Дополнение
при корректуре

Построение $(N, \mathrm{Sp}\ (n))$-инстантонов.— Описание $(N, \mathrm{Sp}\ (n))$-инстантонов.— Пространство модулей $(N, \mathrm{Sp}\ (n))$-инстантонов.— N-инстантоны.— Случай $N=1$.— Случай $N=2$.— Случай $N=3$.

Упомянутая в лекции 22 конструкция k-инстантонов (впрочем, нам сейчас удобно изменить обозначения и вместо k писать N) является частным случаем одной общей конструкции связностей в главных (или — что равносильно — в векторных) расслоениях над сферой $\mathbb{S}^4$. В этом Дополнении мы — следуя в основном Атья — опишем эту конструкцию и частично ее исследуем.

Напомним (см. лекцию 7), что символом $\mathrm{Sp}\,(n)$ мы обозначаем группу $U^{\mathbb{H}}(n)$ изометрий кватернионного пространства $\mathbb{H}$.

Определение 1. Автодуальное поле Янга—Миллса в главном $\mathrm{Sp}\,(n)$-расслоении над сферой $\mathbb{S}^4$ с числом Чжени $c_{(2)}$, равным $N>0$ (см. лекцию 23), называется $(N, \mathrm{Sp}\,(n))$-*инстантоном.*

При $n=1$ — это в точности N-инстантоны в смысле лекции 22 (поскольку $\mathrm{Sp}\,(1)=\mathrm{SU}\,(2)$).

Чтобы пока не иметь дело с картами, мы будем отождествлять сферу $\mathbb{S}^4$ с кватернионной проективной прямой $\mathbb{H}P^1$, точками которой являются классы $(x:y)$ пропорциональности справа пар кватернионов [кватернионы мы теперь обозначаем светлыми буквами; пары (x, y) и (x_1, y_1) пропорциональны справа — определяют одну и ту же точку прямой $\mathbb{H}P^1$, если существует такой кватернион $\xi \neq 0$, что $x_1=x\xi$, $y_1=y\xi$, т. е. если либо $y_1=y=0$, либо $x_1y_1^{-1}=xy^{-1}$; конечно, все пары (x, y) предполагаются отличными от пары $(0, 0)$]. При отождествлении прямой $\mathbb{H}P^1$ со сферой $\mathbb{S}^4$ или — точнее — с пространством $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}=\mathbb{H}\cup\{\infty\}$ точке $(x:y)$ с $y\neq 0$ отвечает кватернион xy^{-1}, а точке $(x:0)$ — точка ∞.

Пусть C и D — две кватернионные матрицы размера $(n+N)\times N$, обладающие тем свойством, что для любых кватернионов x, y, одновременно не равных нулю, матрица

$$v(x, y)=Cx+Dy \tag{1}$$

имеет максимальный ранг N, т. е. обладает тем свойством, что ее столбцы порождают в правом линейном пространстве $\mathbb{H}^{n+N}$ над телом $\mathbb{H}$ подпространство размерности N. Это подпространство зависит, конечно, лишь от точки $(x:y)\in\mathbb{H}P^1$, и мы будем обозначать его символом $\mathcal{V}_{(x:y)}$.

Пусть $\mathcal{F}_{(x:y)}$—ортогональное дополнение подпространства $\mathcal{V}_{(x:y)}$ (относительно стандартной метрики пространства $\mathbb{H}^{n+N}$; см. лекцию 7).

Задача 1. Покажите, что *подпространства* $\mathcal{F}_{(x:y)}$ *и* $\mathcal{V}_{(x:y)}$ *являются слоями кватернионных секторных расслоений над* $\mathbb{S}^4$. [Указание. Суммой Уитни этих расслоений является тривиальное расслоение $\mathbb{S}^4\times\mathbb{H}^{n+N}$.]

Мы будем обозначать эти расслоения (и их тотальные пространства) символами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{\perp}$ соответственно. Ранг (над $\mathbb{H}$) расслоения $\mathcal{E}$ равен n, а расслоения $\mathcal{E}^{\perp}$—которое играет лишь вспомогательную роль—равен N.

