Лекция 27

Группа $\pi_n \mathbb{S}^n$.— Теорема о характеристическом классе.— Ее обобщение.— Гомотопические группы накрывающего пространства.— Расслоение Хопфа и группа $\pi_3 \mathbb{S}^2$.— Группы $\pi_{n+1}\mathbb{S}^n$.— Операция $\circ$ в гомотопических группах сфер.— Вычисление гомотопического класса отображения $p^{U'} \circ T^U_{n+1}$.—Связь с $K_{\mathbb{C}}$-группами.

При $\mathscr{X} = \mathbb{S}^n$ множество $[\mathscr{X}, \mathbb{S}^n]$ является группой $\pi_n\mathbb{S}^n$ и, следовательно, отображение (8) лекции 26 — отображением

$$\deg\colon \pi_n\mathbb{S}^n \to \mathbb{Z} \tag{1}$$

групп.

Задача 1. Докажите, что *отображение* (1) *представляет собой изоморфизм.*

Таким образом, мы видим, что *группа $\pi_n\mathbb{S}^n$ является свободной циклической группой.*

Пусть ι_n — гомотопический класс [id] тождественного отображения $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Так как $\deg \iota_n = 1$, то *элемент ι_n служит образующей группы $\pi_n\mathbb{S}^n$.*

При интерпретации элементов группы $\pi_n\mathbb{S}^n$ как гомотопических rel $\dot{I}^n$ классов отображений $(I^n, \dot{I}^n) \to (\mathbb{S}^n, s_0)$ элемент ι_n будет классом $[\chi]$ отображения χ из задачи 15 лекции 25.

Таким образом, в гомотопической последовательности

$$\ldots \to \pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1} \xrightarrow{\partial} \pi_n \mathrm{SO}(n+1) \xrightarrow{i_*} \pi_n \mathrm{SO} \to 0,$$
$$\pi_n \mathrm{SO} = \pi_n \mathrm{SO}(n+2)$$

расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}} = (\mathrm{SO}(n+2), p, \mathbb{S}^{n+1})$ группа $\pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1}$ является свободной циклической группой с образующей ι_{n+1}, а ядро эпиморфизма $i_*\colon \pi_{n+1}\mathrm{SO}(n+2) \to \pi_n \mathrm{SO}$ порождается элементом $\partial\iota_{n+1}$.

Предложение 1. *Элемент $\partial\iota_{n+1}$ является характеристическим классом расслоения $\tau_{\mathbb{S}^{n+1}}$, т. е.*

$$\partial\iota_{n+1} = [T_{n+1}],$$

где $T_{n+1}\colon \mathbb{S}^n \to \mathrm{SO}(n+1)$ — характеристическое отображение.

Доказательство. В соответствии с замечанием 1 лекции 25 для любого пунктированного топологического пространства $(\mathscr{X}, x_0)$ элементами группы $\pi_{n+1}(\mathscr{X}, x_0)$ можно считать не только гомотопические $\operatorname{rel} s_0$ классы $[f]$ непрерывных отображений $f\colon (\mathbb{S}^{n+1}, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$, где s_0 — некоторая фиксированная точка сферы $\mathbb{S}^{n+1}$ (в лекции 25 мы считали, что $s_0 = e_1$; однако можно, например, за s_0 принять точку e_{n+1}), но и гомотопические классы $\operatorname{rel} \mathbb{S}^n$ непрерывных отображений $g\colon (\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \mathbb{S}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$, где $\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}$ — полусфера $x^{n+1} \leqslant 0$ сферы $\mathbb{S}^{n+1}$, а $\mathbb{S}^n$ — ее край (экватор сферы $\mathbb{S}^{n+1}$). При этом, если элемент $\alpha \in \pi_{n+1}(\mathscr{X}, x_0)$ задается отображением $f\colon (\mathbb{S}^{n+1}, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$, то он же будет задаваться отображением $g = f \circ \chi\colon (\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \mathbb{S}^n) \to$ $\to (\mathscr{X}, x_0)$, где χ — произвольное отображение $(\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \mathbb{S}^n) \to$ $\to (\mathbb{S}^{n+1}, s_0)$, гомеоморфно и с сохранением ориентации отображающее открытую полусферу $\mathring{\mathbb{E}}^{n+1}_{(-)} = \mathbb{E}^{n+1}_{(-)} \setminus \mathbb{S}^n$ на проколотую сферу $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{s_0\}$.

В частности, все это верно, когда $\mathscr{X} = \mathbb{S}^{n+1}$ и $x_0 = s_0 =$ $= e_{n+1}$. При этом образующей ι_{n+1} группы $\pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1} =$ $= \pi_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}, s_0)$ будет как раз гомотопический класс $[\chi]$ отображения χ. Поэтому (см. конструкцию гомоморфизма ∂ в лекции 26), чтобы построить отображение $\mathbb{S}^n \to SO(n+1)$ класса $\partial\iota_{n+1}$, надо построить отображение

$$\chi'\colon (\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \mathbb{S}^n) \to (SO(n+2), SO(n+1)),$$

накрывающее отображение χ (т. е. такое, что $p \circ \chi' = \chi$) и ограничить его на $\mathbb{S}^n$:

$$\partial\iota_{n+1} = [\chi'|_{\mathbb{S}^n}]. \tag{2}$$

Имея это в виду, мы примем за χ отображение

$$(\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \mathbb{S}^n) \to (\mathbb{S}^{n+1}, e_{n+1}), \tag{3}$$

