Лекция 26

Гомотопическая последовательность расслоения. — Группы $\pi_n\mathbb{S}^m$ при $n < m$. — Стабилизация групп $\pi_n SO(m)$. — Классификация отображений многообразий в сферы. — Теоремы Урысона и Титце. — Связность группы $\mathrm{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$. — Доказательство теоремы Хопфа о продолжении.

Наша ближайшая цель будет состоять в доказательстве утверждений **а**—**ж** предыдущей лекции.

Впрочем, что касается утверждений **а** и **б**, то в лекции 25 уже были доказаны их аналоги для общего случая пунктированных пространств, и ясно, что утверждения **а** и **б** являются их непосредственными следствиями.

Утверждение **в** мы докажем в более общем контексте произвольных расслоений в смысле Гуревича, т. е. (см. лекцию 2) непрерывных отображений $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$, обладающих связностью (непрерывным отображением s, которое каждой паре (e_0, u), где e_0 — точка пространства $\mathscr{E}$, а $u: I \to \mathscr{B}$ — такой путь пространства $\mathscr{B}$, что $p(e_0) = u(0)$, ставит в соответствие путь $s(e_0, u)$ пространства $\mathscr{E}$, начинающийся в точке e_0 и накрывающий путь u, т. е. такой, что $p \circ s(e_0, u) = u$).

Задача 1 (ср. замечание 2 лекции 2). Докажите, что *проекция $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ любого локального тривиального расслоения $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$, база $\mathscr{B}$ которого представляет собой хаусдорфово компактное (или даже паракомпактное) пространство, является расслоением в смысле Гуревича.* [Указание. Рассмотрите сначала случай, когда база $\mathscr{B}$ покрывается двумя тривиализирующими окрестностями.]

В частности, *расслоением в смысле Гуревича является каждое факторотображение $\mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H}$, где $\mathscr{G}$ — группа Ли, а $\mathscr{H}$ — ее замкнутая подгруппа.*

Мы будем применять это утверждение только к расслоениям вида $SO(n+m) \to SO(n+m)/SO(n)$ при $m=1$ и $m=2$. Поэтому, собственно говоря, достаточно доказать его лишь для этих расслоений (что, впрочем, по-видимому, нисколько не легче).

Итак, пусть $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ — произвольное расслоение в смысле Гуревича со связностью s. Выбрав в $\mathscr{E}$ точку e_0, положим $b_0 = p(e_0)$ и $\mathscr{F} = p^{-1}(b_0)$.

Нам будет удобно, выбрав некоторый гомеоморфизм $(\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \to (I^{n+1}, \dot{I}^{n+1})$ степени 1, интерпретировать элементы группы $\pi_{n+1}(\mathscr{B}, b_0)$ как гомотопические rel $\mathbb{S}^n$ классы отображений

$$(1)\qquad u\colon (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \to (\mathcal{B}, b_0)$$

(см. замечание 1 лекции 25).

Легко видеть, что *любое отображение* (1) *может быть накрыто*, т. е. существует такое непрерывное отображение $u^{\#}\colon \mathbb{B}^{n+1} \to \mathcal{E}$, что $p \circ u^{\#} = u$. (Например, записывая точки шара $\mathbb{B}^{n+1}$ в виде $t\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n$ и $t \in \boldsymbol{I}$, мы можем определить отображение $u^{\#}$ формулой

$$u^{\#}(t\boldsymbol{x}) = s(u(0), u_x)(t), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n, \ t \in \boldsymbol{I},$$

где u_x — путь $t \mapsto u(t\boldsymbol{x})$.)

Так как $u(\mathbb{S}^n) = b_0$, то $u^{\#}(\mathbb{S}^n) \subset \mathcal{F}$, т. е. ограничение $v = u^{\#}|_{\mathbb{S}^n}$ отображения $u^{\#}$ на $\mathbb{S}^n$ можно рассматривать как отображение

$$v\colon \mathbb{S}^n \to \mathcal{F}.$$

Задача 2. Покажите, что *гомотопический класс* $[v] \in \pi_n\mathcal{F}$ *отображения* v *не зависит ни от выбора отображения* u *в гомотопическом* $\operatorname{rel} \mathbb{S}^n$ *классе* $\alpha = [u]$, *ни от выбора накрывающего отображения* $u^{\#}$.

Поэтому, в предположении, что пространство $\mathcal{F}$ абелево (и, в частности, линейно связно), формула

$$\partial\alpha = [v]$$

корректно определяет некоторое отображение

$$(2)\qquad \partial\colon \pi_{n+1}(\mathcal{B}, b_0) \to \pi_n\mathcal{F}.$$

Задача 3. Докажите, что *отображение* (2) *является гомоморфизмом.*

Задача 4. Постройте отображение ∂ для не абелева пространства $\mathcal{F}$. [Указание. Оно будет в этом случае гомоморфизмом $\pi_{n+1}(\mathcal{B}, b_0) \to \pi_n(\mathcal{F}, e_0)$.]

