Лекция 1

ГЛАДКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ. — ОСЛАБЛЕНИЕ УСЛОВИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ГРУППЫ ЛИ. — ПРИМЕРЫ ГРУПП ЛИ. — ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЭЛИ. — ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ГРУПП ЛИ. — СВЯЗНЫЕ И ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ГРУППЫ. — РЕДУКЦИЯ ЛЮБЫХ ГЛАДКИХ ГРУПП К СВЯЗНЫМ. — ПРИМЕРЫ СВЯЗНЫХ ГРУПП ЛИ.

Пусть G — одновременно группа и гладкое многообразие[1]).

Определение 1. Группа G называется *группой Ли* (или *гладкой группой*), если отображения

$$G \times G \to G, \qquad (a, b) \mapsto ab, \tag{1}$$

и

$$G \to G, \qquad a \mapsto a^{-1}, \tag{2}$$

являются гладкими отображениями.

Пусть G и H — группы Ли. Отображение $G \to H$ называется *морфизмом* групп Ли (или их *гладким гомоморфизмом*), если оно является их гомоморфизмом как абстрактных групп и гладким отображением как многообразий.

Ясно, что все группы Ли и все их гомоморфизмы образуют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом GR-DIFF.

---

[1]) Мы предполагаем известными начальные сведения из теории гладких многообразий в объеме программы обязательного курса геометрии третьего семестра мехмата МГУ. До выхода в свет «Семестра III» этих «Лекций» читатель может познакомиться с ними по любому из многочисленных существующих изложений.

Необходимые сведения из теории групп см., например, в книге: Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1978.

Замечание 1. Собственно говоря, имеется счетное семейство категорий GR-DIFF в зависимости от того, какой класс гладкости C^r (где либо $2 \leqslant r \leqslant \infty$, либо $r = \omega$) мы требуем от рассматриваемых многообразий. Однако на самом деле от r ничего фактически не зависит, поскольку, как будет показано в лекции 7, любая C^r-гладкая группа C^r-изоморфна аналитической (класса C^ω) группе.

Замечание 2. Некоторые авторы находят тонкие различия между группами Ли и гладкими (в частности, аналитическими) группами. Мы будем оба термина рассматривать как синонимичные, отдавая предпочтение первому как более распространенному и традиционному.

Аналогично группа G, одновременно являющаяся топологическим пространством, называется *топологической группой*, если отображения (1) и (2) для нее непрерывны. Гомоморфизм $G \to H$ топологических групп называется *непрерывным*, если он является непрерывным отображением. Топологические группы и их непрерывные гомоморфизмы составляют категорию GR-TOP.

Напомним, что топологическое пространство M называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если любые две его различные точки обладают непересекающимися окрестностями, т. е., иначе говоря, если *диагональ* Δ (подмножество произведения $M \times M$, состоящее из точек вида (x, x), $x \in M$) замкнута в M. От топологической группы (так же, как от гладкого многообразия) мы, вообще говоря, хаусдорфовости не требуем.

Лемма 1. Топологическая группа G тогда и только тогда хаусдорфова, когда ее единица замкнута.

Доказательство. В хаусдорфовом пространстве любая точка замкнута, так что это условие необходимо. Но, поскольку диагональ $\Delta \subset G \times G$ является прообразом единицы при непрерывном отображении $G \times G \to G$, $(a, b) \longmapsto ab^{-1}$, оно и достаточно. □

Следствие. Каждая группа Ли является хаусдорфовой топологической группой. □

В определении гладких групп условие гладкости отображения (2) на самом деле излишне:

Предложение 1. Если для группы G, одновременно являющейся гладким многообразием, отображение (1)

гладко, то отображение (2) *также гладко, и, значит, группа G является группой Ли.*

Заметим, что для топологических групп аналогичное утверждение неверно.

Ключом к доказательству предложения 1 служит следующая лемма из теории гладких многообразий:

Лемма 2. *Пусть M, N и R — гладкие многообразия, и пусть*

$$\varphi\colon M \times R \to N$$

— такое гладкое отображение, что для любой точки $r \in R$ отображение

$$\varphi_r\colon M \to N, \quad x \mapsto \varphi(x, r), \qquad x \in M,$$

является диффеоморфизмом многообразия M на многообразие N. Тогда отображение

$$\psi\colon N \times R \to M,$$

определенное формулой

$$\psi(y, r) = \varphi_r^{-1}(y), \quad y \in N, \qquad r \in R,$$

является гладким отображением.

Доказательство. Пусть отображения

$$\Phi\colon M \times R \to N \times R, \qquad \Psi\colon N \times R \to M \times R$$

определены соответственно формулами

$$\Phi(x, r) = (\varphi(x, r), r) = (\varphi_r(x), r), \qquad x \in M, \quad r \in R,$$

$$\Psi(y, r) = (\psi(y, r), r) = (\varphi_r^{-1}(y), r), \qquad y \in N, \quad r \in R.$$

Ясно, что эти отображения тогда и только тогда гладки, когда гладки соответственно отображения φ и ψ. Таким образом, по условию отображение Φ гладко, и нам нужно доказать, что гладко отображение Ψ.