оставляющее на месте вектор $-e_{n+1}$ и переводящее любой другой вектор $x \in \mathbb{E}^{n+1}_{(-)}$ в вектор $\chi(x) \in \mathbb{S}^{n+1}$, принадлежащий плоскости векторов x, e_{n+1} и образующий с вектором $-e_{n+1}$ вдвое больший угол (отображение χ двигает каждую точку полусферы $\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}$, отличную от полюса $-e_{n+1}$, по ее меридиану, вдвое увеличивая расстояние от полюса; ясно, что это отображение обладает всеми требуемыми свойствами). Отображение χ' мы определим формулами

$$\chi'(x) = \begin{cases} s_{(-)}(\chi(x)), & \text{если } \chi(x) \in \mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \\ s_{(+)}(\chi(x))\, T_{n+1}(\chi_0(x)), & \text{если } \chi(x) \in \mathbb{E}^{n+1}_{(+)}, \\ & \qquad x \in \mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \end{cases} \tag{4}$$

где $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$ — построенные в лекции 25 сечения, а $\chi_0(x)$ — точка пересечения проходящего через точку $x \neq -e_{n+1}$

меридиана с экватором $\mathbb{S}^n$. [Заметим, что включение $\chi(x)\in\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}$ в точности означает, что расстояние по меридиану от полюса $-e_{n+1}$ до точки x не превосходит $\pi/4$, а включение $\chi(x)\in\mathbb{E}^{n+1}_{(+)}$ — что это расстояние не меньше $\pi/4$ (и не больше $\pi/2$).]. Так как для точек x с $\chi(x)\in\mathbb{S}^n$ имеет место равенство $\chi(x)=\chi_0(x)$ (и так как $s_{(-)}=s_{(+)}T_{n+1}$), то формула (4) корректно определяет непрерывное отображение χ'. Поскольку $p(s_{(+)}(\chi(x))\,T_{n+1}(\chi_0(x)))=$ $=p(s_{(+)}(\chi(x)))=\chi(x)$ и $p(s_{(-)}(\chi(x)))=\chi(x)$, отображение χ' накрывает отображение χ, а поскольку $\chi(x)=e_{n+1}$ при $x\in\mathbb{S}^n$ и $s_{(+)}(e_{n+1})=\boldsymbol{R}(e_{n+1}, e_{n+1})=\mathrm{id}$ (см. лекцию 25), ограничение $\chi'|_{\mathbb{S}^n}$ отображения χ' на сфере $\mathbb{S}^n$ совпадает с отображением T_{n+1}.

Согласно формуле (2) это доказывает предложение 1. □

Следствие. *При нечетном n элемент $[T_{n+1}]$ группы $\pi_n\mathrm{SO}(n+1)$ является элементом бесконечного порядка, а отображение*

$$\partial\colon\ \pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1}\to\pi_n\mathrm{SO}(n+1)$$

— мономорфизмом.

Доказательство. Достаточно заметить, что согласно утверждению задачи 8 лекции 25 в группе $\pi_n\mathbb{S}^n$ имеет место равенство

$$p'_*[T_{n+1}]=(1+(-1)^n)\,\iota_n.\ \square$$

Таким образом, *при нечетном n стационарная группа $\pi_n\mathrm{SO}$ изоморфна факторгруппе метастационарной группы $\pi_n\mathrm{SO}(n+1)$ по бесконечной циклической подгруппе.*

Так как $T_{n+1}=T_{n+1}\circ\mathrm{id}$, то предложение 1 может быть записано в виде равенства

$$(T_{n+1})_*=\partial_{n+1},$$

где ∂_{n+1} — гомоморфизм $\pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1}\to\pi_n\mathrm{SO}(n+1)$.

В этом виде оно опускает важное обобщение.

Для любой точки $x\in\mathbb{S}^n$ и любого числа $t\in[-1, 1]$ мы будем символом $[x, t]$ обозначать точку $\cos\frac{\pi}{2}t\cdot x+$ $+\sin\frac{\pi}{2}\cdot e_{n+1}$ сферы $\mathbb{S}^{n+1}$ (эта точка принадлежит меридиану сферы $\mathbb{S}^{n+1}$, проходящему через точку x и ее расстояние от точки x — измеренное по меридиану — равно $\frac{\pi}{2}t$; таким образом x и t являются аналогами географических координат — долготы и широты).

Пользуясь этим обозначением, отнесем произвольному отображению $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ отображение $Ef\colon (\mathbb{S}^{n+1}, e_{n+1}) \to (\mathbb{S}^{m+1}, e_{m+1})$, определенное формулой

$$(Ef)[x, t] = [f(x), t], \qquad x \in \mathbb{S}^n, \ -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Задача 2. Докажите, что

а) *формула* $E[f] = [Ef]$ *корректно определяет некоторое отображение*

$$E\colon \pi_n \mathbb{S}^m \to \pi_{n+1} \mathbb{S}^{m+1};$$

б) *отображение* E *является гомоморфизмом.*

Ясно, что $E(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ и, значит, $E\iota_n = \iota_{n+1}$.

Гомоморфизм E называется *надстроечным гомоморфизмом* или просто *надстройкой*. Отображение $g\colon \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{m+1}$ (гомотопический класс $\beta \in \pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$) называется *надстроенным*, если существует такое отображение $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ (гомотопический класс $\alpha \in \pi_n \mathbb{S}^m$), что $g = Ef$ (соответственно, $\beta = E\alpha$). Все надстроенные элементы $\beta \in \pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$ образуют подгруппу группы $\pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$ — образ $\operatorname{Im} E$ гомоморфизма E.

