Лекция 3

МАТРИЧНЫЕ ГРУППЫ ЛИ, ДОПУСКАЮЩИЕ КОНСТРУКЦИЮ КЭЛИ. — ОБОБЩЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ КЭЛИ.— ГРУППЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ ln-ОБРАЗАМИ.— АЛГЕБРЫ ЛИ. — ПРИМЕРЫ АЛГЕБР ЛИ. — АЛГЕБРА ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ. — АЛГЕБРА ЛИ ГРУППЫ ЛИ. — ПРИМЕР: АЛГЕБРА ЛИ ГРУППЫ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ.— ЛОКАЛЬНО ИЗОМОРФНЫЕ ГРУППЫ ЛИ.— ГРУПУСКУЛЫ ЛИ.— ФУНКТОР ЛИ НА КАТЕГОРИИ ГРУПУСКУЛ ЛИ.

Полученные в конце предыдущей лекции результаты применимы, разумеется, и к полной линейной группе $\mathrm{GL}(n) = G(\mathbb{R}(n))$. В частности, мы видим, что *однопараметрическими подгруппами группы* $\mathrm{GL}(n)$ *являются матричные экспоненциальные функции* $t \longmapsto e^{tA}$ *и только эти функции.*

Определение 1. Подгруппу G группы $\mathrm{GL}(n)$ мы будем называть *матричной группой Ли*, если:

а) на G введена гладкость, по отношению к которой она является группой Ли;

б) отображение вложения ι: $G \to \mathrm{GL}(n)$ гладко (и, значит, является гомоморфизмом групп Ли).

Каждая однопараметрическая подгруппа группы G автоматически является однопараметрической подгруппой группы $\mathrm{GL}(n)$, и потому имеет вид $t \longmapsto e^{tA}$. Это определяет инъективное отображение $\mathfrak{l}(G) \to \mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n)) = \mathbb{R}(n)$, являющееся (см. предложение 5 лекции 2) не чем иным, как отображением $\mathfrak{l}(\iota)$. Тем самым *для любой матричной группы Ли линейное пространство* $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ *естественно отождествляется с некоторым подпространством линейного пространства* $\mathbb{R}(n)$.

Примером матричной группы Ли может служить любая группа, допускающая конструкцию Кэли (см. лекцию 1), скажем, группа $O_J(n)$ всех J-ортогональных матриц. По определению матричная однопараметрическая подгруппа $t \mapsto e^{tA}$ тогда и только тогда является однопараметрической подгруппой группы $O_J(n)$, когда для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$(e^{tA})^{\top} J e^{tA} = J.$$

Дифференцируя это соотношение по t и полагая $t = 0$, мы получим соотношение

$$A^{\top} J + JA = 0,$$

означающее по определению, что матрица A является J-кососимметрической матрицей.

Оказывается, что и обратно, для любой J-кососимметрической матрицы A отображение $t \to e^{tA}$ является однопараметрической подгруппой группы $O_J(n)$.

Чтобы установить это, мы воспользуемся матричным аналогом известной элементарной формулы

$$e^a = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m.$$

Покажем, что (с заменой 1 на e) *эта формула справедлива в любой конечномерной ассоциативной алгебре* $\mathcal{A}$. Действительно, так как

$$\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{k \text{ множителей}}} \cdot \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k!},$$

то для любой мультипликативной нормы

$$\left\| e^a - \left(e + \frac{a}{m}\right)^m \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{m^k}\binom{m}{k}\right) a^k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{m^k}\binom{m}{k}\right) \| a \|^k =$$

$$= e^{\| a \|} - \left(1 + \frac{\| a \|}{m}\right)^m,$$

и потому

$$\lim_{m\to\infty}\left\|e^a-\left(e+\frac{a}{m}\right)^m\right\|=0,$$

ибо

$$\left(1+\frac{\|a\|}{m}\right)^m\to e^{\|a\|}. \quad \square$$

Мы видим, что для любого t имеет место равенство

$$Je^{tA}=J\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{tA}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}J\left(E+\frac{tA}{m}\right)^m=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left(E-\frac{tA^\top}{m}\right)^m J=e^{-tA^\top}J,$$

ибо $Jf(A)=f(-A^\top)J$ для любого многочлена $f(A)$ от матрицы A. Поэтому

$$(e^{tA})^\top Je^{tA}=(e^{tA})^\top e^{-tA^\top}J=J,$$

так что действительно $e^{tA}\in \mathrm{O}_J(n)$.

Этим доказано, что *для группы $\mathrm{O}_J(n)$ подпространством $\mathfrak{l}(\mathrm{O}_J(n))$ пространства $\mathbb{R}(n)$ служит линейное пространство всех J-кососимметрических матриц.*

Сравнивая это утверждение с результатом, полученным в примере 7 из лекции 1, мы видим, что *подпространство $\mathfrak{l}(\mathrm{O}_J(n))$ совпадает с кэли-образом группы $\mathrm{O}_J(n)$*. Оказывается, что это общий факт:

Предложение 1. *Если матричная группа $G\subset \mathrm{GL}(n)$ допускает конструкцию Кэли (и потому является матричной группой Ли), то соответствующее этой группе линейное пространство $\mathfrak{l}(G)$ совпадает с кэли-образом $G^\#$ группы G.*

Доказательство. Пусть $A\in\mathfrak{l}(G)$, т. е. пусть отображение $t\longmapsto e^{tA}$ представляет собой однопараметрическую подгруппу группы G. Так как множество G^0 неисключительных матриц из G является окрестностью единицы E группы G, то существует такое $\varepsilon>0$, что при $|t|<\varepsilon$ матрица e^{tA} неисключительна и потому определен ее кэли-образ

$$(e^{tA})^\#=(E-e^{tA})(E+e^{tA})^{-1}\in G^\#.$$

Поскольку $G^{\#}$ является линейным пространством, отсюда следует, что матрица

$$\left.\frac{d(e^{tA})^{\#}}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{(e^{tA})^{\#}}{t}$$

также принадлежит $G^{\#}$. Но, с другой стороны,

$$\frac{d(e^{tA})^{\#}}{dt} = -Ae^{tA}(E+e^{tA})^{-1} + (E-e^{tA})\frac{d(E+e^{tA})^{-1}}{dt},$$

и потому

$$\left.\frac{d(e^{tA})^{\#}}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}A.$$

Следовательно, $A \in G^{\#}$.