В дальнейшем, мы для простоты будем предполагать абелевым (и, значит, линейно связным) не только пространство $\mathcal{F}$, но и каждое из пространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$. В этом случае отображение (2) будет отображением

$$\partial\colon \pi_{n+1}\mathcal{B} \to \pi_n\mathcal{E}$$

и вместе с гомоморфизмами p_* и i_*, индуцированными расслоением $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ и вложением $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, даст возможность написать бесконечную влево последовательность

$$(3)\qquad \ldots \to \pi_{n+1}\mathcal{B} \xrightarrow{\partial} \pi_n\mathcal{F} \xrightarrow{i_*} \pi_n\mathcal{E} \xrightarrow{p_*} \pi_n\mathcal{B} \to \ldots$$

групп и гомоморфизмов. Эта последовательность называется *гомотопической последовательностью* расслоения $p\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Задача 5. Докажите, что *последовательность* (3) *является точной последовательностью.* [Указание. Включения вида $\operatorname{Im} \subset \operatorname{Ker}$ очевидны. Для доказательства включения $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \partial$ в группе $\pi_n\mathscr{F}$ достаточно заметить, что если отображение $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathscr{F}$ продолжается до отображения $F\colon \mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{E}$, то $[f] = \partial[u]$, где $u = p \circ F\colon (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}) \to (\mathscr{B}, b_0)$. Аналогично, если для отображения $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathscr{E}$ отображение $p \circ f\colon \mathbb{S}^n \to \mathscr{B}$ продолжается до отображения $G\colon \mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{B}$, то, при условии, что $G(0) = b_0$, формула

$$F(\boldsymbol{x}, t) = s(f(\boldsymbol{x}), G_x)(t), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n, \quad t \in \boldsymbol{I},$$

где G_x — путь $t \mapsto G((1-t)\boldsymbol{x})$, определяет гомотопию $F\colon \mathbb{S}^n \times \boldsymbol{I} \to \mathscr{E}$, связывающую отображение f с отображением вида $\mathbb{S}^n \to \mathscr{F}$. Если для поднятия $u^\#\colon \mathbb{B}^n \to \mathscr{E}$ отображения $u\colon (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \to (\mathscr{B}, b_0)$ существует отображение $g\colon \mathbb{B}^n \to \mathscr{F}$, совпадающее с $u^\#$ на $\mathbb{S}^n$, то формула

$$f([x, t]_\varepsilon) = \begin{cases} u^\#(t\boldsymbol{x}), & \text{если } \varepsilon = +1, \\ g(t\boldsymbol{x}), & \text{если } \varepsilon = -1, \end{cases} \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n, \quad t \in \boldsymbol{I},$$

где $[\boldsymbol{x}, t]_\varepsilon$ — точка сферы $\mathbb{S}^{n+1}$, расположенная в полусфере $\varepsilon x^{n+1} \geqslant 0$ и находящаяся на меридиане экваториальной точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n$ на расстоянии $(1-t)\frac{\pi}{2}$ (измеренном по меридиану), корректно определяет непрерывное отображение $f\colon \mathbb{S}^{n+1} \to \mathscr{E}$, обладающее тем свойством, что элемент $[p \circ f]$ группы $\pi_{n+1}\mathscr{B}$ является элементом, задаваемым отображением u. Поэтому $\operatorname{Ker} p_* \subset \operatorname{Im} i_*$ в группе $\pi_n\mathscr{E}$ и $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} p^*$ в группе $\pi_{n+1}\mathscr{B}$.]

Задача 6. Докажите аналогичное утверждение для случая неабелевых $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ и $\mathscr{F}$. [Указание. См. задачу 4.]

Пусть $f\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ — морфизм расслоения $p\colon \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ в расслоение $p'\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{B}'$. По определению (см. лекцию 1) это означает, что имеет место коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{f} & \mathscr{E}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ \mathscr{B} & \xrightarrow{g} & \mathscr{B}' \end{array}$$

Ясно, что если $u^{\#}\colon \mathbb{B}^{n+1}\to\mathscr{E}$ накрывает $u\colon (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n)\to(\mathscr{B}, b_0)$, то $f\circ u^{\#}$ накрывает $g\circ u$ и отображение f индуцирует отображение (которое мы будем обозначать той же буквой f) слоя $\mathscr{F}$ расслоения $p\colon \mathscr{E}\to\mathscr{B}$ над точкой b_0 в слой $\mathscr{F}'$ расслоения $p'\colon \mathscr{E}'\to\mathscr{B}'$ над точкой $b_0'=g(b_0)$. Поэтому отображения v и v', построенные для отображений u и $u'=g\circ u$, связаны формулой $v'=f\circ v$. Но, по определению, если $\alpha=[u]$, то

$$g^*\alpha=[u'],\ \partial\alpha=[v],\ \partial(g^*\alpha)=[v'] \text{ и } f^*(\partial\alpha)=[f\circ v].$$

Этим доказано, что $\partial(g^*\alpha)=f^*(\partial\alpha)$, т. е. что *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}\mathscr{B} & \xrightarrow{\partial} & \pi_n\mathscr{F} \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_{n+1}\mathscr{B}' & \xrightarrow{\partial} & \pi_n\mathscr{F}' \end{array}$$

коммутативна.