С этой целью мы заметим, что, по определению,

$$(\Psi \circ \Phi)(x, r) = \Psi(\varphi_r(x), r) = (\varphi_r^{-1}(\varphi_r(x)), r) = (x, r)$$

для любой точки $(x, r) \in M \times R$ и аналогично

$$(\Phi \circ \Psi)(y, r) = \Phi(\varphi_r^{-1}(y), r) = (\varphi_r(\varphi_r^{-1}(y)), r) = (y, r)$$

для любой точки $(y, r) \in N \times R$. Это означает, что отображения Φ и Ψ обратны друг к другу и, значит, оба являются биективными отображениями.

Поэтому утверждение о гладкости отображения Ψ равносильно утверждению, что гладкое биективное отображение Φ является диффеоморфизмом.

Но ясно, что гладкое биективное отображение тогда и только тогда является диффеоморфизмом, когда оно является локальным диффеоморфизмом, т. е. представляет собой этальное отображение (обладает тем свойством, что в каждой точке его дифференциал является изоморфизмом).

Итак, все свелось к вычислению в каждой точке $(a, r) \in M \times R$ дифференциала $(d\Phi)_{(a, r)}$ отображения Φ, который мы можем рассматривать как линейное отображение вида [1])

3) $\mathsf{T}_a(M) \oplus \mathsf{T}_r(R) \to \mathsf{T}_b(N) \oplus \mathsf{T}_r(R)$, где $b = \varphi(a, r)$.

Наглядно каждое отображение (3) задается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$A\colon \mathsf{T}_a(M) \to \mathsf{T}_b(N), \qquad B\colon \mathsf{T}_r(R) \to \mathsf{T}_b(N),$$
$$C\colon \mathsf{T}_a(M) \to \mathsf{T}_r(R), \qquad D\colon \mathsf{T}_r(R) \to \mathsf{T}_r(R)$$

— очевидным образом определяющиеся линейные отображения. В частности, для отображения $(d\Phi)_{(a, r)}$ отображение A является не чем иным, как дифференциалом в точке a отображения $\varphi_r\colon M \to N$, отображение C — дифференциалом постоянного отображения (и, следовательно, представляет собой нулевое отображение), а отображение D — дифференциалом тождественного отображения (и, следовательно, — также тождественным отображением). Таким образом, для дифференциала $(d\Phi)_{(a, r)}$ матрица (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} (d\varphi_r)_a & B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

---

[1]) Символом $\mathsf{T}_x(M)$ мы обозначаем касательное пространство многообразия M в точке $x \in M$.

(отображение B нас не интересует). Поскольку дифференциал $(d\varphi_r)_a$ является в силу условия леммы изоморфизмом, отсюда следует, что дифференциал $(d\Phi)_{(a,r)}$ также представляет собой изоморфизм. □

Для каждой группы G любой элемент $a \in G$ определяет по формулам

$$L_a x = ax, \quad R_a x = xa, \qquad x \in G,$$

два отображения

$$L_a\colon G \to G, \qquad R_a\colon G \to C,$$

которые называются *сдвигами на элемент* a (отображение L_a — *левым сдвигом*, а отображение R_a — *правым сдвигом*).

Следующие свойства сдвигов очевидны:

$$L_e = R_e = \mathrm{id}, \text{ где } e \text{ — единица группы } G$$

(это в точности утверждение, что e является единицей);

$$L_b \circ L_a = L_{ba}, \quad R_b \circ R_a = R_{ab}, \quad L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$$

(каждое из этих равенств равносильно ассоциативности умножения в группе).

В частности (поскольку $L_a \circ L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} \circ L_a = L_e = \mathrm{id}$ и $R_a \circ R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} \circ R_a = R_e = \mathrm{id}$), мы видим, что каждый сдвиг является биективным отображением, причем

$$L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, \qquad R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$$

для любого элемента $a \in G$.

Если G — топологическая (гладкая) группа, то отображения L_a и R_a непрерывны (гладки) и потому являются гомеоморфизмами (диффеоморфизмами).

Теперь у нас все готово для доказательства предложения 1.

Доказательство предложения 1. Гладкость отображения (1) влечет гладкость сдвигов L_a, а значит, и тот факт, что они являются диффеоморфизмами. При этом соответствующее отображение L: $(x, a) \longmapsto L_a(x) = ax$ является не чем иным, как отображением (1) и потому гладко. Таким образом, мы

находимся в условиях леммы 1 (при $M = N = R = G$), и, следовательно, согласно этой лемме отображение

$$L': G \times G \to G,$$

определенное формулой

$$L'(x, a) = L_a^{-1}(x) = a^{-1}x,$$

гладко. Для завершения доказательства остается заметить, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ является композицией гладкого отображения $G \to G \times G$, $a \mapsto (e, a)$, и отображения L'. Поэтому оно тоже гладко. □

Примеры групп Ли.

Пример 1. Любая абстрактная (дискретная топологическая) группа будет группой Ли по отношению к гладкости, в которой она является нульмерным многообразием.

Пример 2. Любое конечномерное линейное пространство является группой Ли по сложению.

Пример 3. Единичная окружность S^1: $|z| = 1$, точками которой являются комплексные числа $z = e^{i\theta}$, является группой Ли по умножению.