По построению, расслоение $\mathcal{E}$ является векторным $\mathrm{Sp}_1^{\mathbb{H}}(n)$-расслоением и, значит,—в силу естественного вложения $\mathrm{Sp}(n)\subset\mathrm{SU}(2n)$—векторным $\mathrm{SU}(2n)$-расслоением. Поэтому определено (см. лекцию 23) его число Чженя $c_{(2)}$.

Задача 2. Покажите, что *число Чженя* $c_{(2)}$ *расслоения* $\mathcal{E}$ *равно* N. [Указание. Расслоение $\mathcal{E}^{\perp}$ является суммой Уитни N линейных кватернионных расслоений, число Чженя $c_{(2)}$ каждого из которых равно -1.]

Таким образом, автодуальные поля Янга—Миллса на $\mathcal{E}$—это $(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантоны.

Так как каждое сечение s расслоения $\mathcal{E}$ одновременно представляет собой сечение тривиального расслоения $\mathbb{S}^4\times\mathbb{H}^{n+N}$, то оно является не чем иным, как $\mathbb{H}^{n+N}$-значной функцией на $\mathbb{S}^4$, обладающей тем свойством, что для любой точки $(x:y)\in\mathbb{S}^4$ имеет место включение

$$s(x:y)\in\mathcal{F}_{(x:y)}. \tag{2}$$

Поэтому любое векторное поле X на $\mathbb{S}^4$ переводит сечение s в $\mathbb{H}^{n+N}$-значную функцию Xs. Однако эта функция уже не удовлетворяет условию (2), и, чтобы поправить дело, надо для каждой точки $(x:y)\in\mathbb{S}^4$ ортогонально спроектировать вектор $(Xs)_{(x:y)}\in\mathbb{H}^{n+N}$ на подпространство $\mathcal{F}_{(x:y)}$. Пусть $(\nabla_X s)_{(x:y)}$—эта проекция. Тогда отображение $\nabla_X s\colon (x:y)\longmapsto(\nabla_X s)_{(x:y)}$ будет сечением расслоения $\mathcal{E}$ и соответствие $s\longmapsto\nabla_X s$ будет (проверьте!) ковариантным дифференцированием.

Тем самым мы построили на $\mathcal{E}$ (а потому и на ассоциированном главном $\mathrm{Sp}(n)$-расслоении) некоторую связность ∇.

Замечание 1. Обратим внимание, что изложенный способ построения связности имеет общий характер и применим к произвольному расслоению ξ, являющемуся подрасслоением тривиального расслоения (например,—см. предложение 2 лекции 23—к произвольному расслоению конечного типа над нормальным пространством). Можно показать (сделайте это!), что с точностью до калибровочного преобразования (автоморфизма расслоения) этот способ позволяет построить любую связность на ξ.

Чтобы вычислить связность ∇ (точнее, ее форму связности — потенциал) в явном виде, не переходя все еще к картам, мы воспользуемся ортогональным проектором $P_{(x:y)}$, осуществляющим проектирование пространства $\mathbb{H}^{n+N}$ на подпространство $\mathcal{F}_{(x:y)}$. Пусть $Q_{(x:y)}=E-P_{(x:y)}$—дополнительный проектор (на $\mathcal{V}^{\flat}_{(x:y)}$).

По определению, ковариантный дифференциал ∇s относительно связности ∇ произвольного сечения s: $\mathbb{S}^4 \longrightarrow \mathcal{E}$ расслоения $\mathcal{E}$ задается формулой $\nabla s=P\,ds=ds-Q\,ds$ (мы опускаем аргументы). Но $Qs=0$, и потому $d(Qs)=0$, т. е. $Q\,ds=-(dQ)\,s$ (все операторы мы отождествляем с их матрицами). Более того, так как $Q^2=Q$, то $Q\,ds=Q\,(Q\,ds)=-(Q\,dQ)\,s$. Следовательно,

$$\nabla s=ds+(Q\,dQ)\,s=ds+\Phi s,$$

где $\Phi=Q\,dQ$. Это означает, что *оператор ∇ ковариантного дифференцирования сечений расслоения $\mathcal{E}$ является ограничением оператора $d+\Phi$, определенного для любых $\mathbb{H}^{n+N}$-значных функций $\mathbb{S}^4 \longrightarrow \mathbb{H}^{n+N}$.*

Форма кривизны F_Φ, отвечающая дифференцированию $d+\Phi$, имеет (см. формулу (14) лекции 22) вид $F_\Phi=d\Phi+\Phi\wedge\Phi$.

