

Лекция 2

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ.—ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОСТЬ ГРУПП ЛИ.—ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ.—ФУНКТОР ЛИ.—ПРИМЕР: ГРУППА ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ.—ФУНКЦИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЕ.—ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ G (\mathcal{A})

Напомним, что символом $T_a(M)$ мы обозначаем касательное пространство многообразия M в точке $a \in M$. Все касательные пространства $T_a(M)$, $a \in M$, составляют гладкое $2n$ -мерное ($n = \dim M$) многообразие $T(M)$, естественным образом проектирующееся на M . Проекция

$$\pi: T(M) \rightarrow M$$

относит каждому вектору A его «точку приложения», т. е. точку $a \in M$, для которой $A \in T_a(M)$, так что $T_a(M) = \pi^{-1}(x)$. Сечения этой проекции, т. е. гладкие отображения

$$X: M \rightarrow T(M), \quad a \mapsto X_a, \quad a \in M,$$

для которых $\pi \circ X = \text{id}$, т. е. $X_a \in T_a(M)$, называются *векторными полями на M* . Эти векторные поля естественным образом образуют линейное (бесконечномерное) пространство. Мы будем обозначать это пространство символом $\mathfrak{a}(M)$.

Дифференциалы $(d\Phi)_a: T_a(M) \rightarrow T_{\Phi a}(N)$ произвольного гладкого отображения $\Phi: M \rightarrow N$ составляют гладкое отображение $T(\Phi): T(M) \rightarrow T(N)$, для которого

имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \xrightarrow{T(\Phi)} & T(N) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N \end{array}$$

и соответствия $M \mapsto T(M)$, $\Phi \mapsto T(\Phi)$ являются, очевидно, функтором из категории DIFF гладких многообразий в себя.

Если Φ представляет собой диффеоморфизм, то для любого векторного поля X из $\mathfrak{a}(M)$ определено поле

$$\Phi_* X = T(\Phi) \circ X \circ \Phi^{-1}$$

из $\mathfrak{a}(N)$, а для любого векторного поля Y из $\mathfrak{a}(N)$ — поле

$$\Phi^* Y = T(\Phi)^{-1} \circ Y \circ \Phi$$

из $\mathfrak{a}(M)$. Ясно, что отображения Φ_* и Φ^* линейны, а так как

$$\Phi_* = (\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^* \quad \text{и} \quad \Phi^* = (\Phi_*)^{-1} = (\Phi^{-1})_*,$$

то они являются взаимно обратными изоморфизмами линейных пространств.

В частности, если $M = N = G$, где G — некоторая группа Ли, то для любого элемента $a \in G$ и любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}(G)$ будет определено векторное поле $L_a^* X \in \mathfrak{a}(G)$.

Определение 1. Поле $X \in \mathfrak{a}(G)$ называется *левоинвариантным*, если $L_a^* X = X$ для любого элемента $a \in G$, т. е. если

$$(1) \quad X_b = (dL_{a^{-1}})_{ab} (X_{ab}) \quad \text{для любых элементов } a, b \in G.$$

Ясно, что все левоинвариантные поля составляют подпространство пространства $\mathfrak{a}(G)$ всех векторных полей. Мы будем обозначать это подпространство символом $I(G)$ или \mathfrak{g} .

Легко видеть, что поле $X \in \mathfrak{a}(G)$ тогда и только тогда левоинвариантно, когда

$$(2) \quad X_a = (dL_a)_e X_e$$

для любого элемента $a \in G$. Действительно, соотношение (2) является частным случаем (при $b = e$) формулы (1) и потому выполнено, если поле X левоинвариантно. Обратно, если (2) выполнено, то для любых элементов $a, b \in G$

$$X_{ab} = (dL_{ab})_e(X_e) = ((dL_a)_b \circ (dL_b)_e)(X_e) = (dL_a)_b(X_b),$$

что равносильно (1). \square

Отсюда следует, что линейное отображение $X \mapsto X_e$ пространства \mathfrak{g} в касательное пространство $T_e(G)$ является изоморфизмом. Действительно, для любого вектора $A \in T_e(G)$ отображение $a \mapsto (dL_a)_e A$, $a \in G$, является, как легко видеть, векторным полем на G (проверки требует только гладкость, которая немедленно усматривается из выражения этого отображения в локальных координатах), обладающим свойством (1) и потому левоинвариантным. Для завершения доказательства остается заметить, что получающееся отображение $T_e(G) \rightarrow \mathfrak{g}$, очевидно, обратно к отображению $X \mapsto X_e$. \square

Как правило, мы будем посредством отображения $X \mapsto X_e$ отождествлять пространство $\mathfrak{g} = I(G)$ с пространством $T_e(G)$.

Поскольку $\dim T_e(G) = n$, где $n = \dim G$, мы видим, в частности, что для любой группы Ли G пространство $\mathfrak{g} = I(G)$ левоинвариантных векторных полей конечно-мерно и имеет размерность $n = \dim G$.