Вместе с утверждением задачи 3 (для частного случая линейно связной группы Ли $\mathscr{G}$ и ее линейно связной замкнутой подгруппы $\mathscr{H}$) это доказывает утверждение в лекции 25.

Для доказательства утверждения **г** нам понадобится гомотопическая последовательность расслоения $\tau_{\mathbb{S}^m}=(\mathrm{SO}(m+1), p, \mathbb{S}^m)$. Эта последовательность имеет вид

$$(4)\qquad \ldots\to\pi_{n+1}\mathbb{S}^m\xrightarrow{\partial}\pi_n\mathrm{SO}(m)\xrightarrow{i_*}\pi_n\mathrm{SO}(m+1)\xrightarrow{p_*}\pi_n\mathbb{S}^m\to\ldots,$$

и, значит, чтобы ею воспользоваться, необходима информация о группах $\pi_n\mathbb{S}^m$.

Вычислим прежде всего эти группы при $n<m$.

Согласно предложению 2 лекции III.26 в каждом гомотопическом классе отображений $\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^m$ содержится гладкое отображение $f\colon \mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^m$. С другой стороны, если $n<m$, то согласно теореме Сарда (см. лекцию III.15) гладкое отображение $f\colon \mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^m$ заведомо не надъективно и, значит, может рассматриваться как отображение сферы $\mathbb{S}^n$ в проколотую сферу $\mathbb{S}^m\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, где $\boldsymbol{x}_0$ — некоторая точка, а потому и как отображение $\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}^m$ сферы $\mathbb{S}^n$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ (гомеоморфное сфере с проколом $\mathbb{S}^m\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$). Но, ясно, что каждое отображение $f\colon \mathbb{S}^n\to\mathbb{R}^m$ гомотопно постоянному отображению (скажем, в точку $\mathbf{0}$; гомотопию, связывающую последнее отображение с отображением f, можно определить формулой $F(\boldsymbol{x})=tf(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}\in\mathbb{S}^n$, $t\in\boldsymbol{I}$). Этим доказано, что *при $n<m$ каждое отобра-*

жение $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ *гомотопно постоянному,* т. е. что

$$\pi_n \mathbb{S}^m = 0 \quad \text{при} \quad n < m. \tag{5}$$

Ср. доказательство односвязности сферы $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 2$, в лекции 3.

Уже отсюда вытекают важные свойства групп $\pi_n \mathrm{SO}(m)$.

Действительно, если $n+1 < m$ (и тем более $n < m$), то согласно (5) отрезок последовательности (4) между группами $\pi_{n+1}\mathbb{S}^m$ и $\pi_n \mathbb{S}^m$ имеет вид

$$0 \to \pi_n \mathrm{SO}(m) \xrightarrow{i_*} \pi_n \mathrm{SO}(m+1) \to 0.$$

Поскольку точность такого отрезка равносильна тому, что гомоморфизм i_* является изоморфизмом, этим доказано, что *при* $n < m-1$ *гомоморфизм*

$$i_*\colon \pi_n \mathrm{SO}(m) \to \pi_n \mathrm{SO}(m+1)$$

представляет собой изоморфизм.

Таким образом, для любого $n \geqslant 1$ имеют место естественные отождествления

$$\pi_n \mathrm{SO}(n+2) = \pi_n \mathrm{SO}(n+3) = \ldots, \tag{6}$$

т. е. *группы* $\pi_n \mathrm{SO}(n+k)$ *при* $k \geqslant 2$ *стабилизируются.* Их общее значение (6) называется *n-ой стационарной* (или *стабильной*) *гомотопической группой ортогональных групп* и обозначается символом $\pi_n \mathrm{SO}$.

Группа $\pi_n \mathrm{SO}(n+1)$, предшествующая стационарным группам, называется *метастационарной группой* Так как $\pi_n \mathbb{S}^{n+1} = 0$,. то *гомоморфизм*

$$i_*\colon \pi_n \mathrm{SO}(n+1) \to \pi_n \mathrm{SO} \tag{7}$$

является эпиморфизмом.

Группы $\pi_n \mathrm{SO}$ были вычислены Боттом лет тридцать тому назад очень искусным приемом, основанным на т е о р и и М о р с а (связывающей топологические характеристики гладкого многообразия с числом и типом критических точек, заданных на $\mathscr{X}$ гладких функций). Оказалось, что *эти группы зависят только от вычета числа n по модулю* 8 (т е о р е м а п е р и о д и ч н о с т и Б о т т а) и имеют следующий вид:

$n \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
π_n SO	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

где $\mathbb{Z}$ — свободная циклическая группа, а $\mathbb{Z}/2$ — группа второго порядка.

Хотя теперь этот результат имеет и другие доказательства, не опирающиеся на теорию Морса, но все они слишком сложны, чтобы мы могли здесь их изложить. [Превосходное изложение теории Морса и первоначального доказательства Ботта теоремы о периодичности содержится в замечательной книге: Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.]