Аналогично группой Ли по умножению является *единичная сфера* S^3 в пространстве кватернионов, точками которой являются кватернионы ζ, для которых $|\zeta| = 1$.

Можно показать, что если сфера S^n является группой Ли, то необходимо $n = 1$ или $n = 3$, так что S^1 и S^3 являются единственными сферами, допускающими структуру группы Ли.

Пример 4. Прямое произведение $G \times H$ двух гладких (или топологических) групп G и H является гладкой (соответственно топологической) группой.

В частности, группой Ли будет любой тор T^n, $n \geqslant 1$.

Пример 5. Группой Ли является полная линейная группа $GL(n)$. Группой Ли будет и изоморфная ей группа $\mathrm{Aut}\,\mathscr{V}$ всех автоморфизмов (невырожденных линейных операторов) произвольного n-мерного линейного пространства $\mathscr{V}$.

Чтобы получить более содержательные примеры, необходимо предварительно рассмотреть одну общую конструкцию.

Определение 2. Матрица A порядка n называется *неисключительной*, если $\det(E+A)\neq 0$. Для такой матрицы существует матрица

$$A^{\#}=(E-A)(E+A)^{-1},$$

называемая ее *кэли-образом*.

Ясно, что множество $\mathbb{R}(n)^0$ всех неисключительных матриц открыто в многообразии $\mathbb{R}(n)=\mathbb{R}(n,n)$ всех квадратных $n\times n$-матриц и потому является гладким многообразием.

Предложение 2. *Отображение $A\longmapsto A^{\#}$ является инволютивным автодиффеоморфизмом многообразия $\mathbb{R}(n)^0$, т. е. для любой неисключительной матрицы A матрица $A^{\#}$ также неисключительна, отображение $A\longmapsto A^{\#}$ многообразия $\mathbb{R}(n)^0$ в себя гладко и кэли-образ матрицы $A^{\#}$ совпадает с матрицей A:*

$$A^{\#\#}=A.$$

Доказательство. Пусть $B=A^{\#}$. Тогда

$$\begin{aligned}E+B&=E+(E-A)(E+A)^{-1}=\\&=[(E+A)+(E-A)](E+A)^{-1}=\\&=2(E+A)^{-1},\end{aligned}$$

и аналогично

$$E-B=2A(E+A)^{-1}.$$

Поэтому, во-первых, $\det(E+B)\neq 0$ и, во-вторых,

$$B^{\#}=(E-B)(E+B)^{-1}=A.$$

Гладкость отображения $A\longmapsto A^{\#}$ очевидна. □

Дальнейшие примеры групп Ли.

Пример 6. Пусть, как всегда, $O(n)$ — группа всех ортогональных матриц порядка n. Покажем, что в группу $O(n)$ естественным образом вводится гладкость, по отношению к которой она является группой Ли.

Пусть A — неисключительная ортогональная матрица, и пусть $B=A^{\#}$. Тогда $A^{\top}=A^{-1}$, и потому,

согласно известным правилам обращения с транспонированными матрицами,

$$\begin{aligned} B^{\mathrm{T}} &= (E+A^{\mathrm{T}})^{-1}(E-A^{\mathrm{T}}) = (E+A^{-1})^{-1}(E-A^{-1}) = \\ &= (E+A^{-1})^{-1}A^{-1}A(E-A^{-1}) = \\ &= (A(E+A^{-1}))^{-1}(A-E) = \\ &= (A+E)^{-1}(A-E) = -(E-A)(E+A)^{-1} = -B. \end{aligned}$$

Обратно, если $B^{\mathrm{T}} = -B$, то

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}} &= (E+B^{\mathrm{T}})^{-1}(E-B^{\mathrm{T}}) = (E-B)^{-1}(E+B) = \\ &= (E+B)(E-B)^{-1} = A^{-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, матрица A ортогональна. Таким образом, мы видим, что *неисключительная матрица тогда и только тогда ортогональна, когда ее кэли-образ является кососимметрической матрицей.*

Поскольку кососимметрические матрицы образуют линейное пространство $\left(\text{размерности } \frac{n(n-1)}{2}\right)$, мы получаем, следовательно, что отображение $A \longmapsto A^{\#}$ может быть рассматриваемо как картирующее отображение; соответствующей координатной окрестностью служит совокупность $\mathrm{O}(n)^0$ всех ортогональных неисключительных матриц (содержащая, очевидно, единичную матрицу E), а ее образом — совокупность всех кососимметрических неисключительных матриц.