Пусть $\mathcal{F}(M)$ — алгебра всех гладких функций на гладком многообразии M . Для любой функции $f \in \mathcal{F}(M)$ и любого поля $X \in \mathfrak{a}(M)$ формула

$$(fX)_a = f(a) X_a, \quad a \in M,$$

определяет, очевидно, некоторое поле $fX \in \mathfrak{a}(M)$ и, как показывает автоматическая проверка, линейное пространство $\mathfrak{a}(M)$ оказывается по отношению к операции $(f, X) \mapsto fX$ модулем над алгеброй $\mathcal{F}(M)$. Если этот модуль является свободным модулем ранга n , т. е. если на M существует такая система X_1, \dots, X_n векторных полей (базис $\mathcal{F}(M)$ -модуля $\mathfrak{a}(M)$), что любое поле $X \in \mathfrak{a}(M)$ единственным образом представляется в виде

$$X = f^1 X_1 + \dots + f^n X_n,$$

где $f^1, \dots, f^n \in \mathcal{F}(M)$, то многообразие M называется *параллелизуемым*.

Предложение 1. Любая группа Ли G параллелизуема.

Доказательство. Мы докажем даже больше, а именно, что *каждый* базис X_1, \dots, X_n линейного пространства $\mathfrak{l}(G)$ является базисом $\mathcal{F}(G)$ -модуля $\mathfrak{a}(G)$.

Для каждой точки $a \in G$ векторы $(X_1)_a, \dots, (X_n)_a$ составляют базис линейного пространства $T_a(G)$. Поэтому вектор X_a произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{a}(G)$ однозначно разлагается по векторам $(X_1)_a, \dots, (X_n)_a$. Это означает, что для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{a}(G)$ существуют такие функции $f^i : a \mapsto f^i(a)$, $a \in G$, что $X = f^1 X_1 + \dots + f^n X_n$. Поэтому нам нужно лишь доказать, что $f^k \in \mathcal{F}(G)$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Пусть (U, x^1, \dots, x^n) — произвольная карта многообразия G . Так как поля X_1, \dots, X_n гладки, то на U существуют такие гладкие функции X_1^i, \dots, X_n^i , $i = 1, \dots, n$, что

$$X_j = X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ для любого } j = 1, \dots, n.$$

При этом, так как для каждой точки $a \in U$ векторы $(X_1)_a, \dots, (X_n)_a$ составляют базис пространства $T_a(G)$, то

$$\det(X_j^i) \neq 0 \text{ на } U,$$

и потому на U существуют такие гладкие функции Y_i^k , что

$$X_j^i Y_i^k = \delta_j^k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

По условию $X = f^j X_j$, и, следовательно,

$$X = f^j X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

т. е. функции $f^j X_j^i$, $i = 1, \dots, n$, являются компонентами векторного поля X в локальных координатах x^1, \dots, x^n и потому гладки. Но

$$f^k = f^j \delta_j^k = (f^j X_j^i) Y_i^k,$$

и так как функции $f^j X_j^i$ и Y_i^k гладки, то функции f^k также гладки (на U).

Являясь гладкими функциями на каждой координатной окрестности U , функции f^k гладки на всем многообразии G . \square

Напомним, что гладкая кривая $t \mapsto \varphi(t)$ на многообразии M называется *интегральной кривой* векторного поля, если

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X_{\varphi(t)} \text{ для любого } t.$$

Интегральная кривая называется *максимальной*, если она не является ограничением интегральной кривой, определенной на большем интервале вещественной оси. Из стандартной теоремы о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями и элементарных свойств хаусдорфовых пространств легко вытекает, что если многообразие M хаусдорфово (что, как мы знаем, автоматически выполнено для группы Ли), то для любой точки $a \in M$ существует максимальная интегральная кривая φ_a поля X , проходящая при $t=0$ через точку a , т. е. такая, что $\varphi_a(0) = a$.

Если для каждой точки $a \in M$ кривая φ_a определена на всей оси \mathbb{R} , то векторное поле X называется *полным*.

Легко видеть, что *векторное поле X на группе Ли G тогда и только тогда левоинвариантно, когда для любых двух точек $a, b \in G$ имеет место равенство*

$$(3) \quad \varphi_{ab} = L_a \circ \varphi_b,$$

т. е. $\varphi_{ab}(t) = a\varphi_b(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Действительно, для любого фиксированного $a \in G$ формула $\Psi_b(t) = \varphi_{a^{-1}b}(t)$ определяет для любой точки $b \in G$ некоторую кривую $t \mapsto \Psi_b(t)$, проходящую при $t=0$ через точку b , и ясно, что, положив

$$Y_b = \left. \frac{d\Psi_b(t)}{dt} \right|_{t=0},$$

мы получим на G некоторое векторное поле $Y: b \mapsto Y_b$. При этом по правилам вычисления касательных векторов гладких кривых для любой точки $b \in G$ будет иметь