Аналогичным образом из точности гомотопической последовательности

$$\ldots \to \pi_{n+1}\mathbb{S}^{2m+1} \to \pi_n \mathrm{U}(m) \to \pi_n \mathrm{U}(m+1) \to \pi_n \mathbb{S}^{2m+1} \to \ldots$$

расслоения $\tau^{U}_{\mathbb{S}^{2m+1}} = (\mathrm{U}(m+1),\ p^U,\ \mathbb{S}^{2m+1})$ вытекает, что *при $n < 2m$ группы $\pi_n \mathrm{U}(m)$ также стабилизируются.* Эти группы обозначаются символом $\pi_n \mathrm{U}$.

Теорема периодичности Ботта для унитарных групп утверждает, что группы $\pi_n \mathrm{U}$ *зависят только от вычета числа n по модулю* 2 и потому при n четном изоморфны группе $\pi_0 \mathrm{U}(1) = \{1\}$ (см. задачу 4 лекции 25), а при n нечетном — группе $\pi_1 \mathrm{U}(1) = \pi_1 \mathbb{S}^1 = \mathbb{Z}$ (см. лекцию 3). Таким образом, согласно Ботту

$$\pi_n \mathrm{U} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Ботт вычислил также и метастационарную группу $\pi_{2m} \mathrm{U}(m)$. Оказывается, что *эта группа является циклической группой порядка $m!$*:

$$\pi_{2m} \mathrm{U}(m) = \mathbb{Z}/m!.$$

Задача 7. Пусть

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1} \subset \ldots$$

— возрастающая последовательность вложенных друг в друга топологических групп. Объединение $\mathcal{G}$ этой последовательности очевидным образом является группой. Введем в $\mathcal{G}$ топологию, считая множество $U \subset \mathcal{G}$ открытым тогда и только тогда, когда для любого $n \geq 1$ пересечение $U \cap \mathcal{G}_n$ открыто в $\mathcal{G}_n$. Проверьте, что

а) это действительно задает в $\mathcal{G}$ топологию;

б) относительно этой топологии $\mathcal{G}$ является топологической группой.

В случае $\mathcal{G}_n = \mathrm{SO}(n)$ группа $\mathcal{G}$ обозначается символом SO, а в случае $\mathcal{G}_n = \mathrm{U}(n)$ — символом U. Элементами групп SO и U можно считать бесконечные матрицы вида

$$\left\| \begin{matrix} A & & & & \text{O} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \cdot \\ \text{O} & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{matrix} \right\|,$$

где $A \in \mathrm{SO}(n)$ или $\mathrm{U}(n)$ (число n произвольно). Покажите, что *для любого $n \geqslant 1$ стационарные гомотопические группы $\pi_n \mathrm{SO}$ и $\pi_n U$ являются — с точностью до естественного изоморфизма — не чем иным, как гомотопическими группами групп* SO *и* U (что и оправдывает их обозначение).

Теперь мы должны вычислить группы $\pi_n \mathbb{S}^m$ при $n = m$. В отличие от случая $m < n$ эта задача отнюдь не тривиальна и ее решение требует большой и длительной работы.

Пусть $\mathscr{X}$ — ориентированное компактное n-мерное хаусдорфово гладкое многообразие. Согласно лекции III.26 для любого гладкого (и даже любого непрерывного) отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathbb{S}^n$ определена его степень $\deg f$, зависящая только от гомотопического класса $\alpha = [f]$ (напомним, что сферу $\mathbb{S}^n$ мы считаем естественным образом ориентированной; см. в лекции 25 текст, предшествующий задаче 15). Поэтому формула

$$\deg \alpha = \deg f$$

корректно определяет некоторое отображение

$$\deg\colon [\mathscr{X}, \mathbb{S}^n] \to \mathbb{Z}, \tag{8}$$

где $[\mathscr{X}, \mathbb{S}^n]$ — множество всех гомотопических классов непрерывных отображений $\mathscr{X} \to \mathbb{S}^n$.

Предложение 1. *Если многообразие $\mathscr{X}$ связно, то отображение* (8) *биективно.*

Доказательство. Сначала мы докажем надъективность отображения (8), а затем его инъективность.

Надъективность. Так как существуют диффеоморфизмы $\varphi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ степени -1 (таким диффеоморфизмом является, например, симметрия относительно произвольной гиперплоскости, проходящей через начало координат) и $\deg(\varphi \circ f) = -\deg f$, то для доказательства надъективности отображения (8) достаточно для любого положительного $m>0$ построить отображение $f\colon \mathscr{X}\to\mathbb{S}^n$ степени m.

Пусть $(U_1, h_1), \ldots, (U_m, h_m)$ — такие положительно ориентированные карты многообразия $\mathscr{X}$, что

1) носители $U_1, \ldots, U_m$ этих карт попарно не пересекаются;

2) каждое отображение $h_1, \ldots, h_m$ является диффеоморфизмом на шар $\mathring{\mathbb{B}}^n$.

