Лекция 25

Главные расслоения над сферами.— Характеристическое отображение для расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$.— Характеристическое отображение для расслоения $\tau^{U}_{\mathbb{S}^{n+1}}$.— Непараллелизуемость сфер $\mathbb{S}^{4l+1}$.— Гомотопические группы пунктированных пространств.— Альтернативное определение гомотопических групп.— Гомотопические группы и классы отображений сфер.— Гомотопические группы абелевых пространств.

Изложенное—с лакунами—в предыдущей лекции доказательство несуществования при $n \neq 1, 2, 4, 8$ отображений с нечетным инвариантом Хопфа представляется несколько искусственным и не выясняющим сути дела. В этой и следующих двух лекциях мы на примере доказательства непараллелизуемости сфер $\mathbb{S}^{n+1}$ при $n = 4l$ разовьем другой, более прямой подход, лишенный этого недостатка. Затем мы свяжем его с K-группами.

Пусть $\xi = (\mathscr{E}, p, \mathbb{S}^{n+1})$—произвольное главное расслоение над сферой $\mathbb{S}^{n+1}$ (нам будет сейчас удобно обозначать проекцию символом p, а не π, как раньше) и пусть $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$—открытые множества сферы $\mathbb{S}^{n+1}$, состоящие из точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n+1}$, для которых соответственно $x^{n+1} < 1/2$ и $x^{n+1} > -1/2$.

Задача 1. Покажите, что *над каждым множеством $U_{(-)}$ и $U_{(-)}$ расслоение ξ обладает сечением.* [Указание. Множества $U_{(+)}$ и $U_{(-)}$ гомеоморфны открытому $(n+1)$-мерному шару $\mathring{\mathbb{B}}^{n+1}$.]

Пусть $s_{(-)}$—сечение расслоения ξ над $U_{(-)}$, а $s_{(+)}$—сечение расслоения ξ над $U_{(+)}$. Тогда для любой точки $\boldsymbol{x} \in U_{(-)} \cap U_{(+)}$ (и, в частности, для любой точки $\boldsymbol{x}$ экваториальной сферы $\mathbb{S}^n$: $x^{n+1} = 0$) определен элемент

$$T\boldsymbol{x} = \tau(s_{(+)}(\boldsymbol{x}), s_{(-)}(\boldsymbol{x})),$$

где τ—отображение сдвига для расслоения ξ (см. лекцию 1). (Для расслоения $(\mathrm{SO}(n+2), p, \mathbb{S}^{n+1})$ из лекции 8 элемент $T\boldsymbol{x}$ определяется формулой $T\boldsymbol{x} = s_{(+)}^{-1}(\boldsymbol{x}) s_{(-)}(\boldsymbol{x})$.) В общем случае

$$s_{(-)}(\boldsymbol{x}) = s_{(+)}(\boldsymbol{x})\, T\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n.$$

Ясно, что отображение

$$T\colon \mathbb{S}^n \to \mathcal{G}, \quad x \mapsto Tx, \qquad x \in \mathbb{S}^n, \tag{1}$$

непрерывно. Оно называется *характеристическим отображением* (для главного расслоения ξ).

Конечно, отображение T зависит от выбора сечений $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$.

Пусть $s'_{(-)}$ и $s'_{(+)}$—другие сечения расслоения ξ над $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$ и пусть $T'\colon \mathbb{S}^n \to \mathcal{G}$—соответствующее характеристическое отображение. Тогда если

$$h_{(-)}\colon U_{(-)} \to \mathcal{G}, \quad h_{(+)}\colon U_{(+)} \to \mathcal{G}$$

—отображения, заданные формулами

$$h_{(-)}(x) = \tau(s'_{(-)}(x), s_{(-)}(x)), \qquad h_{(+)}(x) = \tau(s'_{(+)}(x), s_{(+)}(x)),$$

то на $\mathbb{S}^n$ будет иметь место равенство

$$T'(x) = h_{(-)}^{-1}(x)\, T(x)\, h_{(+)}(x), \qquad x \in \mathbb{S}^n.$$

Для любой точки $x \in \mathbb{S}^n$ и любого числа $t \in I$, $I = [0, 1]$, мы введем в рассмотрение точки $\mu_{(-)}(x, t)$, $\mu_{(+)}(x, t)$ сферы $\mathbf{S}^{n+1}$, определенные соответственно формулами

$$\mu_{(-)}(x, t) = \cos\frac{\pi}{2}t \cdot x - \sin\frac{\pi}{2}t \cdot e_{n+1},$$

$$\mu_{(+)}(x, t) = \cos\frac{\pi}{2}t \cdot x + \sin\frac{\pi}{2}t \cdot e_{n+1}.$$

(При t, меняющемся от 0 до 1, эти точки пробегают отрезки меридиана сферы $\mathbb{S}^{n+1}$, соединяющего точку экватора x с полюсами $-e_{n+1}$ и e_{n+1} соответственно.) Тогда формула

$$F(x, t) = h_{(-)}^{-1}(\mu_{(-)}(x, t))\, T(x)\, h_{(+)}(\mu_{(+)}(x, t)), \quad x \in \mathbb{S}^n, t \in I,$$

будет определять некоторую гомотопию

$$F\colon \mathbb{S}^n \times I \to \mathcal{G}$$

(см. определение 3 лекции III.26), связывающую отображение T' с отображением

$$a^{-1}Tb\colon x \mapsto a^{-1}T(x)\, b,$$

где $a = h_{(-)}(-e_{n+1})$, $b = h_{(+)}(e_{n+1})$.

Предположим, что группа $\mathcal{G}$ линейно связна (что заведомо выполнено для группы $SO(n+2)$) и, значит, что в $\mathcal{G}$ существуют пути u и v, соединяющие точки a и b с единицей e группы $\mathcal{G}$. Тогда формула $(x, t) \mapsto u(t)^{-1}T(x)v(t)$ будет задавать гомотопию, связывающую отображение $a^{-1}Tb$ с отображением T. Таким образом, в этом случае отображения T и T' гомотопны.

Этим доказано, что *в случае, когда группа $\mathcal{G}$ линейно связна, гомотопический класс* $[T]$ *характеристического отображения* (1) *не зависит от случайностей построения* (выбора сечений $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$). Он называется *характеристическим классом расслоения* ξ. (С характеристическими классами из лекций 22—23 гомотопический класс $[T]$ никак непосредственно не связан.)