место равенство

$$\begin{aligned} Y_b &= \frac{d\psi_b(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\pi(L_a \circ \varphi_{a^{-1}b}(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \\ &= (dL_a)_{a^{-1}b} \left(\frac{d\varphi_{a^{-1}b}(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) = (dL_a)_{a^{-1}b}(X_{a^{-1}b}). \end{aligned}$$

Поэтому, если (3) выполнено и, следовательно, $\psi_b = \varphi_b$ (и, значит, $Y_b = X_b$), то $X_b = (dL_a)_{a^{-1}b}(X_{a^{-1}b})$ и, в частности, $X_a = (dL_a)_e(X_e)$. Следовательно, поле X левоинвариантно (и потому удовлетворяет соотношению (1)), то $Y_b = X_b$ для любой точки $b \in G$, т. е. $Y = X$. Но ясно, что кривые $t \mapsto \psi_b(t)$ являются интегральными кривыми поля Y (автоматически максимальными), и потому ввиду равенства $Y = X$ эти кривые совпадают с интегральными кривыми $t \mapsto \varphi_b(t)$ поля X . Таким образом, $\varphi_b(t) = a\varphi_{a^{-1}b}(t)$, что равносильно (3). \square

Определение 2. Гладкая кривая $\beta: \mathbb{R} \rightarrow G$ называется однопараметрической подгруппой группы Ли G , если

$$\beta(t+s) = \beta(t)\beta(s)$$

для любых $t, s \in \mathbb{R}$. Иными словами, однопараметрическая подгруппа есть гомоморфизм аддитивной группы \mathbb{R} вещественных чисел (рассматриваемой как группа Ли) в группу Ли G .

Подчеркнем, что однопараметрическая подгруппа является, таким образом, не подмножеством, а отображением.

Очевидно, что при $t = 0$ каждая однопараметрическая подгруппа β проходит через единицу e группы G :

$$\beta(0) = e.$$

Предложение 2. Каждая однопараметрическая подгруппа β является интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля X .

Доказательство. Формула

$$\varphi_a(t) = a\beta(t), \quad a \in G, \quad t \in \mathbb{R},$$

определяет на G гладкую кривую $t \mapsto \varphi_a(t)$, проходящую при $t = 0$ через точку a . Мы положим

$$X_a = \frac{d\varphi_a(t)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение $a \mapsto X_a$ гладко, т. е. является векторным полем на G , и что кривые φ_a являются интегральными кривыми этого поля. В частности, интегральной кривой будет кривая $\varphi_e = \beta$. Наконец, поскольку

$$\varphi_{ab}(t) = (ab)\beta(t) = a(b\beta(t)) = a\varphi_b(t),$$

поле X левоинвариантно. \square

Утверждение, обратное к предложению 2, также справедливо:

Предложение 3. Проходящая при $t = 0$ через точку e максимальная интегральная кривая β произвольного левоинвариантного векторного поля $X \in \mathfrak{g}$ является однопараметрической подгруппой группы Ли G (и, в частности, определена на всей оси \mathbb{R}).

Доказательство. Так как поле X левоинвариантно, его интегральные кривые φ_a удовлетворяют соотношению (3). Поэтому, в частности, интервал I_a оси \mathbb{R} , на котором определена интегральная кривая φ_a , совпадает с интервалом $I = I_e$, на котором определена интегральная кривая $\beta = \varphi_e$. Кроме того, так как для любого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ кривая $t \mapsto \varphi_e(t + s)$ является, очевидно, интегральной кривой поля X , проходящей через точку $b = \varphi_e(s)$, и потому $\varphi_e(t + s) = \varphi_b(t)$, то

$$(4) \quad \begin{aligned} \beta(s + t) &= \beta(t + s) = \varphi_e(t + s) = \\ &= \varphi_b(t) = b\varphi_e(t) = \varphi_e(s)\varphi_e(t) = \beta(s)\beta(t) \end{aligned}$$

для любых $s, t \in I$ таких, что $s + t \in I$. Поэтому для доказательства предложения 3 нам нужно лишь показать, что кривая β определена на всей оси \mathbb{R} , т. е. что $I = \mathbb{R}$.

Пусть $I \neq \mathbb{R}$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ существует такое целое число n , что $\frac{t}{n} \in I$. Мы доопределим кривую β

для любых $t \in \mathbb{R}$, положив

$$\beta(t) = \beta\left(\frac{t}{n}\right)^n, \quad \text{если } \frac{t}{n} \in I.$$

Это определение корректно. Действительно, если $\frac{t}{n} \in I$ и $\frac{t}{m} \in I$, то $\frac{t}{nm} \in I$, и потому, согласно соотношению (4),

$$\beta\left(\frac{t}{n}\right)^n = [\beta\left(\frac{t}{nm}\right)^m]^n = [\beta\left(\frac{t}{nm}\right)^m]^n = \beta\left(\frac{t}{m}\right)^m.$$

Тем самым кривая β распространена на всю ось \mathbb{R} . Ясно, что построенная таким образом кривая гладка и удовлетворяет соотношению (4) для всех $t, s \in \mathbb{R}$, т. е. является однопараметрической подгруппой. Мы приедем к противоречию с предположением $I \neq \mathbb{R}$, если покажем, что кривая β на всей оси \mathbb{R} является интегральной кривой поля X .