Пусть теперь C — произвольная ортогональная матрица. Множество $\mathrm{O}(n)^0C$, состоящее из всех матриц вида AC, где $A \in \mathrm{O}(n)^0$, содержит матрицу C и является ее окрестностью. Отображение же $AC \longmapsto A^{\#}$ представляет собой картирующее отображение этой окрестности на открытое множество неисключительных кососимметрических матриц порядка n. Тем самым вся группа $\mathrm{O}(n)$ оказывается покрытой картами вида $\mathrm{O}(n)^0C$. Если же $A_1C_1 = A_2C_2$, где $A_1, A_2 \in \mathrm{O}(n)^0$, а C_1, C_2 — фиксированные матрицы, то $A_2^{\#} = f(A_1^{\#})$, где f — некоторая рациональная матричная функция, зависящая от C_1, C_2. Явное выражение для f выписывается без

труда, но в нем нет нужды, поскольку для наших целей достаточно очевидного замечания, что каждый элемент матрицы $A^{\#}$ является рациональной, а значит, и гладкой функцией элементов матрицы $A_1^{\#}$. Из этого замечания следует, что любые две карты вида $O(n)^{\mathbb{0}}C$ согласованы друг с другом и, следовательно, все они составляют атлас. Так как кэли-образ произведения двух матриц является, очевидно, рациональной функцией кэли-образов сомножителей, то соответствующая гладкость на $O(n)$ согласована с умножением, т. е. *снабженная этой гладкостью группа $O(n)$ является группой Ли.*

Трюк с кэли-образами имеет, как легко видеть, весьма общий характер. Действительно, во всем сказанном выше специфика ортогональных матриц использовалась только в том, что кэли-образы неисключительных ортогональных матриц составляют открытое множество линейного пространства. Поэтому *матричная группа будет группой Ли, если кэли-образы ее неисключительных матриц составляют открытое множество некоторого линейного пространства матриц.*

О матричных группах, обладающих этим свойством, мы будем говорить, что они *допускают конструкцию Кэли*, а соответствующее линейное пространство матриц будем называть *кэли-образом* группы.

Пример 7. Матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

четного порядка $n = 2m$ называется *симплектической матрицей*, если:

а) матрицы $A_1^{\top}A_3$ и $A_2^{\top}A_4$ симметричны;

б) имеет место равенство

$$A_1^{\top}A_4 - A_3^{\top}A_2 = E.$$

Эти условия равносильны одному матричному равенству

(5) $$A^{\top}JA = J,$$

где

(6) $$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Симплектичность матрицы означает, что она сохраняет билинейную кососимметрическую форму

$$(x_1y_{n+1} - x_{n+1}y_1) + \ldots + (x_ny_{2n} - x_{2n}y_n).$$

Более общим образом можно рассмотреть матрицы A, удовлетворяющие соотношению (5) при произвольной (но фиксированной) матрице J. При $J = E$ получаются ортогональные матрицы ($A^\top A = E$), и на этом основании матрицы A, удовлетворяющие при данной матрице J соотношению (5), называются *J-ортогональными матрицами*. Таким образом, симплектические матрицы — это J-ортогональные матрицы, соответствующие матрице J вида (6).

Из соотношения

$$(AB)^\top J(AB) = B^\top (A^\top JA) B$$

непосредственно вытекает, что произведение двух J-ортогональных матриц является J-ортогональной матрицей. Если матрица J не вырождена, то, переходя в равенстве (5) к определителям, мы немедленно получим, что $\det A = \pm 1$ и, в частности, что любая J-ортогональная матрица обратима. При этом ввиду равенства

$$(A^{-1})^\top JA^{-1} = (A^{-1})^\top (A^\top JA) A^{-1} = J,$$

обратная матрица A^{-1} также будет J-ортогональной матрицей. Этим доказано, что *при невырожденной матрице J все J-ортогональные матрицы образуют группу*. В частности, группу образуют симплектические матрицы.

Мы будем обозначать группу J-ортогональных матриц порядка n символом $O_J(n)$, а группу симплектических матриц порядка $n = 2m$ символом $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$.

Группа $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$ называется *вещественной линейной симплектической группой*.

Легко видеть, что *неисключительная матрица A тогда и только тогда J-ортогональна, когда ее кэли-образ $A^\#$ является J-кососимметрической матрицей*, т. е. удовлетворяет соотношению

$$(A^\#)^\top J = -JA^\#. \tag{7}$$

Действительно, если выполнено соотношение (5), то

$$\begin{aligned}(A^{\#})^{\mathsf{T}} J &= (E + A^{\mathsf{T}})^{-1}(E - A^{\mathsf{T}}) J = \\ &= (E + JA^{-1}J^{-1})^{-1}(E - JA^{-1}J^{-1}) J = \\ &= J(A^{-1}A + A^{-1})^{-1}(A^{-1}A - A^{-1}) = \\ &= J(A + E)^{-1}(A - E) = -JA^{\#}.\end{aligned}$$

Обратно, из (7) следует (мы полагаем $B = A^{\#}$ и пользуемся соотношением $B^{\#} = A$), что

$$\begin{aligned}A^{\mathsf{T}} JA &= (E + B^{\mathsf{T}})^{-1}(E - B^{\mathsf{T}}) J \cdot (E - B)(E + B)^{-1} = \\ &= (E + B^{\mathsf{T}})^{-1} \cdot J(E + B) \cdot (E + B)^{-1}(E - B) = \\ &= (E + B^{\mathsf{T}})^{-1} \cdot J(E - B) = (E + B^{\mathsf{T}})^{-1} \cdot (E + B^{\mathsf{T}}) J = \\ &= J. \quad \square\end{aligned}$$

Поскольку условие (7) линейно и потому определяет в пространстве всех матриц линейное подпространство, этим доказано, что *каждая группа* $O_J(n)$ (и, в частности, группа $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$) *допускает конструкцию Кэли и потому является группой Ли.*

Поскольку, как легко видеть, линейное пространство матриц, определяемое условием (7) (при матрице J, заданной формулой (6)), имеет размерность $m(2m+1)$, мы получаем, в частности, что *размерность группы* $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$ *равна* $m(2m+1)$.