Предложение 2. *Для любого* $m \leqslant n$ *сквозной гомоморфизм*

$$\pi_n \mathbb{S}^m \xrightarrow{E} \pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} \pi_n \mathrm{SO}(m+1)$$

совпадает с гомоморфизмом $(T_{m+1})_*\colon \pi_n \mathbb{S}^m \to \pi_n \mathrm{SO}(m+1)$, *индуцированным отображением* T_{m+1}:

$$(T_{m+1})_* = \partial_{m+1} \circ E.$$

Доказательство. Пусть элемент $\alpha \in \pi_n \mathbb{S}^m$ задается отображением $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \mathbb{S}^n) \arrow[r, "E_{(-)}f"] \arrow[d, "\chi_n"'] & (\mathbb{E}^{m+1}_{(-)}, \mathbb{S}^m) \arrow[r, "\chi'_m"] \arrow[d, "\chi_m"] & (\mathrm{SO}(m+2), \mathrm{SO}(m+1)) \arrow[d, equal] \\
(\mathbb{S}^{n+1}, e_{n+1}) \arrow[r, "Ef"] & (\mathbb{S}^{m+1}, e_{m+1}) & (\mathrm{SO}(m+2), \mathrm{SO}(m+1)), \arrow[l, "p"']
\end{tikzcd}$$

где χ_n и χ_m — отображения (3), построенные для n и m соответственно, χ'_m — накрытие (4) отображения χ_m, а $E_{(-)}f$ — ограничение отображения Ef на $\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}$. Очевидно, что эта диаграмма коммутативна и, значит, отображение $\chi'_m \circ E_{(-)}f$ накрывает отображение $\chi_m \circ E_{(-)}f = Ef \circ \chi_n$. Так как, по определению, отображение $Ef \circ \chi_n$ задает элемент $E\alpha$ группы

$\pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$ (интерпретированной как группа гомотопических классов rel $\mathbb{S}^n$ отображений $(\mathbb{E}^{n+1}_{(-)}, \mathbb{S}^n) \to (\mathbb{S}^{n+1}, e_{n+1})$), то, следовательно, ограничение $g = (\chi'_m \circ E_{(-)} f)|_{\mathbb{S}^n}$ отображения $\chi'_m \circ E_{(-)} f$ на $\mathbb{S}^n$ (рассматриваемое как отображение $\mathbb{S}^n \to \mathrm{SO}(m+1)$) задает элемент $\partial E\alpha$ группы $\pi_n \mathrm{SO}(m+1)$.

С другой стороны, так как

$$E_{(-)} f|_{\mathbb{S}^n} = f \quad \text{и} \quad \chi'_m|_{\mathbb{S}^m} = T_{m+1},$$

то $g = T_{m+1} \circ f$ и, значит, $[g] = (T_{m+1})_* [f] = (T_{m+1})_* \alpha$. Следовательно, $\partial E\alpha = (T_{m+1})_* \alpha$. □

Теорема 1. *При $n < 2m-1$ отображение*

$$E\colon \pi_n\mathbb{S}^m \to \pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$$

является изоморфизмом, а при $n = 2m-1$ — эпиморфизмом. □

Эта теорема известна как **т е о р е м а Ф р е й д е н т а л я** (несмотря на то, что несколько раньше ее доказал Л. С. Понтрягин). Доказательство теоремы 1 довольно сложно, и мы не можем изложить его здесь.

Заметим, что при $n \leqslant m$ теорема Фрейденталя тривиальна (при $n < m$ потому, что все участвующие в ней группы тривиальны, а при $n = m$ — в силу равенства $E\iota_n = \iota_{n+1}$). Нам фактически будет нужен только первый нетривиальный случай $n = m+1$.

В силу теоремы Фрейденталя из предложения 2 вытекает, что при $n \leqslant 2m-1$ в группе $\pi_n \mathrm{SO}(m+1)$ имеет место равенство

$$\operatorname{Im} \partial_{m+1} = \operatorname{Im} (T_{m+1})_*.$$

При $n = m+1$ это в точности утверждение **г** лекции 25.

Чтобы доказать следующее утверждение **д**, мы в явном виде вычислим группы $\pi_{n+1}\mathbb{S}^n$ для всех $n \geqslant 1$.

Пусть $p\colon (\mathscr{E}, e_0) \to (\mathscr{B}, b_0)$ — произвольное пунктированное (см. лекцию 5) накрытие. Так как (см. лекцию 2) каждое накрытие является расслоением в смысле Гуревича, то имеет место точная последовательность

$$(5) \qquad \ldots \to \pi_n(\mathscr{F}, e_0) \to \pi_n(\mathscr{E}, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(\mathscr{B}, b_0) \to \\ \to \pi_{n-1}(\mathscr{F}, e_0) \to \ldots$$

С другой стороны, так как слой $\mathscr{F}$ дискретен, то для любого $n \geqslant 1$ группа $\pi_n(\mathscr{F}, e_0)$ тривиальна. Поэтому в силу точности последовательности (5) для *любого $n \geqslant 2$ инду-*

цированный накрытием р гомоморфизм

$$p_*\colon \pi_n(\mathscr{E}, e_0) \to \pi_n(\mathscr{B}, b_0)$$

является изоморфизмом.