Если расслоение ξ тривиально (и, следовательно, обладает сечением s над всей сферой $\mathbb{S}^{n+1}$), то, приняв за $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$ ограничения сечения s, соответственно, на $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$, мы получим в качестве характеристического отображения T постоянное отображение const_e, переводящее сферу $\mathbb{S}^n$ в единицу e группы $\mathcal{G}$. Называя гомотопический класс постоянного отображения const_e *тривиальным классом*, мы видим, следовательно, что *характеристический класс тривиального главного расслоения тривиален.*

Множество всех гомотопических классов непрерывных отображений $\mathbb{S}^n \to \mathcal{G}$ сферы $\mathbb{S}^n$ в линейно связную группу $\mathcal{G}$ обозначается символом $\pi_n\mathcal{G}$.

По определению $[T] \in \pi_n\mathcal{G}$.

Задача 2. Множество $\mathcal{G}^{\mathbb{S}^n}$ всех непрерывных отображений $\mathbb{S}^n \to \mathcal{G}$ естественным образом наделяется структурой группы. Покажите, что

а) *все отображения, гомотопные постоянному отображению*

$$\mathrm{const}_e\colon \mathbb{S}^n \to \mathcal{G}, \quad x \mapsto e, \qquad x \in \mathbb{S}^n,$$

составляют инвариантную подгруппу группы $\mathcal{G}^{\mathbb{S}^n}$;

б) *смежные классы по этой подгруппе совпадают с гомотопическими классами отображений* $\mathbb{S}^n \mapsto \mathcal{G}$.

Тем самым множество $\pi_n\mathcal{G}$ естественным образом определяется как группа. Записанная аддитивно эта группа называется *n-ой гомотопической группой* линейно связной группы $\mathcal{G}$. Ее нулем служит тривиальный класс $[\mathrm{const}_e]$.

Ясно, что характеристический класс $[T] \in \pi_n\mathcal{G}$ зависит только от класса изоморфизма главного расслоения ξ, т. е. для изоморфных расслоений он один и тот же.

Задача 3. Покажите, что и, обратно, *главные расслоения с группой $\mathcal{G}$ над сферой $\mathbb{S}^{n+1}$, обладающие одним и тем же характеристическим классом, изоморфны.*

В этом смысле группа $\pi_n\mathcal{G}$ *классифицирует* главные $\mathcal{G}$-расслоения над $\mathbb{S}^{n+1}$.

Заметим, что здесь $n \geqslant 1$.

Задача 4. Обозначив через $\pi_0\mathcal{G}$ факторгруппу группы $\mathcal{G}$ по ее компоненте единицы, покажите, что *над окружностью* $\mathbb{S}^1$ *гладкие* $\mathcal{G}$*-расслоения классифицируются группой* $\pi_0\mathcal{G}$.

В частности, *если группа* $\mathcal{G}$ *линейно связна, то любое главное* $\mathcal{G}$*-расслоение над* $\mathbb{S}^1$ *тривиально.*

Мы видим, что утверждение **Б** лекции 8 о непараллелизуемости сфер $\mathbb{S}^n$ равносильно тому, что *при* $n \neq 1,3,7$ *характеристический класс* $\mathrm{SO}(n+1)$*-расслоения* $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}} = (\mathrm{SO}(n+2), \pi, \mathbb{S}^{n+1})$ *нетривиален.* В этой форме мы и будем его доказывать. (Заметим, что для этой переформулировки утверждения **Б** мы в задаче 3 не нуждаемся.)

Оказывается, что для расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$ характеристическое отображение $T\colon \mathbb{S}^n \to \mathrm{SO}(n+1)$ можно задать явной формулой.

Для любых точек $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{S}^{n+1}$, $\boldsymbol{b} \neq -\boldsymbol{a}$, мы обозначим через $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ элемент группы $\mathrm{SO}(n+2)$, оставляющий на месте все векторы, ортогональные векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а в плоскости этих векторов являющийся вращением на угол $< \pi$, переводящим вектор $\boldsymbol{a}$ в вектор $\boldsymbol{b}$. (При $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ преобразование $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ считается тождественным.) В частности, преобразование $\lambda = \boldsymbol{R}(e_n, e_{n+1})^2$ является поворотом в плоскости последних двух координат на угол π.

Задача 5. Покажите, что вращение $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ задается формулой

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{x}}{1+\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Заметим, что $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})^{-1}$.

Для любой точки $\boldsymbol{x} \in U_{(-)}$ (любой точки $\boldsymbol{x} \in U_{(+)}$) определено вращение $\lambda \circ \boldsymbol{R}(\lambda\boldsymbol{x}, e_{n+1})$ (вращение $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, e_{n+1})$), переводящее вектор e_{n+1} в вектор $\boldsymbol{x}$. Это означает, что формулы

$$\begin{aligned} s_{(-)}(x) &= \lambda \circ \boldsymbol{R}(\lambda\boldsymbol{x}, e_{n+1}), && \boldsymbol{x} \in U_{(-)},\\ s_{(+)}(x) &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, e_{n+1}), && \boldsymbol{x} \in U_{(+)}, \end{aligned}$$

определяют сечения

$$s_{(-)}\colon U_{(-)} \to \mathrm{SO}(n+2), \quad s_{(+)}\colon U_{(+)} \to \mathrm{SO}(n+2)$$

расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$ над $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$ соответственно. (Заметим, что это дает решение задачи 1 для расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$.) Следовательно, *формула*

$$T_{n+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}(e_{n+1}, \boldsymbol{x}) \circ \lambda \circ \boldsymbol{R}(\lambda\boldsymbol{x}, \; e_{n+1}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n,$$

задает отображение

$$T_{n+1}\colon\ \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathrm{SO}(n+1),$$

характеристическое для расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$.

Задача 6. Докажите, что

$$T_{n+1}\boldsymbol{x} = R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_{n+1})^2 = S_{\boldsymbol{x}} \circ S_{\boldsymbol{e}_n}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n,$$

где $S_{\boldsymbol{x}}$ — симметрия пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ в гиперплоскости, проходящей через точку $\mathbf{0}$ ортогонально вектору $\boldsymbol{x}$. [Указание. Достаточно доказать, что при $\boldsymbol{x} \neq \pm\boldsymbol{e}_n$ вращения $T_{n+1}\boldsymbol{x}$ и $R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_{n+1})^2$ одинаково действуют на двумерной сфере, высекаемой на сфере $\mathbb{S}^n$ трехмерным пространством, порожденным векторами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_{n-1}$, $\boldsymbol{e}_n$.]

Таким образом, вращение $T_{n+1}\boldsymbol{x}$ оставляет на месте все векторы пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогональные векторам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{e}_n$, а плоскость, порожденную векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{e}_n$, поворачивает на удвоенный угол между этими векторами. (При $\boldsymbol{x} = \pm\boldsymbol{e}_n$ преобразование $T_{n+1}\boldsymbol{x}$ тождественно.)