Пусть, кроме того, $\chi\colon (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})\to(\mathbb{S}^n, s_0)$ — непрерывное отображение, являющееся диффеоморфизмом степени 1 шара $\mathbb{B}^n$ на проколотую сферу $\mathbb{S}^n\setminus\{s_0\}$ (см. задачу 15 и замечание 1 лекции 25). Тогда формула

$$f(p)=\begin{cases}(\chi\circ h_i)(p), & \text{если } p\in U_i,\ i=1, \ldots, m,\\ s_0, & \text{если } p\notin U_1\cup\ldots\cup U_m,\end{cases}$$

будет корректно определять гладкое отображение $f\colon \mathscr{X}\to\mathbb{S}^n$, обладающее следующими свойствами:

а. Точка $x_0=\chi(0)$ является регулярным значением отображения f.

б. Прообраз $f^{-1}(x_0)$ этой точки состоит из m точек

$$p_1=h_1^{-1}(0), \ \ldots, \ p_m=h_m^{-1}(0).$$

в. Для любого $i=1, \ldots, m$ дифференциал $(df)_{p_i}$ отображения f в точке p_i является сохраняющим ориентации невырожденным линейным отображением $\mathbf{T}_{p_i}\mathscr{X}\to\mathbf{T}_{x_0}\mathbb{S}^n$ ориентированных линейных пространств (якобиан отображения f в точке p_i положителен).

Поэтому согласно предложению 1 лекции III.26 степень отображения f равна m.

Заметим, что связность многообразия $\mathscr{X}$ мы здесь никак не использовали.

Инъективность. В свете результатов лекции III.26 для доказательства инъективности отображения (8) достаточно доказать, что *гладкие отображения* $f, g\colon \mathscr{X}\to\mathbb{S}^n$ *одной и той же степени гомотопны*, т. е. существует непрерывное отображение

$$F\colon \mathscr{X}\times\boldsymbol{I}\to\mathbb{S}^n, \qquad \boldsymbol{I}=[0, 1],$$

многообразия $\mathscr{D}=\mathscr{X}\times\boldsymbol{I}$ с краем $\partial\mathscr{D}=(\mathscr{X}\times 0)\sqcup(\mathscr{X}\times 1)$ в сферу $\mathbb{S}^n$, совпадающее на $\partial\mathscr{D}$ с отображением $(f,g)\colon \partial\mathscr{D}\to\mathbb{S}^n$, определенным формулой

$$(f, g)(p, t)=\begin{cases} f(p), & \text{если } t=0,\\ g(p), & \text{если } t=1,\end{cases} \quad p\in\mathscr{X}.$$

Имея это в виду, мы заметим, что все карты вида

$$(U\times I,\ h\times \mathrm{id})=(U\times I,\ x^1,\ \ldots,\ x^n,\ t),$$

где $(U,\ h)=(U,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathscr{X}$, очевидным образом положительно согласованы и покрывают все многообразие $\mathscr{D}=\mathscr{X}\times I$, т. е. составляют ориентирующий атлас этого многообразия. Поэтому они определяют на $\mathscr{D}$ некоторую ориентацию.

Эту ориентацию многообразия $\mathscr{D}$ мы обозначим через $\mathfrak{o}$ при n четном и через $-\mathfrak{o}$ при n нечетном. (Таким образом, $\mathfrak{o}$ — это ориентация, задаваемая при любом n атласом $\{(U\times I,\ t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)\}$.)

Согласно общей конструкции из лекции III.27 ориентация $\mathfrak{o}$ индуцирует ориентацию края $\partial\mathscr{D}$ многообразия $\mathscr{D}=$ $=\mathscr{X}\times I$ и, значит, ориентации его компонент $\mathscr{X}\times 0$ и $\mathscr{X}\times 1$.

Задача 8. Покажите, что *на многообразии* $\mathscr{X}\times 1$ (*естественным образом отождествленном с* $\mathscr{X}$) *ориентация* $\mathfrak{o}$ *индуцирует данную ориентацию многообразия* $\mathscr{X}$, *а на многообразии* $\mathscr{X}\times 0$ — *противоположную.*

В условной, но наглядной записи

$$\partial(\mathscr{X}\times I)=\mathscr{X}\times 1-\mathscr{X}\times 0. \tag{9}$$

Поскольку многообразие $\partial(\mathscr{X}\times I)$ ориентировано, определена степень $\deg(f,g)$ отображения (f,g). А так как каждое регулярное значение x_0 отображения (f,g) является, очевидно, регулярным значением отображений f и g, причем

$$(f,\ g)^{-1}(x_0)=(f^{-1}x_0\times 0)\sqcup(g^{-1}x_0\times 1),$$

то в силу предложения 1 лекции III.26 из (9) немедленно вытекает, что *степень отображения* (f,g) *равна разности степеней отображений* f *и* g:

$$\deg(f,g)=\deg g-\deg f.$$

Следовательно, в силу условия $\deg f=\deg g$ эта степень равна нулю.