[Что же касается случая $n=1$, то из точности последовательности (5) следует, что отображение $p_*\colon \pi_1(\mathscr{E}, e_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ является мономорфизмом; факт нам уже известный (см. предложение 1 лекции 4).]

В частности, для любого накрываемого пространства $\mathscr{B}$ группа $\pi_n(\mathscr{B}, b_0)$, $n \geqslant 2$, изоморфна группе $\pi_n(\mathscr{E}, e_0) = \pi_n\mathscr{E}$ универсально накрывающего пространства $\mathscr{E}$ (напомним, что пространство $\mathscr{E}$ односвязно). Поскольку для окружности $\mathbb{S}^1$ пространством $\mathscr{E}$ является прямая $\mathbb{R}$ (см. пример 1 лекции 2), а $\pi_n\mathbb{R} = 0$ (см. выше вычисление группы $\pi_n\mathbb{S}^m$ при $n < m$), этим доказано, что

$$\pi_n\mathbb{S}^1 = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 2. \tag{6}$$

В частности, $\pi_3\mathbb{S}^1 = 0$.

Отождествив сферу $\mathbb{S}^2$ с расширенной плоскостью $\mathbb{C}^+$ комплексных чисел (= комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$) и считая сферу $\mathbb{S}^3$ единичной сферой комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, рассмотрим отображение

$$h\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2, \tag{7}$$

определенное формулой

$$h(z_0, z_1) = \frac{z_1}{z_0}, \qquad |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$$

Это отображение называется *расслоением Хопфа.*

Отождествив точки $(z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3$ с кватернионами $\xi = z_0 + z_1 j$ (т. е. считая $\mathbb{S}^3$ группой кватернионов ξ нормы $|\xi| = 1$), мы немедленно получим, что слоями отображения h в точности являются смежные классы $\mathbb{S}^1\xi$ группы $\mathbb{S}^3$ по ее подгруппе $\mathbb{S}^1$, состоящей из комплексных чисел z, $|z| = 1$. Следовательно, *отображение* (7) *является локально тривиальным расслоением с типичным слоем* $\mathbb{S}^1$ (или, точнее, *локально тривиальным главным* $\mathbb{S}^1$-*расслоением*).

[При стереографической проекции $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ все слои расслоения h, кроме двух, переходят в замкнутые кривые пространства $\mathbb{R}^3$, каждая из которых пересекает единичный круг $\mathring{\mathbb{B}}^2$ плоскости Oxy в одной точке. Оставшиеся два слоя переходят, соответственно, в ось Oz и край

$x^2+y^2=1$, $z=0$, круга $\mathring{\mathbb{B}}^2$. Это делает отображение h геометрически вполне наглядным.]

Гомотопическая последовательность расслоения Хопфа имеет вид

$$\ldots \to \pi_{n+1}\mathbb{S}^1 \to \pi_n\mathbb{S}^3 \xrightarrow{h_*} \pi_n\mathbb{S}^2 \to \pi_n\mathbb{S}^1 \to \ldots,$$

откуда в силу равенства (6) непосредственно вытекает, что *для любого* $n \geqslant 2$ *индуцированный отображением* h *гомоморфизм*

$$h_*\colon \pi_n\mathbb{S}^3 \to \pi_n\mathbb{S}^2$$

является изоморфизмом.

В частности, *группа* $\pi_3\mathbb{S}^2$ *изоморфна группе* $\pi_2\mathbb{S}^2=Z$. Изоморфизм

$$H\colon \pi_3\mathbb{S}^2 \to Z$$

задается формулой

$$H=\deg\circ h_*^{-1}$$

(так что $h_*(\alpha)=H(\alpha)\iota_2$ для любого элемента $\alpha\in\pi_3\mathbb{S}^2$).

Число $H(\alpha)=H\alpha$ называется *инвариантом Хопфа* элемента $\alpha\in\pi_3\mathbb{S}^2$ (или отображения $f\colon \mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^2$ класса α). Чтобы его вычислить, надо выбрать в классе α отображение вида $g\circ h$, где $g\colon \mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ (по доказанному, это всегда возможно), и тогда

$$H\alpha=\deg g.$$

Гомотопический класс отображения $h\colon \mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^2$ обозначается символом η_3. Так как $h=\mathrm{id}\circ h$, то $H\eta_3=1$ и, следовательно, *элемент* η_3 *порождает бесконечную циклическую группу* $\pi_3\mathbb{S}^2$.

Так как при $n=3$ и $m=2$ имеет место равенство $n=2m-1$, то согласно теореме Фрейденталя *отображение* $E\colon \pi_3\mathbb{S}^2\to\pi_4\mathbb{S}^3$ *является эпиморфизмом, а все отображения*

$$E\colon \pi_{n+1}\mathbb{S}^n \to \pi_{n+2}\mathbb{S}^{n+1}, \qquad n\geqslant 3,$$

— изоморфизмами.

Следовательно, *все группы* $\pi_{n+1}\mathbb{S}^n$, $n\geqslant 3$, *являются циклическими группами с образующими* $\eta_{n+1}=E\eta_n=E^{n-2}\eta_3$.