Но так как $Q^2=Q$, и потому $Q\cdot dQ+dQ\cdot Q=dQ$, то

$$\begin{aligned}\Phi\wedge\Phi&=Q\cdot dQ\wedge Q\cdot dQ=Q\cdot dQ\cdot Q\wedge dQ=\\&=Q\,(dQ-Q\,dQ)\wedge dQ=\\&=Q\,dQ\wedge dQ-Q\,dQ\wedge dQ=0\end{aligned}$$

и, значит, $F_\Phi=d\Phi$, т. е. $F_\Phi=dQ\wedge dQ$. Для формы кривизны F связности ∇ отсюда немедленно получается, что $F=P\,(dQ\wedge dQ)\,P$.

Задача 3. Покажите, что

$$Q=v\rho^{-2}\bar{v}^{\top},$$

где v—матрица (1), а $\rho^2=\bar{v}^{\top}v$—кватернионная $N\times N$-матрица. (Мы по-прежнему опускаем аргументы.)

Поскольку $Pv=0$ и $\bar{v}^{\top}P=0$ (напомним—см. предложение 1 лекции II.20а, справедливое, очевидно, и над $\mathbb{H}$,—что $\bar{P}^{\top}=P$), отсюда следует, что $P\,dQ=P\,dv\cdot\rho^{-2}\bar{v}^{\top}$ и $dQ\,P=v\rho^{-2}\cdot d\bar{v}^{\top}P$.

Поэтому

$$F=P\,dv\wedge\rho^{-2}\,d\bar{v}^{\top}P.$$

Перейдем теперь от сферы $\mathbb{S}^4=\mathbb{H}\cup\{\infty\}$ к ее части $\mathbb{H}=\mathbb{R}^4$, состоящей из точек $x=(x:1)$. Тогда $v=Cx+D$, $dv=C\,dx$ и, значит,

$$F=PC\,dx\wedge\rho^{-2}\,d\bar{x}\,\bar{C}^{\top}P,$$

где

(3) $$\rho^2 = (\bar{x}\bar{C}^\top + \bar{D}^\top)(Cx + D).$$

Если матрица (3) вещественна (для всех $x \in \mathbb{H}$), то она перестановочна с кватернионом $d\bar{x}$, и потому

(4) $$F = PC(dx \wedge d\bar{x})\rho^{-2}\bar{C}^\top P.$$

Тот факт, что дифференциалы координат входят в $\mathfrak{sp}(n)$-значную дифференциальную форму F блоком $dx \wedge d\bar{x}$, означает (см. конец лекции 21), что эта форма автодуальна и, значит, является $(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантоном.

Участвующий в формуле (4) проектор P можно представить (ср. утверждение задачи 3) в виде $P = u\bar{u}^\top$, где $u = u(x)$ — матрица, столбцы которой составляют ортонормированный базис пространства $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{(x:1)}$, т. е. такая кватернионная $(n+N)\times n$-матрица, что

(5) $$\bar{u}^\top u = E, \quad \bar{u}^\top v = 0,$$

где v — матрица (1) (при $y = 1$). В этом базисе поле (4) записывается в виде $\mathfrak{sp}$-значной дифференциальной формы

$$F = \bar{u}^\top C(dx \wedge d\bar{x})\rho^{-2}\bar{C}^\top u.$$

Задача 4. Покажите, что *потенциал A инстантона* (4) *выражается формулой*

(6) $$A = \bar{u}^\top du.$$

[Указание. $F = d\bar{u}^\top Q \wedge du$.]

Тем самым нами доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть C и D — такие прямоугольные кватернионные $(n+N)\times n$-матрицы, что*

а) *для любого кватерниона x матрица* (3) *вещественна;*

б) *для любых кватернионов x и y, одновременно не равных нулю, матрица* (1) *имеет максимальный ранг N. Тогда формула* (4) *определяет $(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантон F с потенциалом* (6). □

Как показали Атья, Дринфельд, Манин и Хитчин, эта конструкция дает все — с точностью до калибровочной эквивалентности — $(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантоны.