Тем самым доказано, что $\mathfrak{l}(G) \subset G^{\#}$, и значит, что $\mathfrak{l}(G) = G^{\#}$, поскольку линейные пространства $\mathfrak{l}(G)$ и $G^{\#}$ имеют одну и ту же размерность (равную $\dim G$). □

В соответствии с разобранными в лекции 1 примерами из предложения 1 следует, что *пространство* $\mathfrak{l}(G)$:

для ортогональной группы $\mathrm{O}(n)$ (*или, что равносильно, для группы* $\mathrm{SO}(n)$) *состоит из кососимметрических матриц порядка* n;

для вещественной симплектической группы $\mathrm{Sp}(m,\mathbb{R})$ — *из матриц вида*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\top} \end{pmatrix},$$

где B *и* C — *симметрические матрицы порядка* m, *а матрица* A *произвольна*;

для ортогональной симплектической группы $\mathrm{Sp}(m) \cap \mathrm{O}(2m)$ — *из матриц вида*

$$\begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix},$$

где A — *кососимметрическая, а* C — *симметрическая матрица*;

для унитарной группы $\mathrm{U}(n)$ — *из косоэрмитовых матриц*;

для группы $\mathrm{Up}(m)$ — *из матриц вида*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -\overline{A}^{\top} \end{pmatrix},$$

где B и C — эрмитовы матрицы порядка m, а матрица A произвольна;

для симплектической группы $\mathrm{Sp}(m)$ — *из матриц вида*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix},$$

где A — косоэрмитова, а B — симметрическая матрица порядка m. □

Утверждение о том, что группа, допускающая конструкцию Кэли, является матричной группой Ли, не связано жестко с отображением Кэли $A \longmapsto A^{\#}$ и может быть существенно обобщено.

Как и выше, нам будет удобно отождествлять пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ с пространством $\mathbb{R}(n)$ всех квадратных матриц порядка n.

Предложение 2. *Подгруппа G группы* $\mathrm{GL}(n)$ *является матричной группой Ли, если существует диффеоморфизм $f\colon V \to \mathring{V}$ некоторой окрестности V единичной матрицы в группе* $\mathrm{GL}(n)$ *на открытое множество $\mathring{V}$ пространства* $\mathbb{R}(n)$, *обладающий тем свойством, что множество $f(G \cap V)$ является пересечением множества $\mathring{V}$ с некоторым линейным подпространством $G^{\#}$ пространства* $\mathbb{R}(n)$:

$$f(G \cap V) = G^{\#} \cap \mathring{V}.$$

Доказательство. Пусть $m = \dim G^{\#}$, и пусть $\varphi\colon G^{\#} \to \mathbb{R}^m$ — произвольный изоморфизм пространства $G^{\#}$ на пространство $\mathbb{R}^m$. Пусть, кроме того, $U = G \cap V$ и $\mathring{U} = \varphi(G^{\#} \cap \mathring{V})$. Тогда множество $\mathring{U}$ открыто в $\mathbb{R}^m$, а отображение $h = \varphi \circ f$ на U является биективным отображением $U \to \mathring{U}$. Иными словами, пара (U, h) является картой на G.

Пусть теперь A — произвольная матрица из G, и пусть $U_A = L_A(U)$ и $h_A = h \circ L_A^{-1}$. Тогда пара (U_A, h_A) также будет картой на G. Поскольку $A \in U_A$, все множества вида U_A покрывают G. Кроме того, если $U_A \cap$

$\bigcap U_B \neq \varnothing$, то на $h_A(U_A \bigcap U_B)$ отображение $h_B \circ h_A^{-1}$ будет ограничением диффеоморфизма

$$h \circ L_B^{-1} \circ L_A \circ h^{-1} = \varphi \circ f \circ L_{B^{-1}A} \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}$$

и потому само будет диффеоморфизмом. Следовательно, карты (U_A, h_A) составляют атлас. Тем самым на G определяется гладкость, по отношению к которой G будет, очевидно, матричной группой Ли. □

Случай группы, допускающей конструкцию Кэли, получается, когда V представляет собой множество всех неисключительных матриц из G, а отображение $f\colon V \to \mathring{V}$ является отображением Кэли (и, следовательно, линейное пространство $G^{\#}$ — кэли-образом группы G).

Предложение 1 также переносится на рассматриваемый сейчас общий случай, если потребовать, чтобы диффеоморфизм $f\colon V \to \mathring{V}$ был *аналитическим*, т. е. чтобы были выполнены следующие условия:

а) существует такое число R и такая матричная норма $\| \quad \|$, что $\|A - E\| < R$ для любой матрицы $A \in V$;

б) существует такой ряд

$$f(z) = a_0 + a_1(z-1) + \ldots + a_m(z-1)^m + \ldots,$$

сходящийся при $|z-1| < R$, что для любой матрицы $A \in V$ имеет место равенство

$$f(A) = a_0 E + a_1(A-E) + \ldots + a_m(A-E)^m + \ldots$$

(ввиду условия а) это равенство имеет смысл);

в) число $a_1 = f'(1)$ отлично от нуля:

$$a_1 \neq 0.$$

Предложение 3. *Если для подгруппы G группы $\mathrm{GL}(n)$ существует удовлетворяющий условиям предложения 2 аналитический диффеоморфизм $f\colon V \to \mathring{V}$, то соответствующее этой группе линейное пространство $\mathrm{l}(G)$ совпадает с линейным пространством $G^{\#}$, предусмотренным предложением 2.*

Доказательство (ср. с доказательством предложения 1). Пусть $t \mapsto e^{tA}$ — произвольная однопарамет-