Поэтому инъективность отображения (8) является непосредственным следствием доказываемого ниже предложения 2. □

Задача 9. Пусть $\mathscr{X}$ — ориентированное компактное n-мерное связное хаусдорфово многообразие с краем $\partial\mathscr{X}\neq\varnothing$ и пусть $[(\mathscr{X},\ \partial\mathscr{X}),\ (\mathbb{S}^n,\ s_0)]$ — множество всех гомотопических $\mathrm{rel}\,\partial\mathscr{X}$ классов непрерывных отображений

$(\mathscr{X}, \partial\mathscr{X}) \to (\mathbb{S}^n, s_0)$. Определите отображение

$$\deg\colon [(\mathscr{X}, \partial\mathscr{X}), (\mathbb{S}^n, s_0)] \to \mathbb{Z} \tag{10}$$

и докажите, что в случае, когда край $\partial\mathscr{X}$ многообразия $\mathscr{X}$ диффеоморфен сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, *отображение* (10) *биективно*. [Указание. При заклеивании края $\partial\mathscr{X}$ шаром $\mathbb{B}^n$ получается n-мерное многообразие без края, к которому применимо предложение 1.]

Замечание 1. Из утверждения задачи 9 немедленно следует, что *все отображения* $\chi\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathbb{S}^n, s_0)$ *степени* 1 *гомотопны* $\operatorname{rel} \dot{I}^n$ (определяют один и тот же элемент группы $\pi_n(\mathbb{S}^n, s_0)$).

См. замечание 2 лекции 25.

Задача 10. Докажите, что *отображение* (10) *всегда биективно* (для любых связных многообразий $\mathscr{X}$ с произвольным краем $\partial\mathscr{X}$).

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{D}$ — связное $(n+1)$-мерное хаусдорфово паракомпактное многообразие с краем $\partial\mathscr{D} \neq \varnothing$ и пусть*

$$f\colon \partial\mathscr{D} \to \mathbb{S}^n$$

— такое собственное гладкое отображение, что

$$\deg f = 0.$$

Тогда существует непрерывное отображение $F\colon \mathscr{D} \to \mathbb{S}^n$, являющееся продолжением отображения f, т. е. такое, что

$$f = F|_{\partial\mathscr{D}}.$$

Это предложение известно как теорема Хопфа о продолжении.

Его доказательство, хотя, как мы увидим, идейно очень простое, требует некоторых общетопологических конструкций, интересных и важных самих по себе.

Пусть $\mathscr{X}$ — нормальное хаусдорфово топологическое пространство и пусть W и V — такие его открытые подмножества, что $\overline{W} \subset V$.

Лемма 1. *Существует непрерывная функция $f\colon \mathscr{X} \to I$, $I = [0, 1]$, равная единице на $\overline{W}$ и нулю вне V.*

Эта лемма называется теоремой Урысона (а также — большой леммой Урысона). Мы уже упоминали ее в замечании 4 лекции III.24. Предусмотренная леммой 1 функция f называется *функцией Урысона* пары

(V, W); ср. определение 1 лекции III.14. Заметим, что, вообще говоря, не требуется, чтобы множество всех точек, в которых функция f равна единице (нулю), совпадало с $\overline{W}$ (с $\mathscr{X}\setminus V$).

В случае когда пространство $\mathscr{X}$ метризуемо, функцию Урысона f можно определить формулой

$$f(x)=\frac{\rho(x, \mathscr{X}\setminus V)}{\rho(x, \overline{W})+\rho(x, \mathscr{X}\setminus V)}, \qquad x\in\mathscr{X}, \tag{11}$$

где ρ — метрика в $\mathscr{X}$, а $\rho(x, C)$ — для любого замкнутого множества $C\subset\mathscr{X}$ — расстояние

$$\rho(x, C)=\inf_{y\in C}\rho(x, y)$$

от точки x до множества C. (Для функции (11) равенство $f(x)=1$ имеет место тогда, и только тогда, когда $x\in\overline{W}$.) Таким образом, *для метризуемого пространства $\mathscr{X}$ теорема Урысона очевидна.* Поскольку случай метризуемого пространства $\mathscr{X}$ охватывает, в принципе, все приложения (согласно — очень трудной! — теореме Стоуна, *любое паракомпактное хаусдорфово пространство метризуемо*), доказывать теорему Урысона в общем случае мы не будем.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{X}$ — хаусдорфово нормальное пространство и C — его замкнутое подмножество. Тогда любое непрерывное отображение $f\colon C\to\mathbb{R}^n$ множества C в пространство $\mathbb{R}^n$ может быть продолжено на все $\mathscr{X}$, т. е. существует такое непрерывное отображение $F\colon \mathscr{X}\to\mathbb{R}^n$, что*

$$f=F|_C.$$

Доказательство. Ясно, что лемму 2 достаточно доказать лишь при $n=1$ (при любом n нужно применить эту лемму к каждой компоненте отображения f) и лишь в предположении, что $|f|<1$ (ось $\mathbb{R}$ гомеоморфна интервалу $(-1, 1)$).

По индукции мы определим на C функции f_n, $n\geqslant 1$, полагая $f_0=f$ и

$$f_{n+1}=f_n+\frac{2^n}{3^{n+1}}(2g_n-1),$$

где g_n — функция Урысона пары

$$\left(\left[f_n<\frac{2^n}{3^{n+1}}\right], \ \left[f_n<-\frac{2^n}{3^{n+1}}\right]\right)$$

или, точнее, ограничение этой функции на C. (Символом $[f<a]$, где f — функция, а a — число, мы обозначаем множество всех точек, в которых значение функции f меньше a.)