Ясно, что при замене u на uG, где G — произвольная матрица из $\mathrm{Sp}(n)$, потенциал (6) подвергается калибровочному преобразованию (а инстантон F, в выражение которого u явно не входит, не меняется).

Аналогично, инстантон F (даже расслоение $\mathcal{E}$) не меняются при умножении матриц C и D справа на произвольную вещественную невырожденную $N\times N$-матрицу (это умножение сводится к замене базиса каждого из пространств $\mathcal{V}^2_{(x:y)}$), а также при умножении этих матриц слева на произвольную матрицу из $\mathrm{Sp}(n+N)$ (что сводится к замене базиса в пространстве $\mathbb{H}^{n+N}$).

Поэтому множество всех инстантонов (4) получается из множества всех пар (C, D) матриц, удовлетворяющих условиям **а** и **б**, факторизацией по группе $GL(N; \mathbb{R})$, действующей на этих парах справа, и по группе $\mathrm{Sp}(n+N)$, действующих на них слева.

Более того, вместо однородных координат $(x:y)$ на $\mathbb{H}P^1=\mathbb{S}^4$ мы можем с равным правом использовать им проективно эквивалентные координаты $(x':y')$, связанные с координатами $(x:y)$ формулами вида

$$x=\xi_1x'+\eta_1y',\quad y=\xi_2x'+\eta_2y', \tag{7}$$

где кватернионы $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ таковы, что возможно обратное выражение x' и y' через x и y (преобразование (7) обратимо). При такой замене координат матрицы C и D переходят, как легко видеть, в матрицы $C\xi_1+D\xi_2$ и $C\eta_1+D\eta_2$.

З а д а ч а 5. Покажите, *что преобразование* (7) *тогда и только тогда обратимо, когда либо* $\xi_1\neq 0$ *и* $\xi_1\eta_2-\xi_1\xi_2\xi_1^{-1}\eta_1\neq 0$, *либо* $\xi_1=0$ *и* $\xi_1\eta_1\neq 0$.

З а д а ч а 6. Покажите, что

а) *выбором координат* $(x:y)$ *можно добиться того, чтобы нижние* N *строк матрицы* C *составляли обратимую кватернионную* $N\times N$-*матрицу*;

б) *любая матрица* C, *обладающая последним свойством, эквивалентна* (*по отношению к указанным выше действиям групп* $\mathrm{Sp}(n+N)$ *и* $GL(N; \mathbb{R})$) *матрице вида*

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ -E \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

где E — *единичная* $N\times N$-*матрица.*

Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что матрица C имеет вид (8) и, значит, матрица (1) — при $y=1$ — вид

$$Cx+D=\begin{Vmatrix} 0 \\ -E \end{Vmatrix}x+\begin{Vmatrix} \Lambda \\ B \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \Lambda \\ B-xE \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

где Λ и B — постоянные (не зависящие от x) кватернионные матрицы размеров $n\times N$ и $N\times N$ соответственно.

Условие а из предложения 1 распадается тогда на два условия:

а') *матрица* $\bar{B}^{\top}B+\bar{\Lambda}^{\top}\Lambda$ *вещественна*;

а'') *матрица* $\bar{B}^{\top}x+\bar{x}B$ *вещественна для любого* $x\in\mathbb{H}$.

З а д а ч а 7. Покажите, что *условие* **а''** *выполнено тогда и только тогда, когда матрица* B (*а потому и матрица* $\bar{B}^{\top}B+\bar{\Lambda}^{\top}\Lambda$ *из условия* **а**) *симметрична.*

Что же касается условия **б**, то оно, очевидно, равносильно следующему условию **б′**:

б′) *для любого кватерниона* $x \in \mathbb{H}$ *уравнения* $B\xi = x\xi$, $\Lambda\xi = 0$ *относительно вектора* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^{\top}$ *имеют единственное решение* $\xi = 0$.

Чтобы построить $(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантон, отвечающий рассматриваемым матрицам C и D (т. е. теперь уже матрицам Λ и B), нам в первую очередь нужно найти $(n+N)\times n$-матрицу $u = u(x)$, удовлетворяющую условиям (5). Мы будем искать ее в виде

$$u = \left\| \begin{matrix} -E \\ U \end{matrix} \right\| \cdot W = \left\| \begin{matrix} -W \\ UW \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

где U — кватернионная $N\times n$-матрица, а W — кватернионно эрмитова $n\times n$-матрица (кватернионная матрица, для которой $W^{\top} = \overline{W}$).