Теорема 2. *Группы* $\pi_{n+1}\mathbb{S}^n$, $n\geqslant 3$, *являются циклическими группами второго порядка.* □

Эта теорема также называется теоремой Фрейденталя (хотя ее также впервые доказал Л. С. Понтрягин). Доказательство теоремы 2 еще труднее, чем доказательство теоремы 1 и мы его также опустим. [Фактически, Фрейденталь доказал теорему, описывающую ядро эпиморфизма $E\colon \pi_{2n-1}\mathbb{S}^n \to \pi_{2n}\mathbb{S}^{n+1}$ для любого $n \geqslant 2$. Принято называть эту теорему «трудной частью» теоремы Фрейденталя, а теорему 1 — ее «легкой частью».]

Теорема 2 дает, в частности, утверждение д лекции 25.

Утверждение е выражает существенно более простой факт.

Пусть $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ и $g\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^r$ — произвольные непрерывные отображения, а $\alpha \in \pi_n\mathbb{S}^m$ и $\beta \in \pi_m\mathbb{S}^r$ — их гомотопические классы.

Задача 3. Докажите, что формула

$$\beta \circ \alpha = [g \circ f]$$

корректно определяет элемент $\beta \circ \alpha$ группы $\pi_n\mathbb{S}^r$.

Заметим, что элемент $\beta \circ \alpha$ является не чем иным, как элементом $g^*\alpha$:

$$\beta \circ \alpha = g^*\alpha.$$

Поэтому для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n\mathbb{S}^m$, $\beta \in \pi_m\mathbb{S}^r$ имеет место равенство

$$\beta \circ (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta \circ \alpha_1 + \beta \circ \alpha_2$$

(правый закон дистрибутивности).

Интересно, что левый закон дистрибутивности

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha, \qquad \alpha \in \pi_n\mathbb{S}^m, \quad \beta_1, \beta_2 \in \pi_m\mathbb{S}^r,$$

вообще говоря, неверен. (Например, можно показать — попытайтесь это сделать! — что для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$(\underbrace{\iota_3 + \ldots + \iota_3}_{k \text{ раз}}) \circ \eta_3 = k^2\eta_3,$$

тогда как, конечно, $\iota_3 \circ \eta_3 = \eta_3$.) Однако если элемент α надстроечен, то этот закон оказывается верным.

Задача 4. Покажите, что *для любых элементов* $\alpha \in \pi_{n-1}\mathbb{S}^{m-1}$, $\beta_1, \beta_2 \in \pi_m\mathbb{S}^r$ *имеет место равенство*

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ E\alpha = \beta_1 \circ E\alpha + \beta_2 \circ E\alpha.$$

[Указание. Для каждого отображения $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ имеет место равенство $\mu \circ Ef = (Ef \vee Ef) \circ \mu$, где μ — отображение (12) лекции 25.]

В частности, если $g\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ — отображение степени k (и, значит, $[g] = k\iota_m$), то $g_*(E\alpha) = kE\alpha$ для любого элемента $\alpha \in \pi_{n-1}\mathbb{S}^{m-1}$. Например, если k четно, а все элементы группы $\pi_n\mathbb{S}^m$ имеют вид $E\alpha$ и являются элементами второго порядка (а именно так дело обстоит при $n = m+1$, $m \geqslant 3$), то $g_* = 0$.

Это доказывает утверждение **е** лекции 25.

Таким образом, нам осталось доказать лишь утверждение **ж**.

Из утверждения задачи 9 лекции 25 непосредственно вытекает, что отображение $p_1^U \circ T_{n+1}^U\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, $n = 2m$, о котором идет речь в утверждении **ж**, задается формулами

$$w_i = -\frac{2z_i\bar{z}_{m-1}}{(1+z_m)^2}, \quad w_{m-1} = 1 - \frac{2|z_{m-1}|^2}{(1+z_m)^2}, \tag{8}$$
$$i = 0, \ldots, m-2,$$

где $z_0, \ldots, z_m$ — координаты точки $z \in \mathbb{S}^n$, а $w_0, \ldots, w_{m-1}$ — координаты точки $w = (p_1^U \circ T_{n+1}^U)(z)$ из $\mathbb{S}^{n-1}$. (Напомним, что $\operatorname{Re} z_m = 0$.) Поэтому ограничение g отображения $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ на экваторе $\mathbb{S}^{n-1}$ сферы $\mathbb{S}^n$ (с уравнением $\operatorname{Im} z_m = 0$, т. е. $z_m = 0$) задается формулами

$$\begin{aligned} w_i &= -2z_i\bar{z}_{m-i}, \qquad i = 0, \ldots, m-2, \\ w_{m-1} &= 1 - 2|z_{m-1}|^2, \end{aligned} \tag{9}$$

и, значит, является отображением сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ z-пространства на экватор $\mathbb{S}^{n-2}$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ w-пространства (задаваемый уравнением $\operatorname{Im} w_{m-1} = 0$). Более того, так как согласно последней из формул (8)

$$\operatorname{Im} w_{m-1} = \frac{4|z_{m-1}|^2}{|1-z_m|^4} \operatorname{Im} z_m,$$

то верхнюю полусферу $\mathbb{E}_{(+)}^n$ сферы $\mathbb{S}^n$, состоящую из точек $z \in \mathbb{S}^n$, для которых $\operatorname{Im} z_m \geqslant 0$, отображение $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ переводит в верхнюю полусферу $\mathbb{E}_{(+)}^{n-1}$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, состоящую из точек $w \in \mathbb{S}^{n-1}$, для которых $\operatorname{Im} w_{m-1} \geqslant 0$, и аналогично нижнюю полусферу $\mathbb{E}_{(-)}^n$, $\operatorname{Im} z_m \leqslant 0$, это отображение переводит в нижнюю полусферу $\mathbb{E}_{(-)}^{n-1}$, $\operatorname{Im} w_m \leqslant 0$.

