ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является непосредственным продолжением предыдущей книги этой серии[1]) и подобно ей предназначена служить учебником по расширенному — по сравнению с читаемым ныне — курсу геометрии для студентов-математиков университетов. Хотя общий замысел серии, подробно изложенный в предисловии к Семестру III, остался прежним, тем не менее характер книги несколько изменился. Основная причина состоит в полной неразработанности основных принципов преподавания геометрии в университетах. Если, скажем, по анализу имеется вековая традиция как устного преподавания, так и письменных учебников, то в отношении геометрии царит полная неясность и в том, что следует включать в программу, и в том, как это нужно преподавать и излагать. Необходимо иметь несколько разных учебников, написанных с различных позиций, и только после длительной обкатки их в реальном преподавании можно будет обоснованно принимать решения о составе курса и о стиле его преподавания. Пока же учебник приходится писать так, чтобы он мог обслуживать много по-разному ориентированных обязательных курсов. Это, конечно, резко увеличивает объем книги, но зато оставляет лектору значительную свободу маневра и позволяет вдумчивому студенту существенно выйти за пределы аудиторного изложения.

Отдел математики, называемый дифференциальной геометрией, зародился как теория кривых и поверхностей евклидового пространства, изучаемых средствами анализа. После Римана центр тяжести исследований постепенно переключился на геометрию многообразий с произвольной

---

[1]) См. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.— М.: Наука, 1987. В дальнейшем цитируется как «Семестр III».

римановой метрикой. Изучение параллельного перенесения в римановой геометрии привело — после длительного процесса освоения новых концепций — к общему понятию связности в произвольных главных (или векторных) расслоениях. Это понятие не только служит базисом, на котором в настоящее время возвышается здание дифференциальной геометрии, но играет существеннейшую роль в других геометрически ориентированных отделах математики и даже физики.

Связь дифференциальной геометрии с физикой всегда была очень тесна. (Все знают, что Риман впервые изложил свои идеи во вступительной лекции 1854 г., но мало кому известно, что разработал он их в работе 1867 г., посвященной одному вопросу теории теплопроводности.) В теории относительности Эйнштейна эта связь достигла такой интенсивности, что стали даже говорить, быть может, несколько поспешно, о геометризации физики. Сейчас открылась новая дверь, соединяющая физику с геометрией, — потенциалы калибровочных полей теории элементарных частиц оказались не чем иным, как связностями в тех или иных главных расслоениях!

Все это определяет желательность (а, быть и может, и необходимость) введения общей теории связностей в обязательный курс геометрии для математиков (о физиках речи нет — они давно уже вынуждены изучать все эти вопросы под маской калибровочных полей). Как ни странно, но основной минимально необходимый материал здесь не очень велик и может быть изложен за четыре — пять лекций. Правда, при этом за бортом остается много деталей и разветвлений, без которых обходиться на самом деле трудно. Они также изложены в этой книге — для чего понадобилось вдвое больше места, — но как факультативный материал, в основном для самостоятельного изучения. Более же конкретные вопросы (пространства аффинной связности, симметричные пространства, римановы пространства, пространственные формы Кэли — Клейна, теорема Гаусса — Бонне, вариационная теория геодезических и т. п.), которые, конечно, также должны входить в курс, будут изложены в следующем томе.

Много места в книге уделено вопросам, лишь косвенно связанным с дифференциальной геометрией, так что название книги имеет более или менее условный характер. (Достаточно сказать, что изложение собственно дифференциально-геометрического материала начинается лишь с десятой лекции!) Три (правда, неполные) лекции посвящены группам Ли.

Из топологического материала в книгу включена лишь теория накрытий и фундаментальной группы, необходимость которых в обязательном курсе, по-видимому, уже общепризнанна. В связи с характеристическими классами, трактуемыми дифференциально-геометрически, введены K-группы, которые затем применяются к задаче о четности инварианта Хопфа. (Напомним, что — очень беглое! — понятие о группах гомологий было дано в последней лекции Семестра III.) В заключительных трех лекциях 25—27 в связи с задачей о параллелизуемости сфер вводятся гомотопические группы и излагаются их простейшие свойства.

Наиболее важные вопросы в книге разобраны очень детально (даже, возможно, с излишней подробностью; см., например, в лекции 18 изложение связностей в расслоении реперов). Вместе с тем, для сохранения разумного объема книги, другие вопросы — быть может, не менее важные — изложены в виде задач (правда, с подробными указаниями).

Как и в Семестре III, мелкий шрифт используется для изложения внегеометрического (в основном относящегося к анализу) материала, а также для некоторых задач (в основном более трудных). Остальные задачи фактически являются тривиальными упражнениями, предназначенными исключительно для самоконтроля читателя.

В отличие от Семестра III лекции в книге теперь несколько увеличены по сравнению с устными. Имеется в виду, что лектор должен произвести определенный отбор и часть материала изложить либо без доказательств, либо в виде задач для студентов, либо отсылая их к учебнику. Вместе с тем к концу второго года обучения темп лекций и объем применяемого на них материала, конечно, не может оставаться на уровне первого семестра.

Известно, что привычка к определенным обозначениям автоматизирует мышление и делает усвоение нового материала более легким. Напротив, введение новых, незнакомых обозначений может создать трудности в понимании даже известного материала. Поэтому автор учебника обязан следовать сложившимся обозначениям и весьма осторожно вводить новые. К несчастью, в дифференциальной геометрии наблюдается в этом отношении ужасающий разнобой и в разных ее отделах (и в разных учебниках) обозначения, как правило, никак друг с другом не коррелированы. В этой книге произведена попытка более или менее унифицировать обозначения, не отходя при этом слишком далеко от традиции. Полностью это сделать, естественно, не удалось, и читатель не должен быть шокирован, обнаружив, например, что проекция расслоения, обозначаемая обычно буквой π, в отдельных лекциях обозначается буквой p, которая в других лекциях употребляется для обозначения точек (а также как индекс).