рическая подгруппа группы G, и пусть $\varepsilon > 0$ — такое число, что при $|t| < \varepsilon$ матрица e^{tA} принадлежит V. Тогда $e^{tA} \in G \cap V$ и, значит, $f(e^{tA}) \in G^{\#} \cap \mathring{V}$. Поэтому $\frac{df(e^{tA})}{dt} \in G^{\#}$ и, в частности,

$$\left.\frac{df(e^{tA})}{dt}\right|_{t=0} \in G^{\#}.$$

Но согласно формуле (22) предыдущей лекции

$$\left.\frac{df(e^{tA})}{dt}\right|_{t=0} = f'(e^{tA})\,Ae^{tA}\,|_{t=0} = a_1 A,$$

так как

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-1) + \ldots + ma_m(z-1)^{m-1} + \ldots$$

и, значит, $f'(E) = a_1 E$. Следовательно, $a_1 A \in G^{\#}$ и потому $A \in G^{\#}$ ибо по условию $a_1 \neq 0$.

Этим доказано, что $\mathfrak{l}(G) \subset G^{\#}$. Поэтому $\mathfrak{l}(G) = G^{\#}$ так как размерности этих линейных пространств совпадают. □

Чтобы в явном виде построить диффеоморфизм $\mathfrak{l}$, мы рассмотрим матричный ряд

$$\ln A = (A-E) - \frac{1}{2}(A-E)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}(A-E)^m + \ldots,$$

который сходится при $\|A-E\| < 1$ (где $\|\ \|$ — произвольная матричная мультипликативная норма, скажем, норма $\|A\| = n \cdot \max\limits_{i,j} a_{ij}$). Тривиальное вычисление, повторяющее известное вычисление для числовых рядов, показывает, что $e^{\ln A} = A$ при $\|A-E\| < 1$ (т. е. когда матрица $\ln A$ определена).

Интересно, что, напротив, равенство $\ln e^A = A$ может быть не выполнено даже тогда, когда матрица $\ln e^A$ определена (в том смысле, что для матрицы $B = e^A$ сходится ряд $\ln B$). Действительно, если

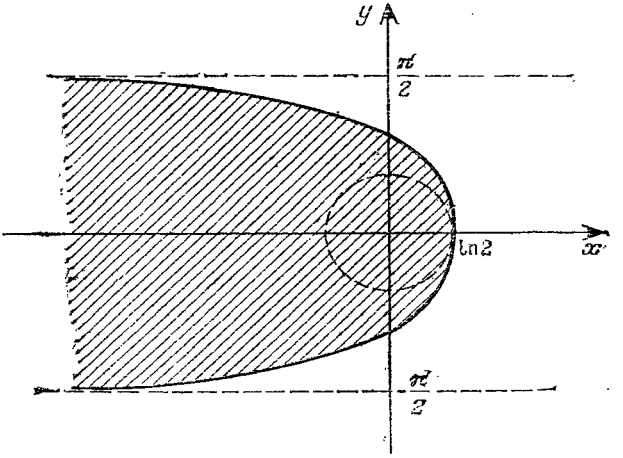
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix},$$

то, как показывает автоматическое вычисление,

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

и потому при $\theta = 2\pi$ имеет место равенство $e^A = E$. Следовательно, матрица $\ln e^A$ определена и равна нулю, а не A.

Впрочем, аналогичный феномен имеет место и для чисел (правда комплексных). Например, $e^{2\pi i} = 1$, и потому $\ln e^{2\pi i} = 0$. Причина этого известна. Условие $|e^z - 1| < 1$ определяет в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ счетную систему областей, получающихся друг из друга сдвигами на $2\pi i$, причем область, содержащаяся в полосе $|y| < \frac{\pi}{2}$, ограничена кривой $e^x = 2\cos y$ (см. рисунок). С другой стороны,



формальное преобразование ряда $\ln e^z$ в ряд z имеет содержательный смысл, как и любое преобразование рядов, только в соответствующем круге сходимости, которым в данном случае является максимальный круг с центром в точке $z_0 = 0$, содержащийся в рассматриваемой области. Поскольку, как легко видеть, радиус этого круга равен $\ln 2$ мы, таким образом, можем быть уверены в равенстве $\ln e^z = z$ только при $|z| < \ln 2$.

Теперь ясно, что те же самые формальные преобразования годятся и для ряда $\ln e^A$, и потому *равенство* $\ln e^A = A$ *заведомо имеет место при* $\|A\| < \ln 2$.

Тем самым доказано, что отображение $\ln\colon A \to \ln A$ осуществляет диффеоморфизм некоторой окрестности V единичной матрицы в группе $\mathrm{GL}(n)$ на некоторую окрестность $\mathring{V}$ нулевой матрицы в линеале $\mathbb{R}(n)$ (с обратным диффеоморфизмом $\exp\colon A \longmapsto e^A$).

Мы будем говорить, что *подгруппа* $G \subset \mathrm{GL}(n)$ *обладает* ln-*образом*, если в $\mathbb{R}(n)$ существует такое линейное подпространство $G^\flat$, что

$$\ln(G \cap V) = G^\flat \cap \mathring{V}.$$

Согласно предложению 2 такая подгруппа является матричной группой Ли, а согласно предложению 3 линеал $G^\flat$ совпадает с линеалом $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$.

В отличие от конструкции Кэли, эта конструкция позволяет немедленно доказать, что *группы* $\mathrm{SL}(n)$ *и* $\mathrm{SU}(n)$ *унимодулярных матриц являются матричными группами Ли.* Действительно, известно, что $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\,A}$, где $\mathrm{Tr}\,A$ — *след* матрицы A (сумма ее диагональных элементов). Поэтому условие унимодулярности матрицы e^A равносильно линейному услозию $\mathrm{Tr}\,A = 0$ на матрицу A. □

(Равенство $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\,A}$ достаточно, как легко видеть, доказать лишь для матриц, имеющих жорданову, или хотя бы треугольную, форму. Но для такой матрицы A матрица e^A также треугольна, а ее диагональные элементы имеют вид $e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}$, где $a_1, \ldots, a_n$ — диагональные элементы матрицы A. Поэтому $\det e^A = e^{a_1} \ldots e^{a_n} = e^{a_1 + \cdots + a_n} = e^{\mathrm{Tr}\,A}$.)