Задача 5. Покажите, что любое отображение $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$, переводящее полусферу $\mathbb{E}_{(+)}^n$ сферы $\mathbb{S}^n$ в полусферу $\mathbb{E}_{(+)}^m$ сферы $\mathbb{S}^m$, а полусферу $\mathbb{E}_{(-)}^n$ — в полусферу $\mathbb{E}_{(-)}^m$ (и, значит, экватор $\mathbb{S}^{n-1}$ сферы $\mathbb{S}^n$ — в экватор $\mathbb{S}^{m-1}$ сферы $\mathbb{S}^m$), гомотопно отображению Eg, где g — ограничение отображения f на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как отображение $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$. [Указание. Точки $f(x)$ и $(Eg)(x)$, $x \in \mathbb{S}^n$, не являются диаметрально противоположными точками, и потому их можно соединить единственной дугой большого круга длины меньшей π.]

В частности, мы видим, что *отображение* $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ *гомотопно отображению* Eg, *где* g — *отображение* (9).

Имея это в виду, рассмотрим сначала случай $m=2$, когда отображение $g\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ задается формулами

$$w_0 = -2z_0\bar{z}_1, \quad w_1 = 1 - 2|z_1|^2, \tag{10}$$

где $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ и $|w_0|^2 + w_1^2 = 1$, $w_0 \in \mathbb{C}$, $w_2 \in \mathbb{R}$. Так как стереографическая проекция $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^+$ действует по формуле

$$z = \frac{w_0}{1-w_1}$$

(см. формулу (2) лекции I.27), то интерпретированное как отображение $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}^+$ отображение g задается формулой

$$z = \frac{-2z_0\bar{z}_1}{2|z_1|^2} = -\frac{z_0}{z_1}$$

и, значит, отличается от отображения Хопфа (7) на диффеоморфизм $z \mapsto -\frac{1}{z}$ сферы $\mathbb{C}^+$. Поскольку последний диффеоморфизм имеет, очевидно, степень 1, этим доказано, что при $n=2$ отображение g представляет образующую η_3 группы $\pi_3\mathbb{S}^2$ и, значит, отображение $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ — образующую $\eta_4 = E\eta_3$ группы $\pi_4\mathbb{S}^3$.

Это доказывает утверждение ж при $n=2$.

Чтобы доказать это утверждение при любом четном $m>2$, теперь достаточно показать, что *отображение* g: $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-2}$, $n=2m$, m *четно, гомотопно отображению* $E^{n-4}g_2$, *где* g_2: $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ — *отображение* (10). Мы сделаем это в явном виде, выписав соответствующую гомотопию. (Эти формулы можно получить, рассмотрев аналогичную задачу для отображения $p_1 \circ T_{2n+1}$ в вещественной области, когда искомая гомотопия может быть построена геометрически, и затем формально перенеся получившиеся формулы в комплексную область. После того как формулы выписаны, не имеет значения, как они были найдены.)

Задача 6. Покажите, что *отображение* $E^{n-4}g_2$ *задается формулами*

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
&w_i = z_i, \quad i=0, \ldots, m-3,\\
&w_{m-2} = -2\frac{z_{m-2}\bar{z}_{m-1}}{\sqrt{|z_{m-2}|^2+|z_{m-1}|^2}},\\
&w_{m-1} = \frac{|z_{m-2}|^2-|z_{m-1}|^2}{\sqrt{|z_{m-2}|^2+|z_{m-1}|^2}}
\end{aligned}
$$

(при $z_{m-2}=z_{m-1}=0$ считается, что $w_{m-2}=w_{m-1}=0$).

Положив $m=2l$, $\tau=\sqrt{t(1-t)}$ и $A=\sqrt{1-t+t(|z_{m-2}|^2+|z_{m-1}|^2)}$, мы зададим гомотопию $\mathbb{S}^{n-1}\times I\to\mathbb{S}^{n-2}$ формулами

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&w_{2j} = tz_{2j}+\tau z_{2j+1}-\frac{2}{A}\left[(1-t)z_{2j}\bar{z}_{m-1}-\tau\bar{z}_{2j+1}z_{m-1}\right],\\
&w_{2j+1} = tz_{2j+1}-\tau\bar{z}_{2j}-\frac{2}{A}\left[(1-t)z_{2j+1}\bar{z}_{m-1}+\tau\bar{z}_{2j}z_{m-1}\right],\\
&w_{m-2} = A-\frac{2}{A}z_{m-2}\bar{z}_{m-1}, \quad w_{m-1} = A-\frac{2}{A}|z_{m-1}|^2,\\
&j=0, 1, \ldots, l-2, \quad 0\leqslant t\leqslant 1
\end{aligned}
$$

(при $|z_{m-1}|^2+|z_{m-2}|^2\neq 0$; если же $|z_{m-1}|^2+|z_{m-2}|^2=0$ и, значит, $A=\sqrt{1-t}$, то следует положить

$$
\begin{aligned}
&w_{2j} = tz_{2j}+\tau z_{2j+1}-2\left[\sqrt{1-t}\,z_{2j}\bar{z}_{m-1}-\sqrt{t}\,\bar{z}_{2j-1}, z_{m-1}\right],\\
&w_{2j+1} = tz_{2j+1}-\tau\bar{z}_{2j}-2\left[\sqrt{1-t}\,z_{2j+1}\bar{z}_{m-1}+\sqrt{t}\,\bar{z}_{2j}z_{m-1}\right],\\
&w_{m-2}=0, \qquad w_{m-1}=\sqrt{1-t};
\end{aligned}
$$

ясно, что при этом непрерывность сохранится).