Пример 8. Пересечение $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R}) \cap O(2m)$ называется *ортогональной симплектической группой.* Кэли-образы неисключительных матриц из этой группы имеют вид

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где D — симметрическая, а C — кососимметрическая матрицы. Поскольку матрицы вида (8) также составляют линейное пространство, *группа* $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R}) \cap O(2m)$ *является группой Ли.* Ее размерность равна m^2.

Пример 9. Группы Ли можно конструировать не только из вещественных, но и из комплексных матриц. Для любого $n \geqslant 1$ комплексное линейное пространство

$\mathbb{C}^n$ мы можем отождествить с пространством $\mathbb{R}^{2n}$, выписав в определенном, но фиксированном порядке вещественные и мнимые части компонент векторов из $\mathbb{C}^n$. Это вводит в пространство $\mathbb{C}^n$ (а значит, и в любое его открытое подмножество) строение гладкого многообразия размерности $2n$ (не зависящее, конечно, от порядка выписывания вещественных и мнимых частей компонент векторов из $\mathbb{C}^n$).

Множество $\mathbb{C}(n, m)$ всех комплексных $n \times m$-матриц отождествляется с $\mathbb{C}^{nm}$ и потому также оказывается гладким многообразием. Гладким многообразием будет и подмножество $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ множества $\mathbb{C}(n) = \mathbb{C}(n, n)$, состоящее из невырожденных матриц. Поскольку вещественные и мнимые части элементов произведения двух комплексных матриц являются гладкими функциями вещественных и мнимых частей элементов сомножителей, многообразие $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ является группой Ли (размерности $2n^2$).

Понятие кэли-образа со всеми его свойствами непосредственно переносится на комплексный случай. То же самое относится и к J-ортогональным матрицам. В частности, мы получаем, таким образом, *комплексные ортогональные* и *комплексные симплектические* матрицы. Они составляют группы Ли $\mathrm{O}(n; \mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{C})$ размерностей $n(n-1)$ и $2m(2m+1)$ соответственно.

Пример 10. Совсем другой тип комплексных матриц составляют *J-унитарные матрицы* A порядка n, характеризующиеся соотношением

$$\bar{A}^{\mathrm{T}} J A = J.$$

Они составляют группу $\mathrm{U}_J(n)$. При $J = E$ мы получаем обычные *унитарные матрицы* и их группу $\mathrm{U}(n)$. В случае, когда J является матрицей (6) (и $n = 2m$) группа $\mathrm{U}_J(n)$ общепринятого обозначения не имеет. Мы будем обозначать ее символом $\mathrm{Up}(m)$.

По существу, теми же выкладками, что и выше, без труда доказывается, что *неисключительная комплексная матрица A тогда и только тогда J-унитарна, когда ее кэли-образ $A^{\#}$ удовлетворяет соотношению*

$$(\bar{A}^{\#})^{\mathrm{T}} J = -J A^{\#}. \quad \square$$

Поскольку это соотношение линейно (над полем $\mathbb{R}$), *группа* $U_J(n)$ (*и, в частности, группа* $U(n)$ *и группа* $Up(m)$) *является группой Ли.* □

Размерность группы $U(n)$ равна n^2, а группы $Up(m)$ равна $4m^2$.

Заметим, что *группа* $U(n)$ *естественно изоморфна ортогональной симплектической группе* $Sp(n; \mathbb{R}) \cap O(2n)$. Изоморфизм осуществляется соответствием

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longmapsto A + iB.$$

Пересечение группы $U(2m)$ с группой $Sp(m; \mathbb{R})$ является, очевидно, ортогональной симплектической группой:

$$Sp(m; \mathbb{R}) \cap U(2m) = Sp(m; \mathbb{R}) \cap O(2m)$$

(и потому изоморфно группе $U(m)$).

Пример 11. Пересечение $Sp(m; \mathbb{C}) \cap U(2m)$ называется *унитарной симплектической группой* (или просто *симплектической группой*) и обозначается символом $Sp(m)$. Это — группа Ли размерности $m(2m+1)$.

Пересечение группы $Sp(m)$ с группой $O(2m)$ является ортогональной симплектической группой $Sp(m) \cap O(2m)$.

Пример 12. Группу $U(m)$ можно интерпретировать как группу всех обратимых линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющих эрмитову форму $x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$. Аналогичным образом, заменив поле $\mathbb{C}$ телом кватернионов $\mathbb{H}$, мы можем ввести в рассмотрение группу $U^{\mathbb{H}}(n)$ всех обратимых и линейных (по отношению, скажем, к умножению слева) преобразований кватернионного пространства $\mathbb{H}^n$, сохраняющих кватернионную эрмитову форму

$$(\xi, \eta) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{H}^n$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{H}^n$.