Задача 7. Покажите, что

$$T_{n+1}\boldsymbol{x} = \|\delta_{ij} - 2x_ix_j\| \cdot \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

для любой точки $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ сферы $\mathbb{S}^n$ (где, как всегда, E — единичная матрица порядка n; индексы у координат мы пишем теперь внизу). [Указание. Сечение $s_{(+)}$ выражается формулой

$$s_{(+)}(x) = \begin{Vmatrix} & & & & & & x_0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & \delta_{ij} - \dfrac{x_ix_j}{1+x^n} & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \\ -x_0 & \ldots & & & & -x_n & x_{n+1} \end{Vmatrix},$$

где $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_{n+1}) \in U_{(+)}$.]

В частности, равенство $T_{n+1}\boldsymbol{x} = T_{n+1}\boldsymbol{y}$ имеет место тогда, и только тогда, когда $\boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{x}$. Поэтому образ $T_{n+1}\mathbb{S}^n$ сферы $\mathbb{S}^n$ при отображении T_{n+1} представляет собой подмногообразие группы $\mathrm{SO}(n+1)$, диффеоморфное проективному пространству $\mathbb{R}P^n$ (а отображение $T_{n+1}\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow T_{n+1}\mathbb{S}^n$ является двулистным накрытием).

Задача 8. Покажите, что *составное отображение*

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{T_{n+1}} \mathrm{SO}(n+1) \xrightarrow{p_1} \mathbb{S}^n \tag{2}$$

сферы $\mathbb{S}^n$ *на себя, где* p_1 — *проекция главного расслоения* $\tau_{\mathbb{S}^n}$, *является отображением степени* 0 *при* n *четном и степени* 2 *при* n *нечетном*. [Указание. Для вычисления степени воспользуйтесь предложением 1 лекции III.26, имея в виду, что на каждой из полусфер $x^n > 0$ и $x^n < 0$ отображение (2) является гомеоморфизмом на проколотую сферу $\mathbb{S}^n \setminus \{-e_n\}$. При этом на полусфере $x^n > 0$ отображение (2) сохраняет ориентации (имеет степень $+1$). Степень же этого отображения на полусфере $x^n < 0$ равна степени $(-1)^{n+1}$ антиподального отображения $x \longmapsto -x$.]

Если отображение T_{n+1} гомотопно постоянному (характеристический класс $[T_{n+1}]$ тривиален), то отображение (2) также гомотопно постоянному и потому его степень равна нулю. Следовательно, при нечетном n отображение T_{n+1} не гомотопно постоянному и, значит, расслоение $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$ нетривиально. Иными словами, *при нечетном n сфера $\mathbb{S}^{n+1}$ не параллелизуема.*

В случае когда n четно (только и нужном для задачи о комплексифицируемости сфер), требуются более тонкие аргументы.

При четном $n=2m$ сферу $\mathbb{S}^{n+1}=\mathbb{S}^{2m+1}$ можно считать единичной сферой унитарного пространства $\mathbb{C}^{m+1}$ (с базисом $e_0, \ldots, e_m$). Это позволяет ввести в рассмотрение унитарный аналог $\tau^U_{\mathbb{S}^{n+1}}$ главного $\mathrm{SO}(n+1)$-расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$. По определению

$$\tau^U_{\mathbb{S}^{n+1}} = (\mathrm{U}(m+1),\ p^U,\ \mathbb{S}^{n+1}),$$

где p^U — отображение $\mathrm{U}(m+1) \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$, определенное формулой

$$p^U A = Ae_m, \qquad A \in \mathrm{U}(m+1).$$

[Контрольный вопрос: как связано с касательным расслоением $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$ комплексное векторное расслоение $\tau^U_{\mathbb{S}^{n+1}}$, ассоциированное с главным расслоением $\tau^U_{\mathbb{S}^{n+1}}$?]

Характеристическое для расслоения $\tau^U_{\mathbb{S}^{n+1}}$ отображение T^U_{n+1} является отображением $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathrm{U}(m)$, $n=2m$, и также может быть задано явной формулой.

Задача 9. Покажите, что

$$T^U_{n+1} z = \left\| \delta_{ij} - \frac{2z_i \bar{z}_j}{(1+z_m)^2} \right\|, \quad i, j = 0, \ldots, m-1,$$

для любой точки $z=(z_0, \ldots, z_m)$ экваториальной сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ (характеризуемой условием $\mathrm{Re}\, z_m = 0$).

Аналогом составного отображения (2) является отображение

$$(3) \qquad \mathbb{S}^n \xrightarrow{T^U_{n+1}} \mathrm{U}(m) \xrightarrow{p^U_1} \mathbb{S}^{n-1},$$

где p_1^U — проекция $\mathrm{U}(m) \to \mathbb{S}^{n-1}$ главного расслоения $\tau^U_{\mathbb{S}^{n-1}}$. В отличие от отображения (2) оно является отображением сферы $\mathbb{S}^n$ на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ меньшей размерности и поэтому вопрос о том, гомотопно ли оно постоянному отображению, является трудной и деликатной задачей.

Чтобы связать отображение T^U_{n+1} с отображением T_{n+1} (исследование которого является нашей конечной целью), мы воспользуемся отождествлением $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^n$, $n = 2m$, в соответствии с которым группа $\mathrm{U}(m)$ оказывается подгруппой группы $\mathrm{SO}(n)$ (это в точности ортогональная симметрическая группа $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2m)$; ср. задачу 4 лекции III.11). Таким образом, $\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(m+1) \subset \subset \mathrm{SO}(n+2)$ и в силу этих вложений сечения $s_{(+)}$, $s_{(-)}$ расслениия $\tau^U_{\mathbb{S}^{n+1}}$ будут сечениями расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$, а отображения T^U_{n+1} и T_{n+1} будут связаны формулой

$$(4) \qquad T_{n+1} = i \circ T^U_{n+1},$$

где i — вложение $\mathrm{U}(m) \to \mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SO}(n+1)$.

[Аналогичным образом при $m = 2l+1$ (т. е. при $n = = 4l+2$) над сферой $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}^{4l+3}$ определено главное расслоение $(\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(l+1), p, \mathbb{S}^{n+1})$ с кватернионно унитарной группой $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(l)$ и для его характеристического отображения T^{Sp}_{n+1} имеет место формула

$$T^U_{n+1} = i' \circ T^{\mathrm{Sp}}_{n+1},$$

где i' — вложение $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(l) \to \mathrm{U}(2l) \subset \mathrm{U}(2l+1)$. Поскольку группа $\mathrm{U}(2l)$ является слоем проекции p_1^U: $\mathrm{U}(2l+1) \to \to \mathbb{S}^{4l+1} = \mathbb{S}^{n-1}$, отсюда следует, что при *нечетном* m *отображение* (3) *является постоянным отображением.*]

Чтобы использовать формулу (4), нам понадобятся некоторые общие конструкции.

