Лекция 5

СВОБОДНЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ. — СВОБОДНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ. — ОСНОВНАЯ ЛЕММА. — УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА. — ВЛОЖЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ В ЕЕ УНИВЕРСАЛЬНУЮ ОБЕРТЫВАЮЩУЮ АЛГЕБРУ. — ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО АЛГЕБРА $\mathfrak{L}(X)$ СВОБОДНА. — ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ — БИРКГОФА — ВИТТА. — ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЛИНЕАЛОВ И АЛГЕБР. — АЛГЕБРЫ ХОПФА.

Для доказательства утверждения В из предыдущей лекции, имеющего чисто алгебраический характер, мы разовьем соответствующий формализм в несколько большей общности и подробности, чем это непосредственно необходимо, поскольку это позволит нам без особой потери времени изложить ряд интересных и важных конструкций, полезных и во многих других вопросах теории алгебр Ли.

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная категория алгебр (над данным полем $\mathbb{K}$, которое в этой лекции мы можем считать произвольным). В соответствии с общим пониманием, что такое «свободный объект» (полностью проясняющимся лишь на базе общекатегорного понятия сопряженного функтора), алгебра $\mathscr{F}$ категории $\mathbf{A}$ с выделенным в ней подмножеством X называется *свободной алгеброй* категории $\mathbf{A}$ с *множеством свободных образующих* X, если для любой алгебры $\mathscr{A}$ категории $\mathbf{A}$ каждое отображение $X \to \mathscr{A}$ единственным образом распространяется до некоторого гомоморфизма $\mathscr{F} \to \mathscr{A}$.

Например, свободной алгеброй в категории ассоциативных, коммутативных и унитальных алгебр является

алгебра многочленов $\mathbb{K}[X]$ от неизвестных, пробегающих множество X. Аналогичным образом в категории ALG_0-ASS ассоциативных (но, вообще говоря, некоммутативных) унитальных алгебр свободной алгеброй будет *алгебра многочленов от некоммутирующих неизвестных из* X. Мы будем обозначать эту алгебру символом $\mathbb{K}\langle X\rangle$, а для конечного множества $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — символом $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

Для единственно интересного нам случая, когда множество X состоит из двух элементов x, y, каждый элемент алгебры $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{K}$ выражений вида

$$x^{p_1}y^{q_1} \ldots x^{p_k}y^{q_k}, \tag{1}$$

которые называются *одночленами от* x *и* y. Здесь p_1, q_1, $\ldots$, p_k, q_k — произвольные неотрицательные целые числа, которые все, за возможным исключением «крайних» чисел p_1 и q_k, отличны от нуля. Если $p_1=0$, то член x^{p_1} не пишется, а если $q_k=0$, то не пишется член y^{q_k}. Число $n=p_1+q_1+\ldots+p_k+q_k$ называется *степенью* одночлена (1).

Допускается *пустой одночлен* (с $k=0$), отождествляемый с единицей 1 поля $\mathbb{K}$. Степень этого одночлена равна нулю.

Тот факт, что одночлены (1) составляют базис алгебры $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$, однозначно определяет в $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ операции сложения и умножения на числа из $\mathbb{K}$. Что же касается умножения, то по дистрибутивности его достаточно определить только для одночленов (1). Если одночлены $x^{p_1}y^{q_1} \ldots x^{p_k}y^{q_k}$ и $x^{r_1}y^{s_1} \ldots x^{r_l}y^{s_l}$ таковы, что $q_k\neq 0$ и $r_1\neq 0$ или, напротив, $q_k=0$ и $r_1=0$, то их произведением считается одночлен

$$x^{p_1}y^{q_1} \ldots x^{p_k}y^{q_k}x^{r_1}y^{s_1} \ldots x^{r_l}y^{s_l}, \tag{2}$$

получающийся в результате приписывания второго одночлена к первому (при $q_k=0$ и $r_1=0$ члены y^{q_k} и x^{r_1}, естественно, не пишутся). Если же из двух показателей q_k и r_1 один и только один равен нулю, то за произведение одночленов принимается одночлен, получающийся из выражения (2) (которое в этом случае не является

одночленом) при $q_k = 0$ заменой $x^{p_k}y^{q_k}x^{r_1}$ на $x^{p_k+r_1}$, а при $r_1 = 0$ — заменой $y^{q_k}x^{r_1}y^{s_1}$ на $y^{q_k+s_1}$. Непосредственная проверка показывает, что это умножение, как и требуется, ассоциативно. Его единицей служит пустой одночлен 1.