Поскольку любой кватернион ξ можно отождествить с парой (u, v) комплексных чисел (по формуле $\xi = u + vj$) и, значит, пространство $\mathbb{H}^n$ — с пространством $\mathbb{C}^{2n}$,

группа $U^{\mathbb{H}}(n)$ естественно интерпретируется как группа комплексных матриц. Если

$$\xi_1 = x_1 + x_{n+1}j, \quad \ldots, \quad \xi_n = x_n + x_{2n}j,$$
$$\eta_1 = y_1 + y_{n+1}j, \ldots, \quad \eta_n = y_n + y_{2n}j,$$

то (поскольку $\overline{u + vj} = \bar{u} - vj$ и $vj = j\bar{v}$)

$$\xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n =$$
$$= [x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n + x_{n+1}\bar{y}_{n+1} + \ldots + x_{2n}\bar{y}_{2n}] +$$
$$+ [(x_{n+1}y_1 - x_1y_{n+1}) + \ldots + (x_{2n}y_n - x_ny_{2n})]\, j.$$

Поэтому каждый элемент группы $U^{\mathbb{H}}(n)$, интерпретированный как комплексная матрица, сохраняет эрмитову форму $x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_{2n}\bar{y}_{2n}$ (является унитарной матрицей) и кососимметрическую форму $(x_{n+1}y_1 - x_1y_{n+1}) + \ldots + (x_{2n}y_n - x_ny_{2n})$ (является симплектической матрицей), т. е. принадлежит унитарной симплектической группе $\mathrm{Sp}(n)$. Обратно, если матрица A унитарна и симплектична, то, интерпретированная как преобразование пространства $\mathbb{H}^n$, она, очевидно, сохраняет форму $\xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n$. Кроме того, это преобразование линейно. Действительно, оно, очевидно, переводит сумму в сумму, так что доказательства требует лишь его перестановочность с операцией умножения на произвольный кватернион ζ. Но для любых векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{H}^n$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{H}^n$ мы имеем

$$(A(\zeta\xi) - \zeta A\xi, A\eta) = (A(\zeta\xi), A\eta) - \zeta(A\xi, A\eta) =$$
$$= (\zeta\xi, \eta) - \zeta(\xi, \eta) = 0,$$

откуда следует (поскольку в виде $A\eta$ может быть представлен любой вектор из $\mathbb{H}^n$), что $A(\zeta\xi) = \zeta A\xi$.

Тем самым доказано, что *группа* $U^{\mathbb{H}}(n)$ *изоморфна унитарной симплектической группе* $\mathrm{Sp}(n)$. □

Напомним, что топологическое пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых дизъюнктных и замкнутых (открытых) множеств, и *линейно связным*, если для лю-

бых точек a, $b \in X$ существует соединяющий их *путь*, т. е. такое непрерывное отображение u: $[0, 1] \to X$, что $u(0) = a$, $u(1) = b$. Наглядно очевидно (и легко доказывается в рамках любой строгой теории вещественных чисел), что *отрезок* $[0, 1]$ *связен*, откуда непосредственно вытекает, что *любое линейно связное пространство связно.*

Очевидно, что множество всех (линейно) связных подмножеств произвольного топологического пространства X индуктивно (удовлетворяет условиям леммы Цорна). Поэтому каждая точка $a \in X$ содержится в максимальном связном подмножестве C_a, называемом *компонентой* (*линейной*) *связности* пространства X. Легко видеть, что любая компонента связности $C_a \subset X$ замкнута в X (но, вообще говоря, не открыта). Пространство X тогда и только тогда (линейно) связно, когда $C_a = X$ для любой точки $a \in X$.

Топологическое пространство X называется *локально* (*линейно*) *связным*, если каждая точка $a \in X$ обладает фундаментальной системой (линейно) связных окрестностей, т. е., иными словами, если в каждой окрестности точки a содержится (линейно) связная окрестность. Примером локально линейно связного пространства является произвольное многообразие.

В локально (линейно) связном пространстве любая компонента (линейной) связности, очевидно, открыта (ибо вместе с каждой точкой содержит и некоторую ее окрестность). В частности, отсюда следует, что *если пространство связно и локально линейно связно, то оно и линейно связно.* Иными словами, для локально линейно связных пространств (в частности, для многообразий) концепции связности и линейной связности совпадают.

Пример 13. Многообразия $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}(n, m)$, очевидно, связны. Многообразие $\mathrm{GL}(n)$ не связно: матрицу с отрицательным определителем нельзя непрерывно продеформировать (соединить путем) в единичную матрицу. Пусть $\mathrm{GL}^+(n)$ — пространство всех квадратных матриц порядка n с положительным определителем. Покажем, что *пространство* $\mathrm{GL}^+(n)$ *связно.*

Согласно теореме о полярном разложении (см. II, 21) любой невырожденный оператор является произведе-