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, и пусть $a = \beta(t_0)$. По определению касательный вектор $\frac{d\beta(t_0)}{dt}$ кривой β в точке a действует на функции ¹⁾ $f \in \mathcal{O}_a(G)$ по формуле

$$\frac{d\beta(t_0)}{dt} f = \frac{d(f \circ \beta)(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}.$$

Аналогично касательный вектор $\frac{d\beta(0)}{dt}$ в точке e действует на функции $f \in \mathcal{O}_e(G)$ по формуле

$$\frac{d\beta(0)}{dt} f = \frac{d(f \circ \beta)(t)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

¹⁾ Для любого гладкого многообразия M и любой его точки a символом $\mathcal{O}_a(M)$ мы обозначаем множество всех функций, гладких в точке a , т. е. определенных в некоторой — зависящей от функции — окрестности точки a и гладких в этой окрестности. (Собственно говоря, под $\mathcal{O}_a(M)$ следует понимать линейное пространство ростков таких функций, но мы не будем слишком педантичны.)

Символом $\mathcal{O}(M)$ мы будем обозначать множество всех функций f , определенных и гладких в некотором — зависящем от функции — открытом множестве $W(f) \subset M$.

Следовательно, для любой функции $f \in \mathcal{O}_a(G)$

$$\begin{aligned} [(dL_a)_e \frac{d\beta(0)}{dt}] f &= \frac{d\beta(0)}{dt} (f \circ L_a) = \\ &= \frac{d(f \circ L_a \circ \beta)(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{df(a\beta(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{df(\beta(t+t_0))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{df(\beta(t))}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{d\beta(t_0)}{dt} f, \end{aligned}$$

т. е.

$$(dL_a)_e \frac{d\beta(0)}{dt} = \frac{d\beta(t_0)}{dt}.$$

Но при $t \in I$ кривая β является интегральной кривой поля X . В частности,

$$\frac{d\beta(0)}{dt} = X_{\beta(0)} = X_e.$$

Кроме того, так как поле X левоинвариантно, то $(dL_a)_e X_e = X_a = X_{\Phi(t_0)}$. Следовательно,

$$X_{\Phi(t_0)} = \frac{d\beta(t_0)}{dt},$$

так что кривая β действительно является интегральной кривой векторного поля X . \square

Следствие. Каждое левоинвариантное векторное поле X полно. \square

Согласно предложениям 2 и 3 левоинвариантные поля $X \in \mathfrak{l}(G)$ и однопараметрические подгруппы β находятся в естественном биективном соответствии. Поэтому за элементы линейного пространства $\mathfrak{l}(G)$ можно при желании принимать однопараметрические подгруппы.

Сопоставляя все сказанное, мы видим, что справедлива

Теорема 1. Пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ допускает следующие три равноправные интерпретации:

I) Элементами пространства \mathfrak{g} являются левоинвариантные векторные поля X на группе Ли G .

II) Элементами пространства \mathfrak{g} являются касательные векторы A группы G в точке e (единице группы G).

III) Элементами пространства \mathfrak{g} являются однопараметрические подгруппы β группы G .

Переход от первой интерпретации ко второй задается соответствием

$$X \mapsto X_e,$$

переход от третьей интерпретации ко второй — соответственно

$$\beta \mapsto \frac{d\beta(0)}{dt},$$

а переход от первой интерпретации к третьей — соответственно

$$X \mapsto \varphi_e,$$

где φ_e — интегральная кривая поля X , проходящая при $t = 0$ через точку e . \square

Первая и вторая интерпретации дают нам линейные операции в \mathfrak{g} , относительно которых \mathfrak{g} является n -мерным линейным пространством. Как получить эти линейные операции в третьей интерпретации, мы покажем в лекции 4.

Пусть $\Phi: G \rightarrow H$ — произвольный гомоморфизм групп Ли. Поскольку $\Phi(e) = e$, дифференциал $T_e \Phi = (d\Phi)_e$ этого гомоморфизма в точке e представляет собой некоторое линейное отображение пространства $T_e(G) = \mathfrak{l}(G)$ в пространство $T_e(H) = \mathfrak{l}(H)$.

Ясно, что соответствия $G \mapsto \mathfrak{l}(G)$, $\Phi \mapsto (d\Phi)_e$ составляют некоторый функтор

$$(5) \quad !: \text{GR-DIFF} \rightarrow \text{LIN}_f(\mathbb{R})$$

из категории GR-DIFF групп Ли в категорию LIN_f(\mathbb{R}) конечномерных линейных пространств над полем \mathbb{R} .