Заметим, что формулы (12) имеют смысл только при четном m.

При $t=0$ формулы (12) переходят в формулы (9), а при $t=1$ — в формулы (11).

Поэтому нам нужно лишь доказать, что формулы (12) действительно задают отображение $\mathbb{S}^{n-1}\times I\to\mathbb{S}^{n-2}$, т. е. что

$$
\sum_{i=0}^{m-1}|w_i|^2=1, \quad \text{когда} \quad \sum_{i=0}^{m-1}|z_i|^2=1 \quad \text{и} \quad 0\leqslant t\leqslant 1.
$$

(Заметим, что число w_{m-1} из формулы (12) автоматически вещественно.) К сожалению, это можно сделать только прямым утомительным вычислением.

Имеем

$$|w_{2j}|^2 = \left(tz_{2j} + \tau\bar{z}_{2j+1} - \frac{2}{A}\left[(1-t)\, z_{2j}\bar{z}_{m-1} - \tau\bar{z}_{2j+1}z_{m-1}\right]\right) \times$$
$$\times \left(t\bar{z}_{2j} + \tau z_{2j+1} - \frac{2}{A}\left[(1-t)\bar{z}_{2j}z_{m-1} - \tau z_{2j+1}\bar{z}_{m-1}\right]\right) =$$
$$= t\,|z_{2j}|^2 + t\tau\,(z_{2j}z_{2j+1} + \bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1}) + \tau^2\,|z_{2j+1}|^2 -$$
$$- \frac{2}{A}\left[(1-t)\,t\,|z_{2j}|^2 + (1-2t)\,\tau\bar{z}_{2j}\,\bar{z}_{2j+1} - \tau^2\,|z_{2j+1}|^2\right] z_{m-1} -$$
$$- \frac{2}{A}\left[(1-t)\,t\,|z_{2j}|^2 + (1-2t)\, z_{2j}z_{2j+1} - \tau^2\,|z_{2j+1}|^2\right]\bar{z}_{m-1} +$$
$$+ \frac{4}{A^2}\left[(1-t)^2\,|z_{2j}|^2\,|z_{m-1}|^2 - \right.$$
$$\left. -(1-t)\tau(z_{2j}z_{2j+1}\bar{z}^2_{m-1} + \bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1}z^2_{m-1}) + \tau^2\,|z_{2j+1}|^2|z_{m-1}|^2\right]$$

и аналогично

$$|w_{2j+1}|^2 = \left(tz_{2j+1} - \tau\bar{z}_{2j} - \frac{2}{A}\left[(1-t)z_{2j+1}\bar{z}_{m-1} + \tau\bar{z}_{2j}z_{m-1}\right]\right) \times$$
$$\times \left(t\bar{z}_{2j+1} - \tau z_{2j} - \frac{2}{A}\left[(1-t)\,\bar{z}_{2j+1}z_{m-1} + \tau z_{2j}\bar{z}_{m-1}\right]\right) =$$
$$= t^2\,|z_{2j+1}|^2 - t\tau\,(z_{2j}z_{2j+1} + \bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1}) + \tau^2\,|z_{2j}|^2 -$$
$$- \frac{2}{A}\left[(1-t)\,t\,|z_{2j+1}|^2 - (1-2t)\,\tau\bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1} - \tau^2\,|z_{2j}|^2\right] z_{m-1} -$$
$$- \frac{2}{A}\left[(1-t)t|z_{2j+1}|^2 - (1-2t)\tau z_{2j}z_{2j+1} - \tau^2|z_{2j}|^2\right]\bar{z}_{m-1} +$$
$$+ \frac{4}{A^2}\left[(1-t)^2\,|z_{2j+1}|^2\,|z_{m-1}|^2 + \right.$$
$$\left. + (1-t)\,\tau\,(z_{2j}z_{2j+1}\bar{z}^2_{m-1} + \bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1}z^2_{m-1}) + \tau^2\,|z_{2j}|^2\,|z_{m-1}|^2\right].$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{m-3} |w_i|^2 = \left(t^2 + \tau^2 - \frac{2}{A}\left[(1-t)\,t - \tau^2\right](z_{m-1} + \bar{z}_{m-1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{A^2}\left[(1-t)^2 + \tau^2\,|z_{m-1}|^2\right]\right) \sum_{i=0}^{m-3} |z_i|^2$$

и, значит,

$$\sum_{i=0}^{m} |w_i|^2 = \frac{(A^2t + 4\,(1-t)\,|z_{m-1}|^2)\,(1 - |z_{m-2}|^2 - |z_{m-1}|^2)}{A^2} +$$
$$+ \frac{4\,|z_{m-2}|^2\,|z_{m-1}|^2 + (A^2 - 2\,|z_{m-1}|^2)^2}{A^2}.$$

Коэффициент при $|z_{m-1}|^4$ в числителе равен $-4(1-t)+$ $+4=4t$, а при $|z_{m-1}|^2$ равен

$$-A^2t+4(1-t)(1-|z_{m-2}|^2)+4|z_{m-2}|^2-4A^2=$$
$$=-A^2t+4\left[(1-t)+t|z_{m-2}|^2-A^2\right]=-A^2t-4t|z_{m-1}|^2.$$