нием положительного оператора $\boldsymbol{P}$ и изометричного (ортогонального) оператора $\boldsymbol{U}$. На языке матриц это означает, что любая невырожденная матрица A имеет вид $A = PU$, где P — матрица положительного оператора, а U — ортогональная матрица. С другой стороны, по теореме о приведении к главным осям матрица P имеет вид VDV^{-1}, где V — ортогональная матрица, а D — диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Следовательно, $A = VDV^{-1}U$, т. е. $A = VDW$, где $W = V^{-1}U$. Но ясно, что соответствие $t \mapsto (1-t)D + tE$ представляет собой непрерывный путь в $\mathrm{GL}(n)$, соединяющий матрицу D с единичной матрицей E. Умножив этот путь справа и слева на ортогональные матрицы V и W, мы получим непрерывный путь, соединяющий в $\mathrm{GL}(n)$ матрицу A с ортогональной матрицей $B = VW$. Таким образом, *любая невырожденная матрица A может быть непрерывным путем соединена в $\mathrm{GL}(n)$ с ортогональной матрицей B.* Если $\det A > 0$, то $\det B > 0$, т. е. $\det B = 1$ (ортогональная матрица с положительным определителем унимодулярна). Поэтому для доказательства связности группы $\mathrm{GL}^+(n)$ достаточно доказать, что *любая унимодулярная ортогональная матрица B может быть непрерывным путем соединена (в группе $\mathrm{GL}^+(n)$) с единичной матрицей E.* Мы докажем даже большее, а именно, что *это соединение может быть осуществлено в группе $\mathrm{SO}(n)$ всех унимодулярных ортогональных матриц.* С этой целью заметим, что, согласно основной теореме об ортогональных операторах (см. II, 21), каждый унимодулярный (т. е. сохраняющий ориентации) ортогональный оператор (вращение) является прямой суммой тождественного оператора и «двумерных вращений» с матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Заменив в каждой из этих матриц угол θ на угол $t\theta$, мы получим непрерывное семейство (путь) ортогональных операторов, связывающее данный оператор (получающийся при $t = 1$) с тождественным оператором (получающимся при $t = 0$). Для завершения доказательства остается перейти от операторов к матрицам. □

Доказанное утверждение означает, что *группа* $GL(n)$ *состоит из двух компонент*: подгруппы $GL^+(n)$ и ее смежного класса $GL^-(n)$, состоящего из матриц с отрицательным определителем.

Для каждой топологической группы G мы будем символом G_e обозначать компоненту ее единицы e. Если $a \in G_e$, то $a \in L_a(G_e)$ (ибо $e \in G_e$) и, значит, $G_e \cap \cap L_a(G_e) \neq \varnothing$. Поэтому в виду связности и максимальности $L_a(G_e) = G_e$. Аналогично доказывается, что $R_a(G_e) = G_e$, если $a \in G_e$, и что $G_e^{-1} = G_e$. Это значит, что G_e является подгруппой группы G. Более того, любой эндоморфизм T группы G переводит G_e в связную подгруппу $T(G_e)$, пересекающуюся с G_e. Поэтому, по тем же соображениям, $T(G_e) \subset G_e$. Это значит, что *компонента единицы* G_e *является вполне характеристической подгруппой группы* G *и, в частности, инвариантна.*

Согласно сказанному выше компонентой единицы группы $GL(n)$ является группа $GL^+(n)$.

Заметим, что для каждой гладкой группы G компонента G_e автоматически является гладкой группой.

В факторгруппу G/G_e естественно ввести топологию отождествления, т. е. топологию, в которой подмножество $C \subset G/G_e$ открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда открыт (замкнут) его полный прообраз в G. Поскольку прообразом единицы группы G/G_e является компонента G_e, мы видим, в частности, что единица факторгруппы G/G_e тогда и только тогда изолирована (является открыто замкнутым множеством), т. е., другими словами, факторгруппа G/G_e тогда и только тогда дискретна, когда компонента G_e открыта (она всегда замкнута). В частности, это заведомо так, если группа G локально связна (например, является гладкой группой).

Таким образом, *любая локально связная (в частности, любая гладкая) группа* G *является расширением связной группы (ее компоненты единицы* G_e*) посредством дискретной группы* G/G_e.

В этом смысле теория любых локально связных групп сводится к теории связных групп и к теории дискретных (абстрактных) групп.

На этом основании мы в общей теории всегда будем считать все рассматриваемые группы Ли связными.

Пример 14. Согласно сказанному выше *группа* $SO(n)$ *связна* и, значит, является компонентой единицы группы $O(n)$. В частности, мы видим, что *группа* $SO(n)$ *является группой Ли.*

Вместе с тем мы получаем, что *группа* $O(n)$ *не связна* и состоит из двух компонент: группы $SO(n) = O^+(n)$ собственных (унимодулярных) ортогональных матриц и ее смежного класса $O^-(n)$, элементами которого являются несобственные (с определителем -1) ортогональные матрицы.