Для топологических пространств $\mathscr{X}$ некоторого класса, включающего все линейно связные топологические группы $\mathscr{G}$ и все линейно связные и односвязные топологические пространства (и, значит, в частности, сферы $\mathbb{S}^m$,

$m \geqslant 2$), и любого $n \geqslant 1$ мы введем в множество

$$\pi_n \mathscr{X} = [\mathbb{S}^n, \ \mathscr{X}]$$

всех гомотопических классов непрерывных отображений $\mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$ операцию сложения, по отношению к которой *это множество является абелевой группой* (с нулем 0 — гомотопическим классом const произвольного постоянного отображения const: $\mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$) и докажем (к сожалению, лишь частично) следующие утверждения:

а. В случае когда $\mathscr{X}$ является линейно связной топологической группой $\mathscr{G}$, группа $\pi_n \mathscr{X}$ совпадает с введенной выше группой $\pi_n \mathscr{G}$.

б. Для любого непрерывного отображения $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ отображение $f_*: \pi_n \mathscr{X} \to \pi_n \mathscr{Y}$, определенное формулой

$$f_* \alpha = [f \circ u], \qquad \alpha \in \pi_n \mathscr{X},$$

где u — произвольное отображение $\mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$ гомотопического класса α, *является гомоморфизмом.* При этом $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (свойство функториальности) и $f_* = g_*$, если отображения f и g гомотопны (свойство гомотопической инвариантности). Если отображение f гомотопно постоянному, то гомоморфизм f_* является нулевым (всю группу $\pi_n \mathscr{X}$ переводит в нуль группы $\pi_n \mathscr{Y}$).

в. Для любой линейно связной группы Ли $\mathscr{G}$ и любой ее линейно связной замкнутой подгруппы $\mathscr{H}$ определен гомоморфизм

(5) $$\partial: \pi_{n+1}(\mathscr{G}/\mathscr{H}) \to \pi_n \mathscr{H},$$

обладающий тем свойством, что последовательность

(6) $$\ldots \to \pi_{n+1}(\mathscr{G}/\mathscr{H}) \xrightarrow{\partial} \pi_n \mathscr{H} \xrightarrow{i_*} \pi_n \mathscr{G} \xrightarrow{p_*} \pi_n \mathscr{G}/\mathscr{H} \to \ldots$$

групп и гомоморфизмов, где $i: \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ — вложение, а $p: \mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H}$ — проекция, *является точной последовательностью* (в каждом члене образ входящего гомоморфизма совпадает с ядром выходящего). При этом для любого гомоморфизма $\varphi: \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$, переводящего подгруппу $\mathscr{H}$ в подгруппу $\mathscr{H}' \subset \mathscr{G}'$, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(\mathscr{G}/\mathscr{H}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n \mathscr{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n+1}(\mathscr{G}'/\mathscr{H}') & \xrightarrow{\partial} & \pi_n \mathscr{H}', \end{array}$$

вертикальные стрелки которой индуцированы гомоморфизмом φ (т. е., точнее, отображениями $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ и $\mathcal{G}/\mathcal{H} \to \mathcal{G}'/\mathcal{H}'$, определенными гомоморфизмом φ), *является коммутативной диаграммой* (при движении по стрелкам диаграммы от верхнего левого угла к правому нижнему результат не зависит от выбора пути).

г. *При* $\mathcal{G} = \mathrm{SO}(n)$, $\mathcal{H} = \mathrm{SO}(n-1)$ *образ гомоморфизма* $\partial\colon \pi_{n+1}\mathbb{S}^n \to \pi_n \mathrm{SO}(n)$ (напомним, что $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) = \mathbb{S}^n$) *совпадает с образом гомоморфизма*

$$(T_n)_*\colon\ \pi_n\mathbb{S}^{n-1} \to \pi_n \mathrm{SO}(n),$$

индуцированного характеристическим отображением $T_n\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathrm{SO}(n)$.

д. *Группа* $\pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1}$ *при* $n \geqslant 3$ *нетривиальна.*

е. *Отображение* $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *четной степени индуцирует при* $n \geqslant 3$ *нулевой гомоморфизм* $f_*\colon \pi_{n+1}\mathbb{S}^n \to \pi_{n+1}\mathbb{S}^n$.

ж. *При* $n = 4l$ *отображение* (3) *негомотопно постоянному* (*задает отличный от нуля элемент группы* $\pi_{4l}\mathbb{S}^{4l-1}$).

Этих фактов уже достаточно для доказательства утверждения **Б** лекции 8 при $n = 4l$.

Предложение 1. *При* $n = 4l$ *сфера* $\mathbb{S}^{n+1}$ *не параллелизуема* (*и, значит, сфера* $\mathbb{S}^n$ *не квазикомплексифицируема*).

Доказательство. Рассмотрим — очевидно коммутативную — диаграмму

$$(7)\qquad \begin{tikzcd}
 & \pi_n \mathrm{SO}(n-1) \arrow[r, equal] \arrow[d, "i'_*"] & \pi_n \mathrm{SO}(n-1) \arrow[d, "i''_*"] \\
\pi_{n+1}\mathbb{S}^n \arrow[r, "\partial"] & \pi_n \mathrm{SO}(n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p'_*"] & \pi_n \mathrm{SO}(n+1) \arrow[d, "p''_*"] \\
\pi_n\mathbb{S}^{n-1} \arrow[ur, "(T_n)_*"] & \pi_n\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "\partial'"] & \pi_n(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1)) \arrow[d, "\partial''"] \\
 & \pi_{n-1}\mathrm{SO}(n-1) \arrow[r, equal] & \pi_{n-1}\mathrm{SO}(n-1)
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами, в которой

∂ — гомоморфизм (5) при $\mathcal{G} = \mathrm{SO}(n+1)$ и $\mathcal{H} = \mathrm{SO}(n)$;

j — вложение $\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n+1)$;

k — индуцированное вложение $\mathbb{S}^{n-1} = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \to \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1)$;

i', i'' — вложения $\mathrm{SO}(n-1) \to \mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}(n-1) \to \to \mathrm{SO}(n+1)$;

p', p'' — проекции $\mathrm{SO}(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathrm{SO}(n+1) \to \to \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n-1)$;

∂', ∂'' — соответствующие гомоморфизмы (1).