Основное же преимущество ln-конструкции перед конструкцией Кэли состоит в ее универсальности.

Предложение 4. *Каждая матричная группа Ли* G *обладает* ln-*образом.*

Доказательство. Согласно сказанному выше, единственным кандидатом на роль линеала $G^\flat$ является линейное пространство $\mathfrak{l}(G)$. Покажем, что оно действительно обладает нужным свойством.

Пусть, как и выше, V и $\mathring{V}$ — такие окрестности (соответственно единичной и нулевой матрицы), что функция $A \longmapsto \ln A$ определяет диффеоморфизм $\ln\colon V \to \mathring{V}$ с обратным диффеоморфизмом $\exp\colon \mathring{V} \to V$. Тогда для любой матрицы $A \in \mathfrak{l}(G) \cap \mathring{V}$ будет иметь место включение $e^A \in G \cap V$ (ибо $e^{tA} \in G$ для любого t). Поскольку $\ln e^A = A$, этим доказано, что $\mathfrak{l}(G) \cap \mathring{V} \subset \ln(G \cap V)$.

Обратно, пусть $B \in G \cap V$. Тогда определена матрица $A = \ln B \in \mathring{V}$. Рассмотрим на $\mathrm{GL}(n)$ соответствующее левоинвариантное векторное поле Y: $P \longmapsto PA$. Ограничение $X = Y|_G$ поля Y на G является, очевидно, гладким левоинвариантным векторным полем на G (элементом линеала $\mathfrak{l}(G)$), который ι-связан с полем Y, где $\iota\colon G \to \mathrm{GL}(n)$ — отображение вложения. Согласно предложению 4 лекции 2 это означает, что $\mathfrak{l}(\iota)X = Y$. Следовательно, в силу наших общих отождествлений поле X отождествляется с матрицей A. Значит, $A \in \mathfrak{l}(G)$. Этим доказано, что $\ln(G \cap V) \subset \mathfrak{l}(G) \cap \mathring{V}$.

Таким образом, $\ln(G \cap V) = \mathfrak{l}(G) \cap \mathring{V}$, что доказывает предложение 4. □

Итак, *матричная группа тогда и только тогда является группой Ли, когда она обладает* ln-*образом*. Переход к ln-образу, можно сказать, линеаризует группу, что существенно упрощает ее изучение. Поскольку пространство $\mathfrak{l}(G)$ (совпадающее для матричных групп с ln-образом) определено для любых групп Ли, естественно ожидать, что функтор Ли $\mathfrak{l}\colon G \longmapsto \mathfrak{l}(G)$ играет в теории произвольных групп Ли роль, сходную с ролью функтора ln в теории матричных групп Ли. Оказывается, что это действительно так, и этот факт является фундаментом всей теории групп Ли. Обсуждению всех вопросов, связанных с этим кругом идей, и будет в основном посвящен наш курс.

Определение 2. Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли* (или лиевой алгеброй), если умножение в ней антикоммутативно, т. е.

$$xy = -yx$$

для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ и, кроме того, для любых элементов $x, y, z \in A$ имеет место тождество

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0, \tag{1}$$

называемое *тождеством Якоби.*

По традиции принято алгебры Ли обозначать строчными буквами готического алфавита.

Для любого элемента a алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отображения L_a и R_a отличаются только знаком ($L_a = -R_a$). Для алгебр Ли отображение L_a принято обозначать символом $\operatorname{ad} a$.

Подобно ассоциативным алгебрам, все алгебры Ли составляют полную подкатегорию категории ALG.

Мы будем обозначать эту подкатегорию символом ALG-LIE.

Особое значение для нас будут иметь конечномерные алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$. Они составляют категорию, которую мы будем обозначать символом ALG_f-LIE.

Заметим, что каждая подалгебра алгебры Ли сама является алгеброй Ли.

Большой запас примеров алгебр Ли получается на основе следующей общей конструкции.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная ассоциативная алгебра.

Для любых двух элементов $x, y \in \mathcal{A}$ мы определим их *коммутатор* $[x, y]$ (называемый также их *скобкой Ли*) формулой

$$[x, y] = xy - yx.$$

Ясно, что $[x, y] = -[y, x]$. Кроме того,

$$\begin{aligned}[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = \\ = (xy - yx)z - z(xy - yx) + (yz - zy)x - x(yz - zy) + \\ + (zx - xz)y - y(zx - xz) = 0\end{aligned}$$

для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$. Это означает, что относительно операции $x, y \mapsto [x, y]$ (очевидно, линейной по обоим аргументам) линеал $\mathcal{A}$ является алгеброй Ли. Эту алгебру мы будем называть *коммутаторной алгеброй Ли* ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$. Обозначать ее будем символом $[\mathcal{A}]$.

Поскольку любой гомоморфизм ассоциативных алгебр является, очевидно, гомоморфизмом соответствующих коммутаторных алгебр, соответствие $\mathscr{A} \longmapsto [\mathscr{A}]$ представляет собой некоторый функтор из категории ALG-ASS в категорию ALG-LIE.

Часто бывает удобно обозначать символом $[x, y]$ произведение и в произвольной алгебре Ли (не являющейся, вообще говоря, коммутаторной алгеброй Ли никакой ассоциативной алгебры).