Определение 3. Функтор (5) мы будем называть функтором Ли. В целях единства обозначений отображение $(d\Phi)_e$ будем обозначать также символом $\mathfrak{l}(\Phi)$.

Мы определили отображение $\mathfrak{l}(\Phi)$, пользуясь интерпретацией пространств $\mathfrak{l}(G)$ как касательных пространств в точке e . Возникает вопрос: как определить отображение $\mathfrak{l}(\Phi)$ в других интерпретациях?

Напомним, что векторные поля $X \in \mathfrak{a}(M)$ и $Y \in \mathfrak{a}(M)$ называются Φ -связанными, где Φ — некоторое гладкое отображение $M \rightarrow N$, если

$$(6) \quad Y_{\Phi a} = (d\Phi)_a(X_a) \quad \text{для любой точки } a \in M.$$

В интерпретации векторных полей как линейных дифференциальных операторов $f \mapsto Xf$ (дифференцирований на M) Φ -связанность означает, что для любой функции f (определенной и гладкой на некотором открытом множестве многообразия N) выполнено соотношение $X(f \circ \Phi) = Yf \circ \Phi$.

Если $\Phi: M \rightarrow N$ — диффеоморфизм, то каждое поле $Y \in \mathfrak{a}(N)$ Φ -связано с полем $\Phi^*Y \in \mathfrak{a}(M)$.

Предложение 4. В интерпретации элементов пространств $\mathcal{I}(G)$ как однопараметрических подгрупп отображение $\mathcal{I}(\Phi)$ задается формулой

$$\mathcal{I}(\Phi)(\beta) = \Phi \circ \beta.$$

Для любого левоинвариантного векторного поля $X \in \mathcal{I}(G)$ и любого гомоморфизма $\Phi: G \rightarrow H$ на группе H существует единственное левоинвариантное векторное поле Y , которое Φ -связано с полем X . В интерпретации пространств $\mathcal{I}(G)$ как пространств левоинвариантных векторных полей образом $\mathcal{I}(\Phi)X$ поля $X \in \mathcal{I}(G)$ при отображении $\mathcal{I}(\Phi)$ как раз и является это поле Y .

Доказательство. По определению

$$(d\Phi)_e \left(\frac{d\beta(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d(\Phi \circ \beta)(t)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Следовательно, при отождествлении однопараметрической подгруппы β с вектором $A = \frac{d(\beta(t))}{dt} \Big|_{t=0}$ однопараметрическая подгруппа $\Phi \circ \beta$ отождествляется с вектором $(d\Phi)_e A = \mathcal{I}(\Phi)A$. Это доказывает первое утверждение.

Второе утверждение непосредственно вытекает из того очевидного факта, что для левоинвариантных векторных полей $X \in \mathcal{I}(G)$ и $Y \in \mathcal{I}(H)$ соотношение (6) (при $M = G$ и $N = H$) равносильно равенству

$$Y_e = (d\Phi)_e X_e. \quad \square$$

Ясно, что касательные пространства $T_e(G)$ и $T_e(G_e)$ группы G и ее компоненты единицы G_e совпадают. Это означает, что

$$\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(G_e).$$

Поэтому при изучении функтора Ли можно ограничиться лишь связными и гладкими группами G .

Проиллюстрируем введенные понятия на важном конкретном примере.

Напомним предварительно некоторые общегебраические понятия, которыми мы будем постоянно пользоваться.

Пусть \mathbb{K} — произвольное поле (у нас это будет поле \mathbb{R} вещественных чисел), и пусть \mathcal{A} — линейное пространство над полем \mathbb{K} . Предположим, что любым двум элементам $x, y \in \mathcal{A}$ сопоставлен некоторый третий элемент $z \in \mathcal{A}$, обозначаемый символом xy и называемый *произведением* элементов x и y . Тогда каждый элемент $a \in \mathcal{A}$ будет определять два отображения

$$L_a: x \mapsto ax, \quad R_a: x \mapsto xa$$

линеала \mathcal{A} в себя.

Определение 4. Линейное пространство \mathcal{A} с заданным на нем умножением $x, y \mapsto xy$ называется *алгеброй* (над полем \mathbb{K}), если для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ отображения $L_a: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $R_a: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ линейны, т. е. если

$$(7) \quad a(x + y) = ax + ay, \quad (x + y)a = xa + ya$$

для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}$ и

$$(8) \quad k(ax) = a(kx), \quad k(xa) = (kx)a$$

для любого элемента $x \in \mathcal{A}$ и любого элемента $k \in \mathbb{K}$.

Условие (7) (вместе с первыми четырьмя аксиомами линейного пространства) означает, что множество \mathcal{A} с имеющимися на нем операциями сложения и умножения является кольцом. Поэтому можно сказать, что алгебра — это кольцо, одновременно являющееся линейным пространством, в котором выполнено условие (8), т. е. условие

$$(9) \quad k(xy) = (kx)y = x(ky),$$

которое должно иметь место для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}$ и любого элемента $k \in \mathbb{K}$.