Задача 8. Покажите, что *матрица* (10) *тогда и только тогда удовлетворяет*

а) *условию* $\overline{u}^{\top} u = E$, *когда матрица* W *невырождена и*

$$W^{-2} = E + \overline{U}^{\top} U; \tag{11}$$

б) *условию* $\overline{u}^{\top} v = 0$, *где* v — *матрица* (9), *когда* $-\Lambda + \overline{U}^{\top}(B - xE) = 0$, *т. е. — в предположении, что матрица* $B - xE$ *обратима — когда*

$$U = \overline{\Lambda (B - xE)^{-1}}^{\top}. \tag{12}$$

Покажите также, что *отвечающий этой матрице потенциал* (6) *выражается формулой*

$$A = W\overline{U}^{\top} dU W + W^{-1} dW. \tag{13}$$

Таким образом, *любые две кватернионные матрицы* Λ *и* B, *удовлетворяющие условиям* **а′**, **а″** (*матрица* B *симметрична*) *и* **б′** *доставляют нам* $(N, \mathrm{Sp}(n))$-*инстантон* F, *потенциал которого выражается формулой* (13), *где* U *и* V — *матрицы, определенные формулами* (11) *и* (12).

Потенциал (13) имеет особенности в точках x, для которых матрица $B - xE$ необратима, но они устранимы калибровочным преобразованием (вызваны не существом дела, а выбором калибровки).

Вообще говоря, один и тот же $(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантон F может получиться из различных матриц Λ и B.

Задача 9. Покажите, что *матрицы* Λ, B *и* Λ_1, B_1 *тогда и только тогда задают один и тот же* $(N, \mathrm{Sp}(n))$-*инстантон* F, *когда существуют такие матрицы* $R \in \mathrm{O}(N)$ *и* $T \in \mathrm{Sp}(n)$, *что*

$$\Lambda_1 = T\Lambda R, \quad B_1 = R^{\top} B R. \tag{14}$$

Поскольку $\overline{B}_1^{\top} B + \overline{\Lambda}_1^{\top}\Lambda_1 = R^{-1}(\overline{B}^{\top} B + \overline{\Lambda}^{\top}\Lambda) R$ (заметим, что $R^{-1} = R^{\top}$), отсюда — в силу теоремы о приведении к главным осям;

см. теорему 2 лекции II.21), примененной к вещественной симметрической матрице $\overline{B}^{\top}B+\overline{\Lambda}^{\top}\Lambda$ — немедленно вытекает, что без ограничения общности матрицу $\overline{B}^{\top}B+\overline{\Lambda}^{\top}\Lambda$ в условии a′ мы можем считать диагональной.

Таким образом, окончательно мы получаем следующее предложение:

Предложение 2. *$(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантоны параметризуются парами таких кватернионных матриц (Λ, B) размеров $n\times N$ и $N\times N$ соответственно, что*

1° матрица B симметрична $(B^{\top}=B)$;

2° матрица $\overline{B}^{\top}B+\overline{\Lambda}^{\top}\Lambda$ вещественна и диагональна;

3° для любого кватерниона $x\in\mathbb{H}$ уравнения $B\xi=x\xi$, $\Lambda\xi=0$ относительно вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_N)^{\top}$ имеют единственное решение $\xi=0$.

Две пары (Λ, B) и (Λ_1, B_1) тогда и только тогда дают один и тот же инстантон, когда они связаны формулами (14), где $R\in\mathrm{O}(n)$, $T\in\mathrm{Sp}(n)$. □

Введя в рассмотрение факторпространство $\mathfrak{M}_n(N)$ пространства всех пар (Λ, B), удовлетворяющих условиям 1°—3°, по отношению эквивалентности, задаваемому формулами (14), мы можем, следовательно, сказать, что *$(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантоны F находятся в естественном биективном соответствии с точками пространства $\mathfrak{M}_n(N)$.*

Принято говорить, что $\mathfrak{M}_n(N)$ представляет собой *пространство модулей $(N, \mathrm{Sp}(n))$-инстантонов.*

Топология пространства $\mathfrak{M}_n(N)$, безусловно, очень интересна, но о ней известно очень мало.