В этих обозначениях отображение $\operatorname{ad} a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ будет определяться формулой

$$(\operatorname{ad} a)\, x = [a, x], \qquad a, x \in \mathfrak{g}.$$

Примером коммутаторной алгебры Ли является коммутаторная алгебра Ли $[\operatorname{End} \mathscr{V}]$ ассоциативной алгебры $\operatorname{End} \mathscr{V}$ всех эндоморфизмов (линейных операторов) линейного пространства $\mathscr{V}$. В случае, когда само $\mathscr{V}$ является алгеброй (не обязательно ассоциативной), в алгебре $[\operatorname{End} \mathscr{V}]$ выделяется линейное подпространство $\mathscr{D}(\mathscr{V})$ всех *дифференцирований* алгебры $\mathscr{V}$, т. е. таких линейных отображений $D\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, что

$$D(xy) = Dx \cdot y + x \cdot Dy$$

для любых элементов $x, y \in \mathscr{V}$. Автоматическое вычисление показывает при этом, что для любых $D_1, D_2 \in \mathscr{D}(\mathscr{V})$ коммутатор $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ принадлежит $\mathscr{D}(\mathscr{V})$, т. е. что линеал $\mathscr{D}(\mathscr{V})$ является подалгеброй алгебры Ли $[\operatorname{End} \mathscr{V}]$. Таким образом, *для любой алгебры $\mathscr{V}$ линеал $\mathscr{D}(\mathscr{V})$ является алгеброй Ли относительно операции $D_1, D_2 \longmapsto D_1D_2 - D_2D_1$.*

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли (умножение в которой обозначено символом $[x, y]$).

Тождество Якоби (1) мы можем переписать, используя антикоммутативность, в любой из следующих двух форм:

$$[a, [x, y]] = [[a, x], y] + [x [a, y]], \qquad a, x, y \in \mathfrak{g},$$

$$[[a, b], x] = [a, [b, x]] - [b, [a, x]], \qquad a, b, x \in \mathfrak{g}.$$

Первое из этих тождеств равносильно утверждению, что *для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ отображение*

$$(\operatorname{ad} a)\, x = [a, x], \qquad x \in \mathfrak{g},$$

является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а второе — утверждению, что *получающееся таким образом отображение* $a \mapsto \operatorname{ad} a$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в алгебру Ли* $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ *является гомоморфизмом.*

Дифференцирования вида $\operatorname{ad} a$ называются *внутренними дифференцированиями* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Мы видим, таким образом, что *совокупность* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ *всех внутренних дифференцирований произвольной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является алгеброй Ли, представляющей собой гомоморфный образ алгебры* $\mathfrak{g}$.

В теории гладких многообразий алгебры Ли (над полем $\mathbb{R}$) возникают как алгебры векторных полей.

Пусть M — произвольное гладкое многообразие и $\mathfrak{a}(M)$ — линейное пространство векторных полей над M. Напомним, что каждое поле $X \in \mathfrak{a}(M)$ может быть рассматриваемо как дифференцирование на M (линейный дифференциальный оператор), т. е. как некоторое правило, сопоставляющее каждому открытому множеству $U \subset M$ дифференцирование X_U алгебры $\mathcal{F}(U)$ гладких функций на U и обладающее тем свойством, что для любого открытого множества $V \subset U$ и любой функции $f \in \mathcal{F}(U)$ имеет место равенство $X_V(f|_V) = (X_U f)|_V$. Поэтому для любых двух полей $X, Y \in \mathfrak{a}(M)$ и любого открытого множества $U \subset M$ определено дифференцирование $[X_U, Y_U]$ алгебры $\mathcal{F}(U)$. Поскольку, как легко видеть, для каждого открытого множества $V \subset U$ и любой функции $f \in \mathcal{F}(U)$ имеет место равенство

$$[X_V, Y_V](f|_V) = ([X_U, Y_U]f)|_V,$$

дифференцирования $[X_U, Y_U]$ составляют некоторое векторное поле.

Определение 3. Векторное поле на M, сопоставляющее каждому открытому множеству $U \subset M$ дифференцирование $[X_U, Y_U]$ алгебры $\mathcal{F}(U)$, называется *скобкой Ли* полей X, Y и обозначается символом $[X, Y]$. Таким образом, по определению

$$[X, Y]_U = [X_U, Y_U].$$

Очевидно, что относительно операции $X, Y \mapsto [XY]$ линейное пространство $\mathfrak{a}(M)$ является алгеброй Ли. Эта алгебра называется *алгеброй Ли векторных полей* на

многообразии M. Вообще говоря, эта алгебра бесконечномерна.

Непосредственное вычисление показывает, что *в каждой карте* $(U, x^1, \ldots, x^n)$ *компоненты* $[X, Y]^i$, $i = 1, \ldots, n$, *поля* $[X, Y]$ *выражаются через компоненты* X^i *и* Y^i, $i = 1, \ldots, n$, *полей* X *и* Y *по формуле*

$$(2) \qquad [X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Действительно,

$$[X, Y]^i = [X, Y] x^i = X(Yx^i) - Y(Xx^i) =$$
$$= X(Y^i) - Y(X^i) = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}. \quad \square$$

Столь же легко показывается, что *если для некоторого гладкого отображения* Φ: $M \to N$ *поля* X *и* Y *на многообразии* M *соответственно* Φ*-связаны с полями* X' *и* Y' *на многообразии* N, *то поле* $[X, Y]$ *также* Φ*-связано с полем* $[X', Y']$. Действительно, Φ-связанность полей X, Y и X', Y' означает, что для любой функции f (определенной и гладкой в некотором открытом подмножестве многообразия N) имеют место равенства

$$X(f \circ \Phi) = X'f \circ \Phi \quad \text{и} \quad Y(f \circ \Phi) = Y'f \circ \Phi.$$

Но тогда

$$[X, Y](f \circ \Phi) = X(Y(f \circ \Phi)) - Y(X(f \circ \Phi)) =$$
$$= X(Y'f \circ \Phi) - Y(X'f \circ \Phi) =$$
$$= X'(Y'f) \circ \Phi - Y'(X'f) \circ \Phi =$$
$$= [X', Y'] f \circ \Phi$$

и, следовательно, поля $[X, Y]$ и $[X', Y']$ также Φ-связаны. $\square$

В частности, мы видим, что *для любого диффеоморфизма* Φ: $M \to N$ *имеет место равенство*

$$\Phi^*[X, Y] = [\Phi^* X, \Phi^* Y],$$

где X, Y — произвольные векторные поля на многообразии N.