Конкретное содержание книги ясно из подробного оглавления. Поэтому мы ограничимся лишь краткими комментариями.

Лекция 1 имеет вводный характер и, строго говоря, без нее в дальнейшем можно обойтись (в лекциях, не имеющих дела с главными расслоениями). Однако, полностью опустив ее, читатель лишится общей перспективы и сильно сузит свой кругозор. Можно рекомендовать не изучать эту лекцию сразу, но возвращаться к ней каждый раз, когда в этом появится необходимость.

Лекции 2—5 посвящены накрытиям и фундаментальной группе. Изложение в них построено концентрически и при необходимости можно опустить лекцию 5 или даже оставить лишь лекции 2 и 3; каждый вариант содержит более или менее законченный запас сведений. (Подобный принцип изложения принят и в некоторых следующих лекциях.)

В лекции 6 начинается основная тема—векторные расслоения. С этой лекции можно начинать, но опустить ее никак нельзя.

В лекции 7 обсуждается задача о редукции структурной группы векторного расслоения. В качестве примеров рассмотрены задачи о метризуемости векторных расслоений и о квазикомплексифицируемости гладких многообразий. В лекции 8 обсуждается вопрос, при каких n сфера размерности n квазикомплексифицируема или параллелизуема.

Задача о редукции структурной группы (для векторных расслоений уже рассмотренная в лекции 7) в общем виде рассматривается в лекции 9. В связи с этим вводится понятие геометрии Клейна.

Как уже было сказано, собственно дифференциальная геометрия начинается в лекции 10. Здесь дается геометрическое определение связности на векторном расслоении как особого вида поля горизонтальных подпространств. Эту лекцию можно читать сразу после лекции 6.

В лекции 11 вводятся ковариантные производные и устанавливается их биективное соответствие со связностями.

В лекции 12 описывается процедура перенесения связности (= ковариантного дифференцирования) с данного векторного расслоения на любые его тензорные степени. Изложение построено так, что это перенесение предшествует конструкции тензорных степеней и служит для его мотивировки. Конечно, рассматриваются не только тензорные степени, но и произвольные непрерывные функторы.

Имея понятие тензорного произведения расслоений, мы можем теперь ввести понятие ковариантного дифференциала. Это делается в начале лекции 13. Затем мы переходим к группам Ли, теории которых посвящена оставшаяся часть лекции 13 и лекции 14, 15. (Заметим, что на практике конец лекции 14 приходится, разрывая изложение, присоединять к лекции 15.)

В лекциях 16, 17 вводятся связности на главных расслоениях и сопоставляются со связностями на векторных расслоениях. Эти лекции за счет примеров и подробных разъяснений без труда могут быть сокращены до одной-полутора лекций.

Лекция 18 состоит из двух частей. В первой части вводится группа голономии и доказывается (с использованием общих теорем лекции 15), что это группа является группой Ли. Затем доказывается теорема о редуцируемости расслоения к его группе голономии. В аудиторном изложении, когда не требуется все обозначать и все договаривать, доказательства обеих теорем оказываются и быстрыми, и нетрудными. Во второй части — лишь косвенно связанной с первой — доказывается, что над паракомпактным хаусдорфовым многообразием каждое векторное расслоение обладает хотя бы одной связностью и потому тривиализируется над любой шаровой координатной окрестностью.

В лекции 19 вычисляется параллельный перенос вдоль петли и на этой основе вводится тензор кривизны. Обсуждаются также и другие его определения. Эту лекцию можно читать — опустив два последних раздела — непосредственно после лекции 11.

Основная тема лекции 20 — выражение через тензор кривизны элементов группы голономии. После эвристического обсуждения этой задачи доказывается дающая ответ теорема Амброза — Сингера. Для этого параллельный перенос, форму кривизны и группу голономии приходится определять для произвольных главных расслоений.

В лекции 21 теорема о существовании накрывающих горизонтальных кривых — необходимая для доказательства в общем случае теоремы Амброза—Сингера—доказывается для произвольных главных расслоений. Затем обсуждается альтернативное определение формы кривизны связности на главном расслоении, тождество Биянки и структурное уравнение Картана. Лекция завершается изложением кватернионной конструкции инстантонов.

На этом изложение дифференциальной геометрии по существу заканчивается и в лекции 22 после краткого экскурса в теорию калибровочных полей Янга—Миллса мы снова возвращаемся к топологии. В этой и следующей лекции излагается принадлежащая Вейлю дифференциально-геометрическая теория характеристических классов и основные идеи теории K-групп. В лекции 24 доказывается—с лакунами—теорема Адамса о четности инварианта Хопфа при $n \neq 2$, 4 и 8 и подробно обсуждаются ее различные алгебраические эквиваленты.

В лекции 25 обсуждаются расслоения над сферами и в этой связи вводятся гомотопические группы.

В лекции 26 вычисляются группы $\pi_n \mathbb{S}^m$ при $n \leqslant m$ и доказывается теорема Хопфа об отображении многообразий в сферы той же размерности.

В заключительной лекции 27 излагается—с большими лакунами—методика вычисления $K_{\mathbb{C}}$-групп сфер и их применение к проблеме инварианта Хопфа.

Центральное место в книге занимают лекции 6, 10, 11 и 19. В современном—сокращенном до предела—курсе геометрии на мехмате (см. предисловие к Семестру III) приходится ограничиваться только ими (и частью материала лекций 5 и 12) и сразу переходить к римановой геометрии. Выше на схеме эти лекции выделены черным.

Как уже было сказано, римановой геометрии (и смежным вопросам) будет посвящен следующий том.