Гомоморфизмом алгебр называется линейное отображение одной алгебры в другую, переводящее произведение в произведение (являющееся гомоморфизмом колец).

Ясно, что алгебры (над данным полем \mathbb{K}) и все их гомоморфизмы составляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом ALG .

Линейное подпространство \mathcal{B} алгебры \mathcal{A} называется *подалгеброй* алгебры \mathcal{A} , если $xy \in \mathcal{B}$ для любых элементов $x, y \in \mathcal{B}$. Ясно, что любая подалгебра автоматически является алгеброй.

Определение 5. Алгебра, умножение в которой ассоциативно, называется *ассоциативной алгеброй*.

Все ассоциативные алгебры составляют полную подкатегорию ALG-ASS категории ALG . (Подкатегория \mathbf{B} категории \mathbf{C} называется *полной подкатегорией*, если для любых объектов $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ каждый морфизм $B_1 \rightarrow B_2$ из \mathbf{C} принадлежит \mathbf{B} .)

Каждая подалгебра ассоциативной алгебры сама ассоциативна.

Ассоциативные алгебры, обладающие единицей (т. е. таким элементом e , что $ae = ea = a$ для любого элемента $a \in A$), мы будем называть *унитальными алгебрами*. Они составляют полную подкатегорию $\text{ALG}_0\text{-ASS}$ категории ALG-ASS .

Примером унитальной алгебры является *алгебра матриц* $\mathbb{K}(n)$.

Элемент a унитальной алгебры \mathcal{A} называется *обратимым*, если в \mathcal{A} существует такой элемент a^{-1} , что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Множество $G(\mathcal{A})$ всех обратимых элементов алгебры \mathcal{A} является, очевидно, группой по умножению.

Ясно, что элемент a обратим тогда и только тогда, когда обратим линейный оператор L_a , т. е. — если алгебра \mathcal{A} конечномерна, — когда $\det L_a \neq 0$.

При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ отсюда следует, что для конечномерной алгебры \mathcal{A} множество $G(\mathcal{A})$ открыто в \mathcal{A} и, следовательно, является гладким многообразием (размерности $n = \dim \mathcal{A}$).

Таким образом, $G(\mathcal{A})$ является и группой и гладким многообразием. Поскольку умножение в этой группе билинейно, оно заведомо гладко и, следовательно (предложение 1 лекции 1), $G(A)$ является группой Ли.

Найдем для этой группы Ли линеал $I(G(\mathcal{A}))$.

С этой целью вспомним, что для любого конечномерного линеала \mathcal{V} (рассматриваемого как гладкое много-

образие) и любой точки $v \in \mathcal{V}$ касательное пространство $T_v(\mathcal{V})$ естественным образом отождествляется с \mathcal{V} : отождествляющий изоморфизм

$$(10) \quad \mathcal{V} \rightarrow T_v(\mathcal{V})$$

сопоставляет каждому вектору $a \in \mathcal{V}$ касательный вектор в точке $t = 0$ кривой $t \mapsto v + ta$. Поэтому, в частности, ${}_e(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. С другой стороны, поскольку $G(\mathcal{A})$ открыто в \mathcal{A} , то $T_e(G(\mathcal{A})) = T_e(\mathcal{A})$. Следовательно (мы пользуемся здесь интерпретацией линеала $I(G)$ как касательного пространства $T_e(G)$):

$$(11) \quad I(G(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

Интересно проинтерпретировать равенство (11) в рамках двух других интерпретаций пространства $I(G)$.

Пусть \mathcal{V} — конечномерный линеал и $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ — произвольный линейный оператор. Поскольку A является, очевидно, гладким отображением гладкого многообразия \mathcal{V} в себя, для любой точки $v \in \mathcal{V}$ определен его дифференциал $(dA)_v: T_v(\mathcal{V}) \rightarrow T_{Av}(\mathcal{V})$. По определению этот дифференциал переводит касательный вектор к кривой $t \mapsto v + ta$ в касательный вектор к кривой $t \mapsto A(v + ta) = Av + tAa$. Это означает, что в силу отождествлений $T_v(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ и $T_{Av}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ дифференциал $(dA)_v$ совпадает с оператором A . Таким образом, *дифференциалом линейного оператора является он сам*.

В частности, мы видим, что $(dL_a)_e = L_a$ для любого элемента $a \in A$.

С другой стороны, в силу тех же отождествлений любое векторное поле X на $G(\mathcal{A})$ является не чем иным, как некоторым гладким отображением $G(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$. Условие левоинвариантности (1) для так трактуемого векторного поля в силу только что сделанного замечания имеет вид

$$(12) \quad X_b = L_{a^{-1}}X_{ab}, \quad \text{где } a, b \in G(\mathcal{A}),$$

откуда при $b = e$ следует, что $X_a = L_a X_e$, т. е. что поле имеет вид $a \mapsto ab$, где $b = X_e \in \mathcal{A}$. Поскольку любое такое поле удовлетворяет, очевидно, условию (12), мы, изменив несколько обозначения, получаем тем самым, что *все левоинвариантные векторные поля $G(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ на*

группе Ли $G(\mathcal{A})$ имеют вид $x \mapsto xa$, $x \in G(\mathcal{A})$, где a — произвольный элемент алгебры \mathcal{A} .

