет содержание теоремы Кирхгофа (см. предложение 1 лекции 8), а импликация *4* вытекает из существования алгебр $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}a$. Две утолщенные стрелки изображают импликации, доказанные нами лишь частично и/или с купюрами. Наиболее глубокий и трудно доказуемый факт выражает импликация *3*.

Техническая импликация *2* имеет существенно более простой характер, и ее доказательство, хотя нами полностью и опущенное, основывается исключительно на элементарных общих свойствах K-групп, которые у нас просто не было времени изложить.

Водя пальцем по диаграмме импликаций, мы немедленно убеждаемся, что, двигаясь по стрелкам, можно от любого условия перейти к любому другому. Это означает, что *все десять условий на число* n *равносильны.*

Удивительный результат!

Импликация $Prl \Rightarrow n+1=1, 2, 4, 8$ составляет содержание утверждения Б из лекции 8.

Конечно, хотелось бы иметь более прямое доказательство равносильности, скажем, условий ***Div***, ***Norm*** и ***Cont***. Единственно, что до сих пор в этом направлении сделано,— это доказанная еще в конце XIX века Гурвицем теорема, утверждающая, что *любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из алгебр* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *и* ***Ca*** (т. е. импликация *4* обратима).