Для левоинвариантных векторных полей на группе Ли G отсюда непосредственно следует, что *скобка Ли* $[X, Y]$ *двух левоинвариантных векторных полей* X *и* Y *также является левоинвариантным векторным полем.* Это означает, что линейное пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ левоинвариантных векторных полей является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}(G)$ всех полей и потому само является алгеброй Ли.

Определение 4. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ над полем $\mathbb{R}$ называется *алгеброй Ли группы Ли* G.

Обратим внимание, что скобку Ли $[X, Y]$ на линейном пространстве $L(G)$ мы построили, пользуясь первой интерпретацией этого пространства. Никакого непосредственного построения этой скобки в рамках второй интрепретации $(\mathfrak{l}(G) = \mathrm{T}_e(G))$ не существует. Как строится скобка Ли на основе третьей интерпретации (т. е. при истолковании элементов пространства $\mathfrak{l}(G)$ как однопараметрических подгрупп), мы укажем позже.

Как мы знаем, любой гомоморфизм Φ: $G \to H$ групп Ли индуцирует некоторое линейное отображение $\mathfrak{l}(\Phi)$: $\mathfrak{l}(G) \to \mathfrak{l}(H)$, причем для любого поля $X \in \mathfrak{l}(G)$ поле $\mathfrak{l}(\Phi) X \in \mathfrak{l}(H)$ будет Φ-связано с полем X. Поэтому это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли.

Таким образом, функтор Ли $\mathfrak{l}$: GR-DIFF $\to$ LIN$_f(\mathbb{R})$ на самом деле является функтором

$$\mathfrak{l}\colon \text{GR-DIFF} \to \text{ALG}_f\text{-LIE}$$

из категории групп Ли в категорию ALG$_f$-LIE конечномерных алгебр Ли над полем $\mathbb{R}$ (точнее, функтор GR-DIFF $\to$ LIN$_f(\mathbb{R})$ представляет собой композицию функтора GR-DIFF $\to$ ALG$_f$-LIE и функтора игнорирования ALG$_f$-LIE $\to$ LIN$_f(\mathbb{R})$).

Вычислим скобку Ли для матричных групп Ли. Поскольку для любой матричной группы Ли G алгебра $\mathfrak{l}(G)$ является, очевидно, подалгеброй алгебры $\mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n)) = \mathfrak{gl}(n)$, нам достаточно вычислить эту скобку только в алгебре $\mathfrak{gl}(n)$.

Мы произведем вычисление сразу для произвольной группы вида $G(\mathscr{A})$, где $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра.

Как было установлено в лекции 2, линеал $\mathrm{I}(G)$ для группы $G = G(\mathscr{A})$ естественным образом отождествляется с линеалом $\mathscr{A}$, причем в этом отождествлении элементу $a \in \mathscr{A}$ отвечает левоинвариантное векторное поле на $G(\mathscr{A})$ вида $x \longmapsto xa$, $x \in G(\mathscr{A})$ (рассматриваемое как отображение $G(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$).

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис алгебры $\mathscr{A}$, и пусть, как и в лекции 2,

$$e_i e_j = c_{ij}^k e_k, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n,$$

где $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$. Координаты $x^1, \ldots, x^n$ элементов алгебры $\mathscr{A}$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ являются локальными координатами в любой точке $x \in G(\mathscr{A})$, причем отвечающий им базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x$ касательного пространства $\mathrm{T}_x(G(\mathscr{A}))$ соответствует при отождествлении $\mathrm{T}_x(G(A)) = \mathscr{A}$ базису $e_1, \ldots, e_n$. Поэтому при отождествлении векторных полей на $G(\mathscr{A})$ с отображениями $G(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ векторному полю $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ отвечает отображение $x \longmapsto X^i e_i$.

Поскольку $xa = c_{jk}^i x^j a^k e_i$ при $x = x^j e_j$, $a = a^k e_k$, отсюда следует, что в базисе $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ левоинвариантное векторное поле X: $x \longmapsto xa$, соответствующее элементу $a \in \mathscr{A}$, имеет координаты

$$X^i = c_{jk}^i x^j a^k.$$

Поэтому для любых левоинвариантных векторных полей X и Y на $G(\mathscr{A})$ координаты $[X, Y]^l$ их скобки Ли будут выражаться формулой

$$\begin{aligned}[X, Y]^l &= X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^l}{\partial x^k} = \\ &= c_{ij}^k x^i a^j \cdot c_{km}^l b^m - c_{ij}^k x^i b^j \cdot c_{km}^l a^m = \\ &= c_{km}^l \left(c_{ij}^k x^i a^j\right) b^m - c_{km}^l \left(c_{ij}^k x^i b^j\right) a^m,\end{aligned}$$

где a и b — элементы алгебры $\mathscr{A}$, отвечающие полям X и Y. Но эта формула означает, что числа $[X, Y]^l$ являются

координатами точки $xa\cdot b - xb\cdot a = x(ab - ba)$, и, следовательно, что полю $[X, Y]$ соответствует элемент $ab - ba = [a, b]$. Этим доказано, что в силу отождествления $\mathfrak{l}(G(\mathscr{A})) = \mathscr{A}$ *коммутаторная алгебра Ли* $[\mathscr{A}]$ *ассоциативной алгебры* $\mathscr{A}$ *является алгеброй Ли группы Ли* $G(\mathscr{A})$.

В частности, *алгеброй Ли* $\mathfrak{gl}(n)$ *группы Ли* $\mathrm{GL}(n)$ *служит коммутаторная алгебра* $[\mathbb{R}(n)]$ *алгебры матриц* $\mathbb{R}(n)$.

Для произвольной же матричной группы G алгебра Ли $\mathfrak{l}(G)$ является соответствующей подалгеброй алгебры Ли $[\mathbb{R}(n)] = \mathfrak{gl}(n)$.

Нашей дальнейшей целью будет детальное изучение функтора Ли $\mathfrak{l}$ и, в частности, выяснение, в какой мере (и как) этот функтор обратим, т. е. в какой мере группа Ли G может быть восстановлена по ее алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$.