З а д а ч а 10. Покажите, что *пространство $\mathfrak{M}_n(N)$ содержит открытое всюду плотное (т. е. такое, что его замыканием служит все $\mathfrak{M}_n(N)$) подмножество $\mathfrak{M}'_n(N)$, являющееся гладким многообразием размерности* $4(n+1)N-n(2n+1)$ (при $n=1$ размерность равна $8N-3$).

Построение карт многообразия $\mathfrak{M}'_n(N)$ затруднено необходимостью учитывать факторизацию по соотношениям (14). Впрочем, если мы дополнительно пронормируем пары (Λ, B) требованием, чтобы диагональные элементы матрицы $\overline{B}^{\top}B+\overline{\Lambda}^{\top}\Lambda$ не возрастали, то вне некоторого нигде не плотного замкнутого множества (которое, не теряя общности, мы можем из $\mathfrak{M}'_n(N)$ исключить), отвечающего парам (Λ, B), для которых матрица $\overline{B}^{\top}B+\overline{\Lambda}^{\top}\Lambda$ имеет повторяющиеся диагональные элементы, мы можем в соотношениях (14) считать матрицу R единичной, т. е. считать, что *точками многообразия $\mathfrak{M}'_n(N)$ являются классы пар (Λ, B) по отношению экви-*

валентности $(\Lambda_1, B_1) \sim (\Lambda, B)$, *имеющему место тогда и только тогда, когда*

$$\Lambda_1 = T\Lambda \quad \text{и} \quad B_1 = B, \tag{15}$$

где $T \in \mathrm{Sp}(n)$.

Конечно, это упрощает задачу, но все равно она остается очень трудной — и до сих пор фактически нерешенной.

Рассмотрим более внимательно случай $n=1$, когда мы имеем дело с N-инстантонами в смысле лекции 22.

При $n=1$ матрица Λ представляет собой кватернионный вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ длины N, а условия 1°—3° являются не чем иным, как условиями на пару (λ, B), указанными на стр. 384.

Матрица U, задаваемая формулой (12), является при $n=1$ кватернионным столбцом $u = (u_1, \ldots, u_N)^\top$ высоты N, а матрица W, задаваемая формулой (12) — положительным вещественным числом.

Задача 11. Покажите, что *при* $n=1$ *дифференциальная форма* $-W^{-1}\,dW$ *с вещественными коэффициентами является вещественной частью кватернионной дифференциальной формы*

$$W\bar{U}^\top dUW = \frac{\bar{u}^\top du}{1+|u|^2},$$

где $|u|^2 = \bar{u}^\top u = \sum_{i=1}^{N} |u_i|^2, \quad \bar{u}^\top u = \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i\, du_i.$

Следовательно, при $n=1$ формула (13) для потенциала N-инстантонов может быть записана в следующем виде (как всегда, мы опускаем аргумент $x \in \mathbb{H}$)

$$A = \mathrm{Im}\,\frac{\bar{u}^\top du}{1+|u|^2}, \tag{16}$$

где $u = \overline{\lambda(B-x)}^\top$. (Конечно, это не то u, что, скажем, в формуле (6).)

Что же касается соотношений (15), то при $n=1$ они имеют вид

$$\lambda_1 = t\lambda, \qquad B_1 = B, \tag{17}$$

где $t \in \mathbb{H}$, $|t|=1$. Поэтому при $\lambda_1 \neq 0$ мы можем нормировать вектор λ, требуя, чтобы его первая координата λ_1 была вещественным положительным числом. Это однозначно нормирует вектор λ, но исключает точки — также составляющие нигде не плотное замкнутое множество — для которых $\lambda_1 = 0$.

Поэтому мы получим карту многообразия $\mathfrak{M}'_n(N)$ (или, как говорят физики, — *независимые параметры*, задающие N-инстантоны), наложив условие $\lambda_1 > 0$ и отобрав из элементов матрицы B и вектора λ, составляющих пару (λ, B), подчиненную условиям 1°—3°, независимые элементы, через которые выражаются все остальные.