Пусть $\eta \in \pi_n \mathbb{S}^{n-1}$. Если $k_*\eta = 0$, то $\partial'\eta = \partial'' k_* \eta = 0$, и, значит, — в силу точности — существует такой элемент $\alpha \in \in \pi_n \mathrm{SO}(n)$, что $p'_*\alpha = \eta$. При этом $p''_* j_* \alpha = k_* p'_* \alpha = k_* \eta = 0$ и, значит, существует такой элемент $\beta \in \pi_n \mathrm{SO}(n-1)$, что $i''_*\beta = j_*\alpha$. Но тогда для элемента $\alpha' = \alpha - i'_*\beta$ будет иметь место равенство

$$j_*\alpha' = j_*\alpha - j_* i'_* \beta = j_*\alpha - i''_*\beta = 0,$$

и потому существует такой элемент $\gamma \in \pi_{n+1}\mathbb{S}^n$, что $\partial\gamma = \alpha$. [Этот метод рассуждения называется диаграммным поиском — по-английски diagramm chasing; его удобно производить в уме, двигая пальцем по диаграмме.] Следовательно, согласно утверждению **г** в группе $\pi_n \mathbb{S}^{n-1}$ существует такой элемент γ', что $(T_n)_* \gamma' = \alpha$ и, значит,

$$(p' \circ T_n)_* \gamma' = p'_* \alpha = \eta.$$

Но отображение $p' \circ T_n \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, как мы знаем, либо гомотопно постоянному отображению (и потому индуцирует нулевой гомоморфизм $\pi_n \mathbb{S}^{n-1} \to \pi_n \mathbb{S}^{n-1}$), либо имеет степень 2 (и потому, в силу утверждения **е**, также индуцирует нулевой гомоморфизм). В обоих случаях $(p' \circ T_n)_* \gamma' = 0$ и, значит, $\eta = 0$.

Этим доказано, что *гомоморфизм k_* из диаграммы* (7) *является мономорфизмом.*

Пусть теперь α_0 — элемент группы $\pi_n \mathrm{SO}(n)$, являющийся гомотопическим классом отображения T^U_{n+1}, рассматриваемого в силу вложения $\mathrm{U}(m) \to \mathrm{SO}(n)$, $m = 2l$, как отображение $\mathbb{S}^n \to \mathrm{SO}(n)$. Так как составное отображение

$$\mathrm{U}(m) \to \mathrm{SO}(n) \xrightarrow{p'} \mathbb{S}^{n-1}$$

является, очевидно, не чем иным, как проекцией $\mathrm{U}(m) \to \to \mathbb{S}^{n-1}$ расслоения $\overset{U}{\tau}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, то элемент $p'_*\alpha_0$ представляет собой гомотопический класс отображения (3) и потому, согласно утверждению **ж**, отличен от нуля. Но тогда в силу мономорфности отображения k^* будет отличен от нуля элемент $p''_* j_* \alpha_0 = k^* p'_* \alpha_0$, а потому и элемент $j_*\alpha_0$ (снова диаграммный поиск!).

Для завершения доказательства остается заметить, что по определению композиция вложений $U(m) \to SO(n)$ и j: $SO(n) \to SO(n+1)$ является не чем иным, как вложением i: $U(m) \to SO(n+1)$ из формулы (4) и, значит, согласно этой формуле $j_*\alpha_0 = [T_{n+1}]$, где T_{n+1} — характеристическое отображение для расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$. Таким образом, $[T_{n+1}] \neq 0$ и потому сфера $\mathbb{S}^{n+1}$ не параллелизуема (расслоение $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$ не тривиально). $\square$

Перейдем теперь к доказательству утверждений **а**—**ж**.

Определение 1. Топологическое пространство $\mathscr{X}$, в котором выбрана точка x_0, называется *пунктированным*. Отображение f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ пунктированных пространств с отмеченными точками x_0 и y_0 называется *пунктированным*, если $f(x_0) = y_0$. В записи

$$f\colon (\mathscr{X}, x_0) \to (\mathscr{Y}, y_0).$$

Два пунктированных отображения f, g: $(\mathscr{X}, x_0) \to (\mathscr{Y}, y_0)$ называются *пунктированно гомотопными*, если их можно связать гомотопией F: $\mathscr{X} \times \boldsymbol{I} \to \mathscr{Y}$, обладающей тем свойством, что $F(x_0, t) = y_0$ для любого $t \in \boldsymbol{I}$. (Такие гомотопии называются *пунктированными*.)

Пусть

$$\boldsymbol{I}^n = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n;\ 0 \leqslant t^1 \leqslant 1,\ \ldots,\ 0 \leqslant t^n \leqslant 1\}$$

— *единичный куб* пространства $\mathbb{R}^n$, а $\dot{\boldsymbol{I}}^n$ — его *граница* (состоящая из точек $\boldsymbol{t}$, для которых $t^i = 0$ или 1 хотя бы для одного индекса $i = 1, \ldots, n$). Обобщая конструкцию фундаментальной группы $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ из лекции 3, мы для произвольного пунктированного пространства $(\mathscr{X}, x_0)$ рассмотрим всевозможные отображения u: $\boldsymbol{I}^n \to \mathscr{X}$, для которых $u(\dot{\boldsymbol{I}}^n) = x_0$. (Обозначение: u: $(\boldsymbol{I}^n, \dot{\boldsymbol{I}}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$.) Два таких отображения называются *гомотопными* $\operatorname{rel} \dot{\boldsymbol{I}}^n$, если существует связывающая их гомотопия f: $\boldsymbol{I}^n \times \boldsymbol{I} \to \mathscr{X}$, при которой $f(\boldsymbol{t}, t) = x_0$ для любых $\boldsymbol{t} \in \dot{\boldsymbol{I}}^n$ и $t \in \boldsymbol{I}$ (т. е. такая, что для каждого $t \in \boldsymbol{I}$ отображение f_t: $\boldsymbol{t} \mapsto f(\boldsymbol{t}, t)$ является отображением $(\boldsymbol{I}^n, \dot{\boldsymbol{I}}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$).

Отождествив $\boldsymbol{I}^n$ с $\boldsymbol{I}^{n-1} \times \boldsymbol{I}$, мы для любых отображений u, v: $(\boldsymbol{I}^n, \dot{\boldsymbol{I}}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$ положим

$$(u+v)(\boldsymbol{t}, t) = \begin{cases} u(\boldsymbol{t}, 2t), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ v(\boldsymbol{t}, 2t-1), & \text{если} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $t \in I^{n-1}$, $t \in I$. Ясно, что отображение $u \dotplus v$ непрерывно и является отображением $(I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$.

Задача 10. Покажите, что

а) *отношение гомотопности* $\operatorname{rel} \dot{I}^n$ *является отношением эквивалентности;*

б) *формула*

$$[u] + [v] = [u \dotplus v] \tag{8}$$

корректно определяет на множестве $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *всех гомотопических классов* $\operatorname{rel} \dot{I}^n$ *отображений* $(I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$ *операцию сложения;*

в) *относительно операции* (8) *множество* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *является группой, нулем которой является класс* $[\mathrm{const}_{x_0}]$ *постоянного отображения* const_{x_0}: $t \mapsto x_0$.