В предыдущей лекции уже было замечено, что $\mathfrak{l}(G) = \mathfrak{l}(G_e)$, где G_e — компонента единицы группы G. В более педантичных терминах это равенство утверждает, что гомоморфизм вложения $G_e \to G$ индуцирует изоморфизм $\mathfrak{l}(G_e) \approx \mathfrak{l}(G)$ линейных пространств. Но поскольку гомоморфизм групп Ли индуцирует гомоморфизм алгебр Ли, изоморфизм $\mathfrak{l}(G_e) \approx \mathfrak{l}(G)$ будет изоморфизмом и алгебр Ли. Иными словами, *равенство* $\mathfrak{l}(G_e) = \mathfrak{l}(G)$ *имеет место для алгебр Ли.*

Поэтому вопрос об обратимости функтора $\mathfrak{l}$: GR-DIFF $\to$ ALG$_f$-LIE целесообразно ставить только для связных групп Ли.

Полную подкатегорию категории GR-DIFF, порожденную связными группами Ли, мы будем обозначать символом GR$_0$-DIFF. Ограничение функтора Ли на этой подкатегории мы также будем называть *функтором Ли.* Согласно только что сказанному имеет место коммутативная диаграмма функторов

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GR\text{-}DIFF} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathrm{GR_0\text{-}DIFF} \arrow[r, dashed] & \mathrm{ALG}_f\text{-}\mathrm{LIE}
\end{tikzcd}$$

правые наклонные стрелки которой являются функторами Ли, а левая вертикальная стрелка — функтором «компонента единицы», сопоставляющим каждой группе Ли ее компоненту единицы. Эта диаграмма является формальной записью равенства $\mathrm{I}(G_e) = \mathrm{I}(G)$ на функториальном языке.

Будет ли на категории GR_0-DIFF функтор Ли обратим, т. е., точнее говоря, будут ли изоморфны группы с изоморфными алгебрами Ли? Ответ оказывается отрицательным.

Рассмотрим, например, аддитивную группу $\mathbb{R}$ вещественных чисел и мультипликативную группу $\mathbb{S}^1$ комплексных чисел, равных по модулю единице. У обеих групп алгебра Ли одномерна. Но в силу антикоммутативности умножение в любой одномерной алгебре Ли (над полем $\mathbb{R}$) тривиально (произведение любых двух элементов равно нулю). Поэтому алгебры Ли групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{S}^1$ изоморфны, тогда как сами группы не изоморфны (одна из них компактна, а другая — нет).

Причина совпадения алгебр Ли в этом примере ясна: группы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{S}^1$ локально (в окрестности единицы) «устроены одинаково».

Это наводит на мысль ввести для связных групп Ли отношение «локальной изоморфности», считая группы G и H *локально изоморфными*, если некоторую окрестность U единицы группы G можно диффеоморфно отобразить на некоторую окрестность V единицы группы H так, чтобы произведение xy любых двух элементов x и y из окрестности U в случае, когда оно принадлежит U, переходило бы в произведение $\bar{x}\bar{y}$ соответствующих элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Очевидно, что *алгебры Ли двух локально изоморфных групп Ли изоморфны*, и можно надеяться (по крайней мере приведенный выше пример этому не противоречит), что и, обратно, *группы Ли с изоморфными алгебрами Ли локально изоморфны*. Оказывается, что это действительно так. Доказательство этого основного факта и будет одной из наших главнейших целей. Мы приступим к нему на следующей лекции, а окончательно завершим только в лекции 9.

Однако понятие локального изоморфизма «глобальных» групп Ли с общих методологических позиций пред-

ставляется не очень удачным. Опыт конструирования математических теорий подсказывает, что такого рода смешение глобальных и локальных аспектов приводит к неуклюжим формулировкам и необоснованным усложнениям доказательств. Всегда нужно стремиться к тому, чтобы с самого начала четко отделить локальные вопросы от глобальных.

Для конкретного случая групп Ли эти общие замечания обосновывают целесообразность введения нового математического понятия «групускулы Ли», являющегося формализацией окрестности единицы в группе Ли вместе с имеющимся в этой окрестности умножением.

Определение 5. Гладкое многообразие G называется *групускулой Ли*, если:

1) в нем выделен некоторый элемент e, называемый *единицей*;

2) выделены окрестность $U \subset G \times G$ элемента (e, e) и окрестность $U_0 \subset G$ элемента e;

3) задано гладкое отображение

$$U \to G, \tag{3}$$

называемое *умножением* и гладкое отображение

$$U_0 \to G, \tag{4}$$

называемое операцией взятия *обратного элемента*; образ точки $(x, y) \in U$ при отображении (3) обозначается символом xy, а образ точки $x \in U_0$ при отображении (4) — символом x^{-1};

4) имеет место равенство $e^{-1} = e$;

5) если $(x, e) \in U$, то $xe = x$; если $(e, x) \in U$, то $ex = x$;

6) если $(x, y) \in U$, $(y, z) \in U$, $(xy, z) \in U$ и $(x, yz) \in U$, то

$$(xy)z = x(yz);$$

7) если $(x, y) \in U$, $y \in U_0$ и $(xy, y^{-1}) \in U$, то

$$(xy)y^{-1} = x,$$

и аналогично, если $(x, y) \in U$, $x \in U_0$ и $(x^{-1}, xy) \in U$, то

$$x^{-1}(xy) = y.$$

Короче, G есть групускула Ли, если для элементов x, y, достаточно близких к единице e, определено произ-

ведение xy и обратный элемент x^{-1}, гладко зависящие от x, y, причем выполнены все аксиомы группы каждый раз, когда участвующие в этих аксиомах объекты определены.

Групускулы Ли называются также *локальными группами Ли*.

Руководящим примером групускулы Ли является произвольная окрестность единицы в произвольной группе Ли.