Пусть $B=\|b_{ij}\|$, $i, j=1, \ldots, N$, где $b_{ij}=b_{ji}$ (этим мы автоматически учли условие 1°). Тогда диагональные элементы матрицы $\overline{B}^{\top}B+\overline{\lambda}^{\top}\lambda$ имеют вид

$$\sum_{i=1}^{N}\overline{b}_{ji}b_{ij}+\overline{\lambda}_j\lambda_j=\sum_{i=1}^{N}|b_{ij}|^2+|\lambda_j|^2$$

и значит, вещественны. Поэтому условие 2° сводится к $N(N-1)/2$ соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N}\overline{b}_{ij}b_{ik}+\overline{\lambda}_j\lambda_k=0, \qquad j<k, \tag{18}$$

выражающих равенство нулю недиагональных элементов матрицы $\overline{B}^{\top}B+\overline{\lambda}^{\top}\lambda$. Следовательно, чтобы получить карту многообразия $\mathfrak{M}'_1(N)$ нам надо решить уравнения (18), т. е., точнее, приняв часть кватернионов в b_{ij}, λ_i за *свободные неизвестные*, выразить через них все остальные. Кроме того, надо принять во внимание условие 3°. Как впервые заметили Корепин и Шаташвили, решить уравнения (18) удается при $N\leqslant 3$, но уже в случае $N=4$ возникают непреодолимые—если мы хотим действовать только с кватернионами—алгебраические препятствия.

При $N=1$ условия (18) отсутствуют и 1-инстантоны задаются кватернионом $b=b_{11}$ и числом $\lambda=\lambda_1>0$. Следовательно, потенциал A имеет в этом случае вид

$$A=\operatorname{Im}\frac{\lambda^2(b-x)^{-1}\,\overline{d\,(b-x)^{-1}}}{1+\lambda^2|b-x|^{-2}}=\operatorname{Im}\frac{\lambda^2(b-x)^{-1}\,\overline{(b-x)}^{-1}d\overline{x}\,\overline{(b-x)}^{-1}}{1+\lambda^2|b-x|^{-2}}=$$
$$=\operatorname{Im}\frac{\lambda^2\,d\overline{x}\,\overline{(b-x)}^{-1}}{\lambda^2+|b-x|^2}=-\operatorname{Im}\frac{\lambda^2(b-x)^{-1}\,dx}{\lambda^2+|b-x|^2}\,.$$

Задача 12. Покажите, что *этот потенциал калибровочно эквивалентен (вне точки b) потенциалу $A_{\lambda,b}$, задаваемому формулой* (22) *лекции* 21. [Указание. Положите $y=\lambda^2(b-x)^{-1}+b$.]

Если матрица B—мы возвращаемся к произвольному N—является диагональной матрицей с различными диагональными элементами $b_1, \ldots, b_N$, а все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ вещественны и положительны, то условия 1°—3° автоматически выполнены и получающийся N-инстантон можно рассматривать как суперпозицию N инстантонов F_{λ_i, b_i}, $i=1, \ldots, N$, из лекции 21. Это решение инстантонных уравнений называется *решением 'т Хоофта*.

При $N=2$ имеется только одно уравнение (18):

$$\bar{b}_{11}b_{12}+\bar{b}_{12}b_{22}+\lambda_1\lambda_2=0.$$

Это уравнение линейно по $\bar{b}_{11}$ и потому легко решается — достаточно принять за свободные неизвестные число $\lambda_1>0$ и кватернионы b_{12}, b_{22}, λ_2. Тогда при $b_{12}\neq 0$

$$b_{11}=-\frac{b_{12}(\bar{b}_{22}b_{12}+\lambda_1\bar{\lambda}_2)}{|b_{12}|^2}. \tag{19}$$

Условие 3° состоит при $n=1$ и $N=2$ в требовании, чтобы для любого $x\in H$ уравнения

$$\begin{aligned} b_{11}\xi_1+b_{12}\xi_2&=x\xi_1,\\ b_{12}\xi_1+b_{22}\xi_2&=x\xi_2,\\ \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2&=0 \end{aligned}$$

имели только нулевое решение $\xi_1=0$, $\xi_2=0$.