[Указание. При $n=1$ все это нам уже известно из лекции 3.]

Заметим, что в лекции 3 операцию в группе $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ мы называли умножением. В соответствии с этим аддитивные обозначения мы, как правило, будем использовать только при $n \geqslant 2$.

Конечно, группа $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ совпадает с группой $\pi_n(\mathscr{X}_0, x_0)$, где $\mathscr{X}_0$ — компонента линейной связности пространства $\mathscr{X}$, содержащая точку x_0.

Определение 2. Группа $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ называется *n-ой* (или *n-мерной*) *гомотопической группой* пунктированного пространства $\mathscr{X}$.

Замечание 1. Вместо пары $(I^n, \dot{I}^n)$ можно, конечно, использовать любую гомеоморфную пару (B, S); нужно только раз и навсегда выбрать и зафиксировать некоторый гомоморфизм $(B, S) \to (I^n, \dot{I}^n)$. Наиболее часто используются пары $(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ и $(\mathbb{E}_{(+)}, \mathbb{S}^{n-1})$, $(\mathbb{E}_{(-)}, \mathbb{S}^{n-1})$, где $\mathbb{E}_{(+)}$ и $\mathbb{E}_{(-)}$ — полусферы $x^n \geqslant 0$ и $x^n \leqslant 0$ сферы $\mathbb{S}^n$.

Пусть $f\colon (\mathscr{X}, x_0) \to (\mathscr{Y}, y_0)$ — произвольное пунктированное отображение.

Задача 11. Докажите, что

а) *для любого* $n \geqslant 1$ *формула*

$$f_*[u] = [f \circ u], \quad u\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0),$$

корректно определяет некоторое отображение

$$f_*\colon \pi_n(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_n(\mathscr{Y}, y_0);$$

б) *это отображение является гомоморфизмом;*

в) *если* $f=\mathrm{id}$, *то* $f_*=\mathrm{id}$ *и* $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ *для любых пунктированных отображений* $f\colon (\mathscr{X}, x_0)\to(\mathscr{Y}, y_0)$, $g\colon (\mathscr{Y}, y_0)\to(\mathscr{Z}, z_0)$.

Свойство **в** называется свойством функториальности; на языке теории категорий оно означает, что π_n представляет собой функтор из категории пунктированных пространств в категорию групп.

При $n\geqslant 2$ каждое отображение $u\colon (I^n, \dot I^n)\to(\mathscr{X}, x_0)$ естественным образом отождествляется с отображением $u^{\#}\colon (I^{n-1}, \dot I^{n-1})\to(\Omega\mathscr{X}, e_{x_0})$, определенным формулой

$$u^{\#}(\boldsymbol{t})(t)=u(t, \boldsymbol{t}),\qquad \boldsymbol{t}\in I^{n-1},\ t\in I,$$

где $\Omega\mathscr{X}=\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}, x_0)$ — пространство петель пространства $\mathscr{X}$ в точке x_0, а $e_{x_0}\colon t\mapsto x_0$ — постоянная петля (см. лекцию 2; здесь мы куб I^n отождествляем с кубом $I\times I^{n-1}$).

Задача 12. Покажите, что тем самым возникает отождествление

$$\pi_n(\mathscr{X}, x_0)=\pi_{n-1}(\Omega\mathscr{X}, e_{x_0}),\qquad n\geqslant 2. \tag{9}$$

Это отождествление (естественный изоморфизм) называется *изоморфизмом Гуревича.*

Если пространство $\mathscr{X}$ является топологическим унитоидом с единицей x_0, т. е. если на нем существует такое непрерывное умножение

$$\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathscr{X},\quad (x, y)\mapsto xy,$$

что $x_0x=xx_0=x$ для любой точки $x\in\mathscr{X}$, то формула

$$[u]\cdot[v]=[uv],$$

где $(uv)(\boldsymbol{t})=u(\boldsymbol{t})v(\boldsymbol{t})$ корректно (докажите!) определяет на $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ операцию умножения. Единицей этого умножения служит нуль $0=[\mathrm{const}_{x_0}]$ группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

Этот вывод остается, очевидно, в силе и в случае, когда точка x_0 является лишь, как говорят, *гомотопической единицей*, т. е. если $x_0x_0=x_0$ и отображения $x\mapsto xx_0$, $x\mapsto x_0x$, $x\in\mathscr{X}$, пунктированно гомотопны тождественному отображению $\mathrm{id}\colon \mathscr{X}\to\mathscr{X}$.

Задача 13. Покажите, что *операции сложения и умножения в* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *взаимно дистрибутивны*, т. е. что для любых элементов α, β, γ, $\delta\in\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ имеет место равенство

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\beta\delta.$$

В частности,

$$\alpha\beta = (\alpha + 0)(0 + \beta) = \alpha 0 + 0\beta = \alpha + \beta$$

и

$$\alpha\beta = (0 + \alpha)(\beta + 0) = 0\beta + \alpha 0 = \beta + \alpha.$$

Это доказывает, что *для любого топологического унитоида* $\mathscr{X}$ (*вообще говоря, лишь с гомотопической единицей* x_0) *группа* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *абелева* (а умножение в $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ совпадает со сложением).

Для групп $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ последний факт был уже доказан в лекции 15 (см. замечание 1 лекции 15).

[Заметим, что, таким образом, операция умножения в $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ ассоциативна, коммутативна и обратима, хотя умножение в $\mathscr{X}$ ни одним из этих свойств, вообще говоря, не обладает.]

Примером топологического унитоида с гомотопической единицей является пространство петель $\Omega\mathscr{X}$. Поэтому все группы $\pi_n(\Omega\mathscr{X}, e_{x_0})$ абелевы. В силу (9) это доказывает, что *для любого пунктированного пространства* $\mathscr{X}$ *группа* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *при* $n \geqslant 2$ *абелева.*

Абелевость групп $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 2$, объясняет, почему групповую операцию в них мы называем сложением.

Задача 14. Докажите абелевость групп $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 2$, построив для любых отображений u, v: $(I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$ гомотопию $\operatorname{rel} \dot{I}^n$, связывающую отображения $u + v$ и $v + u$.

Превратим сферу $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 1$, в пунктированное пространство, произвольно выбрав в $\mathbb{S}^n$ некоторую точку s_0 (скажем, точку e_1). Тогда для любого пунктированного пространства $\mathscr{X}$ будет определено множество

$$[\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]^{\bullet} = [(\mathbb{S}^n, s_0), (\mathscr{X}, x_0)]$$

всех пунктированных гомотопических классов $[f]^{\bullet}$ пунктированных отображений f: $(\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$.