Обсуждение равенства (11) в рамках третьей интерпретации векторов линеала $!(G(\mathcal{A}))$, т. е. их интерпретации как однопараметрических подгрупп, требует некоторой предварительной подготовки.

Норма, заданная в произвольной алгебре \mathcal{A} (над полем \mathbb{R}), называется *мультипликативной*, если

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$.

Лемма 1. В любой конечномерной алгебре \mathcal{A} над полем \mathbb{R} существует мультипликативная норма.

Доказательство. Если в \mathcal{A} задан базис e_1, \dots, e_n , то формула

$$(13) \quad \|a\| = \max(|a^1|, \dots, |a^n|),$$

где a^1, \dots, a^n — координаты элемента a в базисе e_1, \dots, e_n , будет, очевидно, определять в \mathcal{A} некоторую норму. Мы покажем, что при целесообразном выборе базиса e_1, \dots, e_n норма (13) мультипликативна.

Пусть сначала базис e_1, \dots, e_n произволен, и пусть

$$e_i e_j = c_{ij}^k e_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Тогда для любых элементов $a = a^i e_i$ и $b = b^j e_j$ мы имеем

$$\|ab\| = \|c_{ij}^k a^i b^j e_k\| = \max_k |c_{ij}^k a^i b^j| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^n \max_k |c_{ij}^k| \cdot \max_p |a^p| \cdot \max_q |b^q| = C \cdot \|a\| \cdot \|b\|,$$

где $C = n^2 \max_{i,j,k} |c_{ij}^k|$. Поэтому для нормы

$$\|a\| = \lambda \max(|a^1|, \dots, |a^n|),$$

где $\lambda > C$ (эта норма является нормой (13), отвечающей базису $\frac{1}{\lambda} e_1, \dots, \frac{1}{\lambda} e_n$), имеет место неравенство

$$\|ab\| \leq \frac{C}{\lambda} \|a\| \cdot \|b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|,$$

т. е. эта норма мультипликативна. \square

Заметим, что в лемме 1 алгебра \mathcal{A} ассоциативной не предполагается.

Этим замечанием мы воспользуемся позже, а пока применим лемму 1 к произвольной конечномерной ассоциативной унитальной (с единицей e) алгебре \mathcal{A} . Для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ мы введем в рассмотрение бесконечный ряд

$$(14) \quad e + ta + \frac{t^2 a^2}{2} + \dots + \frac{t^n a^n}{n!} + \dots$$

По отношению к произвольной мультиплекативной норме этот ряд *абсолютно сходится*, т. е. сходится числовой ряд

$$\|e\| + \|te\| + \left\| \frac{t^2 a^2}{2} \right\| + \dots + \left\| \frac{t^n a^n}{n!} \right\| + \dots$$

(поскольку этот ряд мажорируется рядом для e^{ta}). Однако стандартное доказательство (излагаемое обычно для рядов с числовыми членами, но дословно сохраняющееся и для рядов с векторными членами) показывает, что *любой абсолютно сходящийся ряд сходится* (по норме, а значит, что в конечномерном линейном равносильно, и по координатно). Следовательно, ряд (14) *сходится*.

Сумма ряда (14) обозначается символом e^{ta} , а \mathcal{A} -значная функция $t \mapsto e^{ta}$ называется *экспоненциальной функцией в алгебре \mathcal{A}* . (Буква e здесь, конечно, не имеет никакого отношения к единице e алгебры \mathcal{A} .)

В частности, при $\mathcal{A} = \mathbb{R}(n)$ мы получаем *матричную экспоненциальную функцию* $t \mapsto e^{tA}$, $A \in \mathbb{R}(n)$.

Для \mathcal{A} -значных функций $t \mapsto a(t)$ можно воспроизвести практически все построения элементарного анализа. Например, *производная функция* $t \mapsto a'(t)$ определяется формулой

$$(15) \quad a'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t},$$

и если функция $t \mapsto a(t)$ достаточно гладка, то

$$(16) \quad a(t) = a(t_0) + (t - t_0) a'(t_0) + O((t - t_0)^2).$$

Вместе с тем каждую функцию $t \mapsto a(t)$ можно рассматривать как кривую в гладком многообразии \mathcal{A} и

потому говорить о ее касательном векторе $\frac{da(t)}{dt}$ в точке t , который в силу общего изоморфизма (10) можно считать вектором из \mathcal{A} .