Несмотря на кажущуюся естественность, определение 5 на самом деле мало удовлетворительно, ибо оно не отражает всех аспектов интуитивного понятия, которое мы имеем в виду формализовать. Действительно, естественно считать, что две различные окрестности единицы в данной группе Ли приводят к одной и той же групускуле Ли, тогда как, согласно определению 5, эти групускулы будут различны.

Чтобы поправить дело, мы заметим, что любое открытое множество H групускулы Ли G, содержащее единицу e, автоматически само является групускулой Ли. Каждая такая групускула называется *частью* групускулы G. Две групускулы Ли называются *эквивалентными*, если некоторые их части совпадают. Класс эквивалентных групускул Ли называется *ростком* групускул Ли. (Ср. с определением ростков гладких функций в теории гладких многообразий.)

Ростки групускул Ли и являются адекватной формализацией интуитивного понятия группы Ли, рассматриваемой локально. Однако последовательное использование ростков очень утяжеляет изложение. На практике сложился несколько свободный стиль (которому мы тоже будем следовать), когда, говоря о групускулах Ли, на самом деле молчаливо подразумевают их ростки, а требуемые по ходу дела переходы к эквивалентным групускулам либо вообще не упоминаются, либо указываются лишь в отдельных наиболее «острых» случаях.

Читателю очень рекомендуется самому переделать все дальнейшее изложение на более педантичный лад с четким различением групускул Ли и их ростков.

Определение 6. *Гомоморфизмом* групускулы Ли G в групускулу Ли H называется такое гладкое отображение

Φ некоторой окрестности V единицы групускулы G в групускулу H, что

$$\Phi(xy) = \Phi x \cdot \Phi y$$

каждый раз, когда элементы $\Phi(xy)$ и $\Phi x \cdot \Phi y$ определены. Если G_1 и H_1 — части групускул G и H, и если $\Phi(V \cap G_1) \subset H_1$, то Φ определяет некоторый гомоморфизм групускулы G_1 в групускулу H_1, называемый *частью* гомоморфизма Φ. Два гомоморфизма называются *эквивалентными*, если у них имеется общая часть. Класс эквивалентных гомоморфизмов называется *ростком гомоморфизмов* (или *гомоморфизмом ростков*).

Все групускулы Ли и их гомоморфизмы (точнее, ростки групускул Ли и их гомоморфизмы) образуют, очевидным образом, некоторую категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом GR-LOC.

Операция перехода к произвольной окрестности единицы определяет, очевидно, некоторый функтор

$$\text{GR-DIFF} \to \text{GR-LOC}$$

(а также функтор $\text{GR}_0\text{-DIFF} \to \text{GR-LOC}$) из категории GR-DIFF всех групп Ли (из категории $\text{GR}_0\text{-DIFF}$ всех связных групп Ли) в категорию GR-LOC групускул Ли. Этот функтор мы будем называть *функтором локализации*. Образ группы Ли G при функторе локализации мы будем иногда обозначать символом G_{loc}.

Группы Ли локально изоморфны, если их локализации изоморфны (как объекты категории GR-LOC).

Для групускул Ли очевидным образом определяются левоинвариантные векторные поля и их скобки Ли. Совокупность $\mathfrak{l}(G)$ всех левоинвариантных векторных полей на групускуле Ли G является алгеброй Ли, называемой *алгеброй Ли групускулы* G. Так же как и для групп Ли, элементы алгебры Ли $\mathfrak{l}(G)$ естественным образом отождествляются с касательными векторами $A \in \mathbf{T}_e(G)$, а также с однопараметрическими подгруппами (или, лучше сказать, с *однопараметрическими подгрупускулами*, но этот термин неупотребителен) групускулы G.

Возникающий функтор

$$\mathfrak{l}\colon \text{GR-LOC} \to \text{ALG}_f\text{-LIE}$$

мы также будем называть *функтором Ли*.

Вместе с введенными выше функторами Ли этот функтор включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GR\text{-}DIFF} \arrow[d] \arrow[dr, "2"] \arrow[drr, bend left, "4"] & & \\
\mathrm{GR_0\text{-}DIFF} \arrow[r, "1"] \arrow[drr, bend right, "5"'] & \mathrm{GR\text{-}LOC} \arrow[r, "3"] & \mathrm{ALG_f\text{-}LIE}
\end{tikzcd}$$

левая вертикальная стрелка которой изображает функтор, сопоставляющий произвольной группе Ли компоненту единицы, стрелки *1* и *2* изображают функторы локализации, а стрелки *3*, *4* и *5* — функторы Ли.

Мы видим, что интересующий нас в первую очередь функтор GR-DIFF $\to$ ALG$_f$-LIE распадается в композицию трех функторов: функтора GR-DIFF $\to$ GR$_0$-DIFF, функтора локализации GR$_0$-DIFF $\to$ GR-LOC и функтора Ли GR-LOC $\to$ ALG$_f$-LIE для групускул Ли. Тем самым изучение функтора GR-DIFF $\to$ ALG$_f$-LIE сводится к изучению этих трех функторов. Исследование каждого из них требует своих особых методов и, по существу, никак не связано с исследованием остальных. Этим наша цель — разделить локальные и глобальные аспекты — полностью достигнута. Локальная часть задачи сосредоточена в функторе GR-LOC $\to$ ALG$_f$-LIE, а глобальная — в функторах GR-DIFF $\to$ GR$_0$-DIFE и GR$_0$-DIFF $\to$ $\to$ GR-LOC.

Функтор GR-DIFF $\to$ GR$_0$-DIFF мы фактически уже рассмотрели в лекции 1. Как было доказано в этой лекции, любая группа Ли G является расширением своей компоненты единицы $H = G_e$ посредством некоторой дискретной группы. Обратно, каждое расширение G связной группы Ли H посредством дискретной группы очевидным образом является группой Ли с $G_e = H$. В первом приближении это достаточно удовлетворительно описывает функтор GR-DIFF $\to$ GR$_0$-DIFF.

Описание функтора GR$_0$-DIFF $\to$ GR-LOC мы получим в лекции 10, а пока займемся функтором $\mathfrak{l}$: GR-LOC $\to$ ALG$_f$-LIE.