Задача 11. Докажите по индукции, что

$$|f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{для любой точки } x \in \mathscr{X}.$$

[Указание. При $f_n(x) \leqslant -\frac{2^n}{3^{n+1}}$ имеет место равенство $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{2^n}{3^{n+1}}$, а при $f_n(x) \geqslant \frac{2^n}{3^{n+1}}$ — равенство $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{2^n}{3^{n+1}}$.]

Таким образом, $f_n \to 0$ равномерно на C.

Пусть

$$F_n = -\frac{2^n}{3^{n+1}}(2g_n - 1).$$

Так как $|F_n| \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}}$, а числовой ряд с общим членом $\frac{2^n}{3^{n+1}}$, очевидно, сходится, то функциональный ряд

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n + \ldots$$

сходится всюду на $\mathscr{X}$ и его сумма F является непрерывной функцией. Поскольку же на C частная сумма $F_0 + F_1 + \ldots + F_n$ последнего ряда равна, очевидно, $f_0 - f_n = f - f_n$, то $F = f$ на C. $\square$

Лемма 2 называется обычно **теоремой Титце** (который впервые доказал ее в случае, когда пространство $\mathscr{X}$ метризуемо; общий случай принадлежит Урысону). Заметим, что в ее доказательстве используется теорема Урысона. Поэтому, собственно говоря, эта теорема доказана нами только для метризуемых пространств $\mathscr{X}$ (в случае Титце).

Нам понадобится еще одна лемма, относящаяся к диффеоморфизмам пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\operatorname{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ — группа всех сохраняющих ориентацию (имеющих степень 1) диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, оставляющих на месте точку $\mathbf{0}$.

Лемма 3. *Для любого диффеоморфизма $h \in \operatorname{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ существует такая гомотопия*

(12) $$H\colon \mathbb{R}^n \times \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^n,$$

что

а) *для каждого* $t\in I$ *отображение*

$$h_t\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ x\mapsto H(x,\ t),\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

принадлежит группе $\mathrm{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$ (*и, в частности, оставляет на месте точку* 0);

б) *имеют место равенства*

$$h_0=\mathrm{id},\quad h_1=h.$$

[При соответствующей топологизации группы $\mathrm{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$ отображение $t\mapsto h_t$ будет в этой группе путем, соединяющим ее единицу id с элементом h. Таким образом, лемма 1 утверждает, что *группа* $\mathrm{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$ *линейно связна.*]

Доказательство. Поскольку подгруппа $\mathrm{GL}^+(n;\mathbb{R})$ группы $\mathrm{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$ линейно связна (см. лекцию III.11), для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что в группе $\mathrm{Diff}_0^+\mathbb{R}$ существует путь (12), соединяющий деффеоморфизм h с его дифференциалом $A=(dh)_0$ в точке 0 (являющимся в силу отождествления $\mathrm{T}_0\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n$ и равенства $h(0)=0$ сохраняющим ориентацию линейным отображением $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$)

По определению

$$h(x)=Ax+s(x)\,x,\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $s\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$—такое гладкое отображение, что $s(0)=0$. Поэтому при $t\neq0$

$$t^{-1}h(tx)=Ax+s(tx)\,x.$$

Поскольку $s(0)=0$, это показывает, что формула

$$H(x,\ t)=\begin{cases} t^{-1}h(tx), & \text{если}\quad t\neq0,\\ Ax, & \text{если}\quad t=0,\end{cases}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in I$, определяет такое непрерывное (даже гладкое) отображение (12), что $h_0=A$ и $h_1=h$. Для завершения доказательства осталось заметить, что для любого $t=0$ отображение $h_t\colon x\mapsto t^{-1}h(tx)$ принадлежит, очевидно, группе $\mathrm{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$. □

Поскольку открытый шар $\mathring{\mathbb{B}}^n$ диффеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$, лемма 3 справедлива и для группы $\mathrm{Diff}_0^+\mathring{\mathbb{B}}^n$ всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $\mathring{\mathbb{B}}^n\to\mathring{\mathbb{B}}^n$, оставляющих на месте точку 0.

Теперь у нас уже все готово для доказательства предложения 2.

Доказательство предложения 2. Условие $\deg f = 0$ означает, что прообраз $f^{-1}x_0$ некоторой точки $x_0 \in \mathbb{S}^n$ состоит из четного числа точек, в одной половине которых якобиан отображения f положителен, а в другой отрицателен.

Задача 12. Докажите, что существуют

а) непересекающиеся вложенные дуги Q_i, соединяющие в $\mathcal{D}$ каждую точку первого типа с некоторой точкой второго типа, целиком, за исключением концов, лежащие во внутренности $\mathring{\mathcal{D}}$ многообразия $\mathcal{D}$, а в концах не касающиеся края $\partial\mathcal{D}$;

б) их непересекающиеся окрестности U_i («трубки вдоль Q_i»);

в) диффеоморфизмы

$$\varphi_i\colon \mathring{\mathbb{B}}^n \times I \to U_i,$$

отображающие отрезок $0 \times I$ на дугу Q_i, а край $(\mathring{\mathbb{B}}^n \times 0) \cup \cup (\mathring{\mathbb{B}}^n \times 1)$ произведения $\mathring{\mathbb{B}}^n \times I$ — на пересечение $U_i \cap \partial\mathcal{D}$, и такие, что для каждого i множества

$$V_i^{(0)} = \varphi_i(\mathbb{R}^n \times 0), \quad V_i^{(1)} = \varphi_i(\mathbb{R}^n \times 1)$$

являются окрестностями (в $\partial\mathcal{D}$) концов дуги Q_i, диффеоморфно отображающимися посредством f на некоторую окрестность W_i точки x_0.