Оказывается, что оба эти подхода совпадают, т. е.

$$a'(t) = \frac{da(t)}{dt} \quad \text{для любого } t.$$

Действительно, в силу формулы (15) касательный вектор к кривой $t \mapsto a(t)$ в точке $t = t_0$ совпадает с касательным вектором к кривой $t \mapsto a(t_0) + (t - t_0)a'(t_0)$, который в силу изоморфизма (10) и отождествляется с вектором $a'(t_0)$. \square

Однако на практике определение (15) безусловно удобнее, поскольку оно немедленно дает все обычные формулы дифференциального исчисления (например, формулу дифференцирования произведения $(a(t)b(t))' = a'(t)b(t) + a(t)b'(t)$), если только соблюдать необходимые предосторожности, вызванные возможной некоммутативностью умножения в алгебре \mathcal{A} (из-за этого, скажем, формула для производной функции $t \mapsto a^{-1}(t)$ приобретает вид $(a^{-1}(t))' = -a^{-1}(t)a'(t)a^{-1}(t)$).

Если же значения \mathcal{A} -значной функции $t \mapsto a(t)$ перестановочны, т. е. $a(t)a(s) = a(s)a(t)$ для любых t и s , то никаких оговорок делать не нужно. Поэтому, в частности, для любого многочлена

$$f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$$

и любой \mathcal{A} -значной функции $a \mapsto a(t)$ с перестановочными значениями имеет место формула

$$(17) \quad \frac{d}{dt} f(a(t)) = f'(a(t))a'(t),$$

где

$$f'(X) = a_1 + 2a_2 + \dots + ma_mX^{m-1}.$$

Эта формула сохраняется и когда $f(X)$ является суммой бесконечного степенного вида

$$(18) \quad f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n + \dots,$$

поскольку необходимая перестановка двух предельных переходов в этом случае, очевидно, законна (конечно, в

предположении, что $\|a(t)\|$ лежит в круге сходимости ряда (18)).

Для рядов, составленных из \mathcal{A} -значных функций, сохраняются также обычные правила для их почлененного дифференцирования. В частности, почленное дифференцирование допускает ряд (14). Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{de^{ta}}{dt} &= a + ta^2 + \dots + \frac{t^{n-1}a^n}{(n-1)!} + \dots = \\ &= a\left(e + ta + \dots + \frac{t^{n-1}a^{n-1}}{(n-1)!} + \dots\right) = ae^{ta}.\end{aligned}$$

Таким образом, экспоненциальная функция $t \mapsto e^{ta}$ обладает тем свойством, что

$$(19) \quad \frac{de^{ta}}{dt} = ae^{ta}$$

для любого t .

Отсюда следует, что решение \mathcal{A} -значного дифференциального уравнения

$$(20) \quad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

при начальном условии

$$x(0) = c$$

выражается формулой

$$x(t) = e^{ta}c.$$

В самом деле, согласно формуле (17)

$$x'(t) = (e^{ta})'c = ae^{ta}c = ax(t)$$

и $x(0) = c$. С другой стороны, для вектора $x(t)$ уравнение (20) сводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; поэтому решение $x(t)$ существует и единствено. \square

Теперь легко видеть, что для любых s и t имеет место равенство

$$(21) \quad e^{(t+s)a} = e^{ta}e^{sa}.$$

Действительно, для каждого фиксированного s функция $t \mapsto x(t) = e^{(t+s)a}$ удовлетворяет уравнению (20) с начальным условием $x(0) = e^{sa}$. Поэтому $x(t) = e^{ta}e^{sa}$. \square

Из соотношения (21) следует, в частности, что функция $t \mapsto e^{ta}$ является функцией с перестановочными значениями. Поэтому (см. формулу (17)) для любого степенного ряда (18) имеет место формула

$$(22) \quad \frac{d}{dt} f(e^{ta}) = f'(e^{ta}) ae^{ta}$$

(если, конечно, ряд для $f(e^{ta})$ абсолютно сходится).

Вернемся теперь к линеалу $\mathfrak{l}(G)$ при $G = G(\mathcal{A})$.

Однопараметрические подгруппы группы $G(\mathcal{A})$ представляют собой не что иное, как гладкие \mathcal{A} -значные функции $x \mapsto x(t)$, удовлетворяющие соотношению

$$(23) \quad x(s+t) = x(s)x(t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Общее решение этого функционального уравнения после всего сказанного выше находится без всякого труда. Действительно, продифференцировав соотношение (23) по s и положив затем $s = 0$, мы получим для $x(t)$ уже известное нам дифференциальное уравнение (20) с $a = x'(0)$. Поэтому ввиду начального условия $x(0) = e$ мы получаем, что $x(t) = e^{at}$. Поскольку, согласно формуле (21), это решение удовлетворяет соотношению (23), этим доказано, что любая однопараметрическая подгруппа группы $G(A)$ имеет вид $t \mapsto e^{ta}$.

Обозначив однопараметрическую подгруппу $t \mapsto e^{at}$ символом β_a , мы получаем, тем самым, биективное соответствие $a \mapsto \beta_a$ между элементами алгебры \mathcal{A} и однопараметрическими подгруппами группы Ли и $G(\mathcal{A})$. Это и есть соответствие (11) в третьей интерпретации.