Свободный же член выражается формулой

$$A^2t(1-|z_{m-2}|^2)+A^4=A^2(1+t|z_{m-1}|^2).$$

Поэтому

$$\sum_{t=0}^{m}|w_t|^2=$$
$$=\frac{4t|z_{m-1}|^4-(4t|z_{m-1}|^2+A^2t)|z_{m-1}|^2+A^2(1+t|z_{m-1}|^2)}{A^2}=1.$$

Это полностью доказывает утверждение ж. □

Только теперь мы можем считать доказанным предложение 1 лекции 25 (да и то лишь по модулю теорем 1 и 2 Фрейденталя). Непараллелизуемость сфер $\mathbb{S}^{n+1}$ при $n=4l+2$, $l\neq 1$ может быть доказана аналогично на основе теоремы Ботта о метастационарной группе $\pi_{2m}\mathrm{U}(m)$ (см. лекцию 26). Впрочем, такое доказательство будет лишь переизложением доказательства импликации 3 из схемы на стр. 431 (у нас опущенного). Это объясняется тесной связью, существующей между $K_{\mathbb{C}}$-группами и стационарными гомотопическими группами $\pi_n\mathrm{U}$.

Поскольку векторные расслоения тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны ассоциированные главные расслоения, и поскольку произвольное комплексное векторное расслоение ранга m редуцируется к группе $\mathrm{U}(m)$, из утверждения задачи 3 лекции 25 вытекает, что множество $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^m\,\mathbb{S}^n$ комплексных векторных расслоений ранга m над сферой $\mathbb{S}^n$ находится в естественном биективном соответствии с группой $\pi_{n-1}\mathrm{U}(m)$. В этом соответствии расслоению ξ отвечает характеристический класс ассоциированного главного $\mathrm{U}(m)$-расслоения. Мы будем обозначать этот класс символом $T\xi$.

Задача 7. Пусть в диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^m\,\mathbb{S}^n & \xrightarrow{T} & \pi_{n-1}\mathrm{U}(m)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{m+1}\,\mathbb{S}^n & \xrightarrow{T} & \pi_{n-1}\mathrm{U}(m+1)
\end{array}$$

левая вертикальная стрелка является отображением $\xi \mapsto \xi \oplus \theta^1$, а правая индуцирована вложением $\mathrm{U}(m) \to \mathrm{U}(m+1)$. Покажите, что *эта диаграмма коммутативна.*

Отсюда следует, что формула $T[\xi] = T(\xi + \theta^N)$, где N — любое число, большее чем $m+1$, корректно определяет — очевидно биективное — отображение

$$T\colon K_{\mathbf{C}}\mathbb{S}^n \to \pi_{n-1}\mathrm{U}. \qquad (13)$$

Задача 8. Покажите, что *отображение* (13) *является изоморфизмом.* [Указание. Достаточно доказать, что для любых отображений $A\colon \mathscr{X} \to \mathrm{U}(m_1)$, $B\colon \mathscr{X} \to \mathrm{U}(m_2)$ отображение $A \oplus B\colon \mathscr{X} \to \mathrm{U}(m_1+m_2)$, определенное формулой

$$(A \oplus B)(p) = \begin{Vmatrix} A(p) & 0 \\ 0 & B(p) \end{Vmatrix}, \quad p \in \mathscr{X},$$

гомотопно отображению $AB\colon \mathscr{X} \to \mathrm{U}(m_1+m_2)$, определенному формулой

$$(AB)(p) = \begin{Vmatrix} A(p) & 0 \\ 0 & E_{m_2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} B(p) & 0 \\ 0 & E_{m_1} \end{Vmatrix},$$

где E_m — единичная матрица порядка m; ср. формулу (8) лекции 24.[

В силу теоремы Ботта о группах $\pi_n\mathrm{U}$ это и доказывает утверждение о группах $K_{\mathbf{C}}\mathbb{S}^n$ из лекции 24.

Далее, так как каждая точка (z, α) тотального пространства, рассмотренного в лекции 24 тавтологического расслоения η_{n+1} над пространством $\mathbb{C}P^n$, естественным образом отождествляется при $z \neq 0$ с точкой z, то множество всех этих точек с $|z| = 1$ является вложенным подмногообразием, диффеоморфным сфере $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Задача 9. Покажите, что

а) *ограничение проекции расслоения* η_{n+1} *на этом подмногообразии представляет собой расслоение* $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, *слоями которого являются большие окружности сферы* $\mathbb{S}^{2n+1}$ (*ее пересечения с проходящими через центр двумерными плоскостями*);

б) *при* $n = 1$ *это расслоение является, в силу отождествления* $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^2$, *не чем иным, как расслоением Хопфа* (7).

(Это объясняет, почему тавтологические расслоения η_{n+1} часто также называются *расслоениями Хопфа.*)

Задача 10. Покажите, что *характеристический класс расслоения* η_2 *является образующей группы* $\pi_1\mathrm{U}(1) = \pi_1\mathbb{S}^1$.

Это в точности анонсированная в лекции 24 теорема о том, что элемент β_2 порождает циклическую группу $K_{\mathbf{C}}\mathbb{S}^1$.

Аналогично утверждения **а**—**в** на стр. 422 входят как составная часть в теорему Ботта о периодичности.