Пример 15. Напротив, *группа* $U(n)$ *связна.* Действительно, мы знаем (см. II, 21), что любой унитарный оператор ортогонально диагонализируем, причем все его собственные значения равны по модулю единице. На языке матриц это означает, что любая унитарная матрица имеет вид UDU^{-1}, где U — некоторая унитарная матрица, а D — диагональная матрица с диагональными элементами вида $e^{i\theta_k}$. Заменив все углы θ_k на $t\theta_k$, мы получим непрерывное семейство (путь) унитарных матриц, связывающее данную матрицу, получающуюся при $t = 1$, с единичной матрицей, получающейся при $t = 0$. (См. выше аналогичное рассуждение для ортогональных матриц.) □

Связность группы $U(n)$ можно доказать и по-другому, на основе следующей общей леммы:

Лемма 3. *Топологическая группа G связна, если она содержит связную подгруппу H со связным факторпространством G/H.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что *естественное отображение* π: $G \to G/H$ *открыто*, т. е. переводит открытые множества в открытые. Действительно, если $U \subset G$, то по определению фактортопологии множество $\pi(U) \subset G/H$ тогда и только тогда открыто, когда открыто множество $\pi^{-1}(\pi(U)) \subset G$. Но ясно, что последнее множество является объединением $\bigcup\limits_{x \in U} xH$ всех смежных классов xH, $x \in U$, и потому совпадает с объединением $\bigcup\limits_{h \in H} Uh$ всех сдвигов множества U на эле-

менты $h \in H$. Поэтому, если U, а значит, и любое Uh открыто, то множество $\pi^{-1}(\pi(U))$, а потому и множество $\pi(U)$, открыто.

Пусть теперь $G = U \cup V$, где U и V — непустые открытые множества. Тогда $G/H = \pi(U) \cup \pi(V)$, где множества $\pi(U)$ и $\pi(V)$ также не пусты и открыты. Поэтому и $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \varnothing$ (ибо пространство G/H по условию связно). Пусть $\pi(a) \in \pi(U) \cap \pi(V)$. Включение $\pi(a) \in \pi(U)$ означает, что смежный класс $\pi(a) = aH$ пересекается с U, а включение $\pi(a) \in \pi(V)$, — что этот смежный класс пересекается с V. При этом $aH = U_1 \cap V_1$, где $U_1 = aH \cap U$ и $V_1 = aH \cap V$ открыты в aH (и по доказанному не пусты). Поскольку aH (вместе с H) связно, это возможно только тогда, когда $U_1 \cap V_1 \neq \varnothing$ и, значит, $U \cap V \neq \varnothing$. Следовательно, группа G связна. □

Чтобы применить эту лемму, мы рассмотрим отображение $\mathrm{U}(n) \to \mathbb{C}^n$, сопоставляющее каждой матрице ее последний столбец. Образ группы $\mathrm{U}(n)$ при этом отображении состоит из всех векторов пространства $\mathbb{C}^n$ длины 1 и, значит, может быть отождествлен с единичной $(2n-1)$-мерной сферой S^{2n-1} пространства $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Прообраз каждого такого вектора в $\mathrm{U}(n)$ является, очевидно, смежным классом по подгруппе $\mathrm{U}(n-1)$, являющейся прообразом вектора $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Следовательно, рассматриваемое отображение индуцирует биективное отображение $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) \to S^{2n-1}$ факторпространства $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)$ на сферу S^{2n-1}, являющееся, как автоматически проверяется, гомеоморфизмом (любое биективное непрерывное отображение на компакт представляет собой гомеоморфизм).

Поскольку сфера $S^{2n-1} = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)$ очевидным образом связна, из леммы 2 немедленно вытекает, что группа $\mathrm{U}(n)$ связна, если связна группа $\mathrm{U}(n-1)$. Поскольку группа $\mathrm{U}(1)$ естественным образом отождествляется с группой $\mathbb{S}^1$ и потому связна, тем самым по индукции связность всех групп $\mathrm{U}(n)$ оказывается заново доказанной.

Пример 16. Аналогичное рассуждение применимо и к симплектической группе $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$. В этом случае факторпространство $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1)$ естественным образом отождествляется с единичной сферой S^{4n-1} пространства $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ и потому также связно. Группа же

$\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{U}^{\mathbb{H}}(1)$ отождествляется с группой S^3 кватернионов ξ, для которых $|\xi| = 1$. Следовательно, *для любого* $n \geqslant 1$ *группа* $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ *связна.*

Это же рассуждение можно применить и к группе $\mathrm{SO}(n)$, связность которой мы выше установили на основании других соображений. Действительно, в этом случае факторпространство $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ тем же способом отождествляется с единичной сферой S^{n-1} пространства $\mathbb{R}^n$, которая при $n \geqslant 2$ связна. Кроме того, группа $\mathrm{SO}(2)$ вращений плоскости изоморфна, как известно, группе S^1 и потому также связна. Поэтому *группа* $\mathrm{SO}(n)$ *при* $n \geqslant 2$ *связна.*

Аналогом группы $\mathrm{SO}(n)$ в группе $\mathrm{U}(n)$ является подгруппа $\mathrm{SU}(n)$ *унимодулярных унитарных матриц.* Поскольку, как легко видеть, $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)$, а группа $\mathrm{SU}(1)$, являясь единичной группой, связна, то же рассуждение показывает, что *для любого* $n \geqslant 1$ *группа* $\mathrm{SU}(n)$ *связна.* Однако установить, будет ли она группой Ли, мы сможем только в лекции 3, после того как разовьем необходимые для этого средства.

То же самое относится и к группе $\mathrm{SL}(n)$ всех унимодулярных матриц.

Заметим, что для группы $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ никакого аналога группы $\mathrm{SU}(n)$ не существует.