Заметим, что открытый куб

$$\mathring{I}^n = \{t \in \mathbb{R}^n;\ 0 < t^1 < 1, \ \ldots, \ 0 < t^n < 1\},$$

являясь открытым подмногообразием ориентированного пространства $\mathbb{R}^n$, естественным образом ориентирован. По аналогичным соображениям естественно ориентирован и шар $\mathbb{B}^{n+1}$, являющийся областью с регулярной границей ориентированного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, а потому ориентирован и его край $\mathbb{S}^n$.

Задача 15. Постройте непрерывное отображение

$$\chi\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathbb{S}^n, s_0), \tag{10}$$

гомеоморфно и с сохранением ориентации отображающее открытый куб $\mathring{I}^n = I^n \setminus \dot{I}^n$ на проколотую сферу $\mathbb{S}^n \setminus \{s_0\}$ (т. е. в другой терминологии — являющееся на $\mathring{I}^n$ гомеоморфизмом степени 1).

Выбрав и зафиксировав отображение (10), мы можем каждому пунктированному отображению $f\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$ сопоставить отображение

$$f \circ \chi\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0).$$

Задача 16. Покажите, что

а) *формула* $[f]^{\bullet} \to [f \circ \chi]$ *корректно определяет некоторое отображение*

$$[\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]^{\bullet} \to \pi_n(\mathscr{X}, x_0); \tag{11}$$

б) *отображение* (11) *биективно.*

Мы будем отождествлять группу $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ с множеством $[\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]^{\bullet}$ посредством отображения (11). Таким образом, в силу этого отождествления элементами группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ будут гомотопические классы $[f]^{\bullet}$ отображений $f\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$.

Задача 17. Покажите, что *в группе* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *равенство* $[f]^{\bullet} = 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда отображение* $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$ *может быть распространено до отображения* $F\colon \mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{X}$, *переводящего в точку* x_0 *весь радиус* Os_0 *шара* $\mathbb{B}^{n+1}$.

Замечание 2. Ясно, что соответствие (11) зависит только от гомотопического класса $\operatorname{rel} \dot{I}^n$ отображения (10) (элемента $[\chi]$ группы $\pi_n(\mathbb{S}^n, s_0)$). С другой стороны, ниже мы покажем (см. замечание 1 лекции 26), что гомотопический класс $\operatorname{rel} \dot{I}^n$ произвольного отображения вида (10) зависит только от его степени $\deg \chi$ (на $\mathring{I}^n$). Поскольку по условию $\deg \chi = 1$, отсюда следует, что *отождествление* (11) *не зависит от выбора отображения* (10).

Пока же мы должны соблюдать определенную осторожность и все время помнить о произволе в выборе отображения (10).

Замечание 3. Конечно, вместо пары $(\mathbb{S}^n, s_0)$ мы можем взять любую гомеоморфную пару (S^n, s_0) (нужно лишь фиксировать, хотя бы с точностью до пунктированной гомотопии, определенный гомеоморфизм $(\mathbb{S}^n, s_0) \to (S^n, s_0)$. Поскольку для любых точек $s_0, s_1 \in \mathbb{S}^n$ существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $(\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathbb{S}^n, s_1)$ (даже движение), отсюда в силу замечания 2, в частности, следует, что выбор точки $s_0 \in \mathbb{S}^n$ ни на что реально не влияет.

Отождествление (11) переносит сложение из группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ в множество $[\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]^\bullet$. Как непосредственно — без перехода к отображениям $(I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$ — определить эту операцию?

При ответе на этот вопрос удобно считать, что $s_0 = e_1$.

Пусть, как всегда, $\mathbb{S}^{n-1}$ — экватор $x^n = 0$ сферы $\mathbb{S}^n$ и пусть $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ — пространство, получающееся стягиванием экватора $\mathbb{S}^{n-1}$ в точку. [По определению пространство $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ является факторпространством сферы $\mathbb{S}^n$ по отношению эквивалентности $\sim$, в котором $x \sim y$ тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$.]

Задача 18. Покажите, что пространство $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ естественно гомеоморфно подмножеству $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ прямого произведения $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$, состоящему из пар (x, y), $x, y \in \mathbb{S}^n$, в которых хотя бы одна компонента x или y совпадает с $e_1 = s_0$ (*«координатному кресту»*). [Наглядно $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ является объединением двух экземпляров сферы $\mathbb{S}^n$ со склеенными точками e_1.]

Поэтому отображение факторизации $\mu\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ мы можем считать отображением

$$\mu\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n. \tag{12}$$

Пространство $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ называется *букетом*.

Для любых отображений $f, g\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$ мы обозначим через $f \vee g$ отображение $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$, совпадающее с отображением f на одной сфере букета $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ и с отображением g — на другой. (Формально это отображение определяется равенствами

$$(f \vee g)(x, s_0) = f(x), \quad (f \vee g)(s_0, y) = g(y), \quad x, y \in \mathbb{S}^n.)$$

Задача 19. Покажите, что *в группе* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *имеет место равенство*

$$[f]^\bullet + [g]^\bullet = [(f \vee g) \circ \mu]^\bullet.$$

Это отвечает на поставленный выше вопрос.

Так как каждое пунктированное отображение $(\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$ является непунктированным отображением $\mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$

и, аналогично, каждая пунктированная гомотопия — непунктированной гомотопией, то, поставив в соответствие каждому элементу $[f]^{\bullet}$ группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ непунктированный гомотопический класс $[f]$, мы корректно определим некоторое отображение

$$\pi_n(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_n\mathscr{X}, \tag{13}$$

где, как и выше, $\pi_n\mathscr{X} = [\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]$ — множество обычных (непунктированных) гомотопических классов отображений $\mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$.

Задача 20. Покажите, что *если пространство $\mathscr{X}$ линейно связно, то отображение* (13) *надъективно.* [Указание. Для любого отображения $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$ отображение $\{f, u\}\circ r\colon \mathbb{S}^n\times \boldsymbol{I} \to \mathscr{X}$, где r — ретракция цилиндра $\mathbb{S}^n\times\boldsymbol{I}$ на его подмножество $A = (\mathbb{S}^n\times 0)\cup\{\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{I}\}$, u — произвольный путь в $\mathscr{X}$, соединяющий точку $f(\boldsymbol{s}_0)$ с точкой x_0, а $\{f, u\}$ — отображение $A \to \mathscr{X}$, заданное формулой

$$\{f, u\}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \text{если } t = 0, \\ u(\boldsymbol{t}), & \text{если } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}_0, \end{cases}$$

является гомотопией $\mathbb{S}^n\times\boldsymbol{I} \to \mathscr{X}$, связывающей отображение f с некоторым пунктированным отображением $f_1\colon (\mathbb{S}^n, \boldsymbol{s}_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$. Поэтому нужно лишь построить хотя бы одну ретракцию r.]