Но, исключив с помощью третьего уравнения ξ_1, мы для ξ_2 получим уравнения

$$\begin{aligned} (x\lambda_1^{-1}\lambda_2-b_{11}\lambda_1^{-1}\lambda_2+b_{12})\,\xi_2&=0,\\ (x+b_{12}\lambda_1^{-1}\lambda_2-b_{22})\,\xi_2&=0. \end{aligned}$$

Поэтому условие 3° выполнено тогда и только тогда, когда для любого кватерниона x хотя бы один из коэффициентов при ξ_2 в этих уравнениях отличен от нуля, что при $\lambda_2\neq 0$ имеет место, как легко видеть, тогда и только тогда, когда

$$b_{11}-b_{12}\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq b_{22}-b_{12}\lambda_1^{-1}\lambda_2. \tag{20}$$

Этим доказано, что число $\lambda_1>0$ и кватернионы $b_{12}\neq 0$, b_{22} и $\lambda_2\neq 0$, удовлетворяющие условию (20), где b_{11} определяется формулой (19), составляют в некоторой области многообразия $\mathfrak{M}_1'(2)$ систему независимых параметров (т. е. что *эта область является координатной окрестностью, локальными координатами в которой служат число λ и коэффициенты кватернионов b_{12}, b_{22} и λ_2*). В частности, мы видим, что размерность многообразия $\mathfrak{M}_1'(2)$ равна $1+3\cdot 4=13=8\cdot 2-3$; см. задачу 10.

Если мы хотим получить карту, покрывающую исключенные инстантоны — отвечающие случаю, когда $\lambda_2=0$ и $b_{12}=0$ — необходимо по другому выбрать свободные неизвестные.

Впрочем, для практических целей обычно достаточно описать исключенные инстантоны как члены семейства, зависящегося от меньшего числа переменных. (Геометрически это означает, что их совокупность представляется в виде подмногообразия — возможно тоже с особенностями — меньшего числа измерений, примыкающего к построенной 13-мерной области.)

З а д а ч а 13. Покажите, что *2-инстантоны с* $b_{12}=0$ *и* $\lambda_2=0$ *параметризуются числом* $\lambda_1>0$ *и кватернионами* b_{11}, b_{22}, *удовлетворяющими неравенству* $b_{11}+b_{22}\neq 0$ (*и, значит, образуют* 9-*мерное многообразие*).

Случай $N=3$ трактуется аналогично.

В этом случае мы имеем три уравнения (18):

$$\begin{aligned}
&\bar b_{11}b_{12}+\bar b_{12}b_{22}+\bar b_{13}b_{23}+\lambda_1\lambda_2=0,\\
(21)\qquad &\bar b_{11}b_{13}+\bar b_{12}b_{23}+\bar b_{13}b_{33}+\lambda_1\lambda_3=0,\\
&\bar b_{12}b_{13}+\bar b_{22}b_{23}+\bar b_{23}b_{33}+\bar\lambda_2\lambda_3=0.
\end{aligned}$$

Выбрав за свободные неизвестные кватернионы b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, λ_2 и число $\lambda_1>0$, мы при $b_{12}\neq 0$ можем найти кватернион b_{11} из первого уравнения (21). Тогда остальные два уравнения относительно кватернионов b_{33} и λ_3 приобретут вид

$$\bar b_{13}b_{33}+\lambda_1\lambda_3=a,\qquad \bar b_{23}b_{33}+\bar\lambda_2\lambda_3=b,$$

где a и b—известные кватернионы и, значит, при $\lambda_2\neq-\lambda_1 b_{23}$ будут однозначно разрешимы. Это дает—с учетом условия 3°, которое, как легко видеть, сводится к некоторым неравенствам,—семейство 3-инстантонов, зависящих от $1+5\cdot 4=21=8\cdot 3-3$ вещественных параметров. При $\lambda_3=-\lambda_1 b_{23}$ или $b_{12}=0$ получаются еще три семейства, два зависящие от 17 вещественных параметров (числового параметра λ_1 и кватернионных параметров b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23} и соответственно b_{11}, b_{22}, b_{23}, λ_2) и одно—от 13 вещественных параметров (числового параметра λ_1 и кватернионных параметров b_{11}, b_{22}, b_{23}), подчиненных соответствующим неравенствам.

При $N=4$ этот метод не работает, так как для b_{ij} получаются (проверьте!) нелинейные уравнения.

Конечно, все эти вычисления практически ничего не говорят о топологии пространства $\mathfrak{M}_1(N)$.