По условию, якобианы диффеоморфизмов $f|_{V_i^{(0)}}$ и $f|_{V_i^{(1)}}$ имеют противоположные знаки. Так как диффеоморфизмы $\varphi_i|_{\mathring{\mathbb{B}}^n \times 0}$ и $\varphi_i|_{\mathring{\mathbb{B}}^n \times 1}$ также обладают этим свойством, то якобиан диффеоморфизма $h_i\colon \mathring{\mathbb{B}}^n \to \mathring{\mathbb{B}}^n$, определенного формулой

$$h_i = \left(\varphi_i|_{\mathring{\mathbb{B}}^n \times 0}\right)^{-1} \circ \left(f|_{V_i^{(0)}}\right)^{-1} \circ \left(f|_{V_i^{(1)}}\right) \circ \left(\varphi_i|_{\mathring{\mathbb{B}}^n \times 1}\right),$$

положителен (мы отождествляем здесь $\mathring{\mathbb{B}}^n \times 0$ и $\mathring{\mathbb{B}}^n \times 1$ с $\mathring{\mathbb{B}}^n$). Кроме того, по построению $h_i(0) = 0$. Следовательно, $h_i \in \mathrm{Diff}_0^+ \mathring{\mathbb{B}}^n$, и потому в $\mathrm{Diff}_0^+ \mathring{\mathbb{B}}_0^n$ существует путь

$$H_i\colon \mathring{\mathbb{B}}^n \times I \to \mathring{\mathbb{B}}^n,$$

соединяющий id с h_i. Пользуясь этим, мы определим на окрестности $U = \bigcup U_i$ замкнутого множества $Q = \bigcup Q_i$ отображение $g\colon U \to \mathbb{S}^n$, задав его на U_i формулой

$$g|_{U_i} = \left(f|_{V_i^{(0)}}\right) \circ \left(\varphi_i|_{\mathring{\mathbb{B}}^n \times 0}\right) \circ H_i \circ \varphi_i^{-1}.$$

Отображение g непрерывно, совпадает на $U \cap \partial\mathscr{D} = \bigcup (V_i^{(0)} \cup V_i^{(1)})$ с отображением f и обладает тем свойством, что $g^{-1}(x_0) = Q$.

Пусть V — такая окрестность множества Q, что $\overline{V} \subset U$ (можно, например, положить $V = \bigcup \varphi_i(\mathbb{B}^n_{1/2} \times I)$) и пусть $C = \overline{V} \cup \partial\mathscr{D}$. Ясно, что формула

$$F_1(p) = \begin{cases} g(p), & \text{если } p \in \overline{V}, \\ f(p), & \text{если } p \in \partial\mathscr{D}, \end{cases}$$

определяет непрерывное отображение F_1: $C \to \mathbb{S}^n$, являющееся продолжением отображения f: $\partial\mathscr{D} \to \mathbb{S}^n$.

Согласно теореме Дьедоине (см. замечание 4 лекции III.24) многообразие $\mathscr{D}$ нормально. Более того, будучи связным и паракомпактным, оно удовлетворяет второй аксиоме счетности (замечание 2 лекция III.24) и потому (теорема 1 лекции III.14) вложимо в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, $\mathscr{D}$ даже метризуемо. [Теорему Дьедонне мы не доказывали, а теорема 1 лекции III.14 была у нас доказана только для компактных многообразий без края. Поэтому, собственно говоря, здесь в нашем рассуждении имеется лакуна. Однако, при $\mathscr{D} = \mathscr{X} \times I$, где $\mathscr{X}$ — компактное многообразие без края, все полностью обосновано.]

Имея это в виду, мы рассмотрим ограничение

$$F' = F_1|_{C \setminus V}$$

отображения F_1 на замкнутом множестве $C \setminus V \subset D \setminus V$. Ясно, что это отображение не задевает точку x_0, т. е. является отображением в $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$. Так как проколотая сфера $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^n$, то в силу теоремы Титце (согласно сказанному выше здесь применимой) отображение F' может быть продолжено до некоторого непрерывного отображения

$$F_2\colon\ \mathscr{D} \setminus V \to \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}.$$

Положив

$$F(p) = \begin{cases} F_1(p), & \text{если } p \in C, \\ F_2(p), & \text{если } p \in \mathscr{D} \setminus V, \end{cases}$$

мы, очевидно, и получим требуемое продолжение F: $\mathscr{D} \to \mathbb{S}^n$ отображения f. $\square$

Доказав предложение 2, мы тем самым завершили и доказательство предложения 1.