Задача 21. Покажите, что *для любых точек x_0, x_1 линейно связного пространства $\mathscr{X}$ группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ и $\pi_n(\mathscr{X}, x_1)$ изоморфны.* [Указание. Изоморфизм зависит от пути u, соединяющего точку x_1 с точкой x_0, и ставит в соответствие каждому элементу $[f]^{\bullet}\in\pi_n(\mathscr{X}, x_1)$ конечное отображение f_1 гомотопии $\{f, u\}\circ r$, построенной в указании к задаче 20.]

Задача 22. Покажите, что *изоморфизмы $\pi_n(\mathscr{X}, x_1) \to \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, отвечающие гомотопным путям u, одинаковы.* [Указание. Используйте тот же прием, заменив $\mathbb{S}^n$ на $\mathbb{S}^n\times\boldsymbol{I}$ и приняв за A подмножество $(\mathbb{S}^n\times\boldsymbol{I}\times\{0\})\cup(\mathbb{S}^n\times\boldsymbol{I}\times\{1\})\cup(\mathbb{S}^n\times\{0\}\times\boldsymbol{I})\cup(\{\boldsymbol{s}_0\}\times\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{I})$ произведения $\mathbb{S}^n\times\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{I}$.]

В частности, отсюда следует, что любой элемент $\xi\in\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ определяет некоторый автоморфизм

$$\xi^{\#}\colon \pi_n(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_n(\mathscr{X}, x_0), \qquad n \geqslant 1,$$

группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

Задача 23. Покажите, что это задает *действие* группы $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ на группе $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 1$ (гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ в группу автоморфизмов группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 1$).

Задача 24. Покажите, что при $n=1$ автоморфизм $\xi^\#$ является внутренним автоморфизмом $\alpha \mapsto \xi\alpha\xi^{-1}$ группы $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$, отвечающим элементу ξ.

По построению, если $\beta = \xi^\#\alpha$, где α, $\beta \in \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, и если $\alpha = [f]^\bullet$, $\beta = [g]^\bullet$, где f, g: $(\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$, то отображения f, g связаны гомотопией F: $\mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$, обладающей тем свойством, что петля

$$u\colon t \mapsto F(s_0, t), \qquad t \in I,$$

принадлежит классу ξ. В частности, это означает, что при $\beta = \xi^\#\alpha$ элементы α и β склеиваются отображением (13) (имеют один и тот же образ).

Задача 25. Покажите, что если, обратно, пунктированные отображения f, g: $(\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$ связаны некоторой гомотопией F: $\mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$, то

$$\beta = \xi^\#\alpha, \tag{14}$$

где $\xi \in \pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ — класс петли $t \mapsto F(s_0, t)$ и где α, $\beta \in \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ — классы отображений f, g.

Таким образом, *два элемента* α, $\beta \in \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *тогда и только тогда склеиваются отображением* (13), *когда для некоторого элемента* $\xi \in \pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ *имеет место равенство* (14) (т. е. когда элементы α, β принадлежат одной орбите действия группы $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ на группе $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

Определение 3. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *абелевым* (или *гомотопически простым*), если

а) оно линейно связно;

б) для любого $n \geqslant 1$ отображение (13) инъективно (и, следовательно, биективно). [Из утверждения задачи 21 вытекает, что если отображение (13) инъективно при одном выборе точки x_0, то оно инъективно и при любом другом; в этом смысле условие б не зависит от x_0.]

Для абелева пространства $\mathscr{X}$ (и любой точки $x_0 \in \mathscr{X}$) отображение (13) позволяет отождествить группу $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ с множеством $\pi_n\mathscr{X}$ и, следовательно, задать в $\pi_n\mathscr{X}$ операцию сложения, по отношению к которой это множество будет группой.

Группа $\pi_n\mathscr{X}$ называется *n-ой гомотопической группой абелева пространства* $\mathscr{X}$.

Подчеркнем, что сложение в группе $\pi_n\mathscr{X}$ определяется только через посредство отождествления (13), т. е. на основе выбора в $\mathscr{X}$ некоторой точки x_0 (от которой окончательный результат не зависит). Поэтому, хотя нам нужны только группы $\pi_n\mathscr{X}$, ход к ним через группы $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ неизбежен.

Заметим, что *отображение*

$$f\colon \mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$$

тогда и только тогда определяет нуль группы $\pi_n\mathscr{X}$, *когда оно продолжается до некоторого отображения* $\mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{X}$. Ср. задачу 17.

Согласно сказанному выше после задачи 25 *линейно связное пространство* $\mathscr{X}$ *тогда и только тогда абелево, когда для любого* $n \geqslant 1$ *и любой точки* $x_0 \in \mathscr{X}$ *группа* $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ *тривиально действует на группе* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

В частности, отсюда следует (см. задачу 24), что для любого абелева пространства $\mathscr{X}$ фундаментальная группа $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ абелева. Это объясняет термин «абелевы пространства».

Кроме того, так как тривиальная группа тривиально действует на любой группе, то *каждое односвязное пространство* $\mathscr{X}$ *абелево*.

Если линейно связное пространство $\mathscr{X}$ является топологической группой (или даже топологическим унитоидом) с единицей x_0, то для любого пунктированного отображения

$$f\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$$

и любой петли

$$u\colon (\dot{I}, I) \to (\mathscr{X}, x_0)$$

формула

$$F(x, t) = u(t) f(x), \qquad x \in \mathbb{S}^n, \quad t \in I,$$

определяет гомотопию $F\colon \mathbb{S}^n \times I \to \mathscr{X}$, для которой $u(t) = F(s_0, t)$, $t \in I$, и которая связывает отображение f с самим собой. Поэтому (см. задачу 25) в группе $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ имеет место равенство $\alpha = \xi^{\#}\alpha$, где $\alpha = [f]^{\bullet}$, $\xi = [u]$. Таким образом, группа $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ тривиально действует на группах $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 1$, и, значит, *пространство* $\mathscr{X}$ *абелево*.

Таким образом, класс абелевых пространств содержит все линейно связные односвязные пространства и все линейно связные топологические группы (и даже все линейно связные унитоиды).

Тем самым начальный этап нашей программы доказательства предложения 1 успешно выполнен: определен класс пространств, содержащий все линейно связные односвязные пространства и все линейно связные топологические группы, и для любого пространства $\mathscr{X}$ этого класса и любого $n \geqslant 1$ на множестве $\pi_n\mathscr{X}$ введена операция сложения, относительно которой это множество является абелевой группой.

Осталось доказать утверждения **а**—**ж**. Мы займемся этим в следующей лекции.