Если теперь $\{x, y\} \to \mathscr{A}$ — произвольное отображение множества $\{x, y\}$ в некоторую ассоциативную унитальную алгебру $\mathscr{A}$, то, сопоставив любому одночлену (1) элемент $a^{p_1}b^{q_1} \ldots a^{p_k}b^{q_k}$ алгебры $\mathscr{A}$, где a и b — образы образующих x и y в алгебре $\mathscr{A}$, и распространив по линейности это соответствие на произвольные многочлены, мы, как показывает автоматическая проверка, получим гомоморфизм $\mathbb{K}\langle x, y\rangle \to \mathscr{A}$, переводящий x и y в a и b, т. е. продолжающий данное отображение $\{x, y\} \to \mathscr{A}$. Поскольку произвольный продолжающий гомоморфизм должен переводить одночлен (1) в элемент $a^{p_1}b^{q_1} \ldots$ $\ldots a^{p_k}b^{q_k}$, никакого другого продолжающего гомоморфизма существовать не может. Это доказывает, что *алгебра* $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ *является свободной алгеброй категории* ALG_0-ASS *со свободными образующими* x *и* y.

Алгебра $\mathbb{K}\langle X\rangle$ при любом X описывается аналогично. Доказательство свободности алгебры $\mathbb{K}\langle X\rangle$ при любом X получается из доказательства при $X = \{x, y\}$ очевидными, само собой понятными изменениями.

Свободные алгебры категории ALG-LIE (они называются *свободными алгебрами Ли*) строятся существенно сложнее. По-видимому, самый простой путь состоит в том, чтобы в алгебре Ли $[\mathbb{K}\langle X\rangle]$, присоединенной к алгебре многочленов $\mathbb{K}\langle X\rangle$, рассмотреть подалгебру $\mathbb{L}\langle X\rangle$, порожденную множеством X, т. е. наименьшую подалгебру, содержащую это множество. Так же, как и в случае $X = \{x, y\}$ (см. предыдущую лекцию), элементами алгебры Ли $\mathbb{L}\langle X\rangle$ являются *лиевы многочлены* от элементов множества X, т. е. всевозможные выражения, которые можно получить, отправляясь от этих элементов действиями сложения, умножения на числа и операцией Ли $[a, b] = ab - ba$ (все эти элементы лежат, конечно, в $\mathbb{L}\langle X\rangle$ и вместе с тем сами составляют подалгебру алгебры $[\mathbb{K}\langle X\rangle]$). К сожалению, для элементов алгебры $\mathbb{L}\langle X\rangle$ нет простых канонических представлений

(подобных представлению элементов алгебры $\mathbb{K}\langle X\rangle$ в виде линейных комбинаций одночленов), что существенно осложняет ее изучение.

Как и в предыдущей лекции, мы символом ι будем обозначать вложение $\mathbb{L}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle$, т. е. — точнее — отображение, переводящее произвольный лиев многочлен $u \in \mathbb{L}\langle X\rangle$ в многочлен ιu из $\mathbb{K}\langle X\rangle$, получающийся после раскрытия всех скобок Ли по формуле $[a, b] = ab - ba$.

Предложение 1. Алгебра $\mathbb{L}\langle X\rangle$ *является свободной алгеброй Ли с множеством свободных образующих* X.

Доказательство этого предложения весьма сложно. Мы начнем его издалека с доказательства одной леммы, относящейся к любым алгебрам Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли (над полем $\mathbb{K}$), и пусть

3) $$X = \{x_i,\ i \in I\}$$

— некоторый ее базис (как линейного пространства). Мы не предполагаем алгебру $\mathfrak{g}$ конечномерной, поэтому множество индексов I, которое мы считаем вполне упорядоченным, вообще говоря, бесконечно. (Существование базиса в произвольном линеале без труда доказывается с помощью леммы Цорна, поскольку множество всех подпространств линеала, обладающих базисами, как легко видеть, индуктивно, и вместе с тем любое собственное подпространство, обладающее базисом, может быть включено — путем добавления одного вектора — в большее подпространство, также обладающее базисом.)

Пусть, далее, $\mathscr{V}_I$ — линейное пространство, базис которого состоит из элементов z_α, индексами которых служат всевозможные *монотонные* (т. е. такие, что $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n$) последовательности $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ элементов множества I.

Для каждой последовательности $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ мы будем символом $|\alpha|$ обозначать число n ее членов. К монотонным последовательностям мы будем относить и *пустую последовательность* $\varnothing$, для которой $|\varnothing| = 0$.

Произведение элементов a, b алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы будем обозначать символом $[a, b]$.

Лемма 1. Любому элементу $a \in \mathfrak{g}$ и любому элементу $v \in \mathscr{V}_I$ можно так сопоставить некоторый элемент $av \in \mathscr{V}_I$, что будут выполнены следующие условия:

а) *элемент av линейно зависит от a и v;*

б) *для любых элементов $a, b \in \mathfrak{g}$ и любого элемента $v \in \mathscr{V}_I$ имеет место равенство*

$$[a, b]\, v = a(bv) - b(av);$$

в) *если $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ и $i < i_1$, то*

$$x_i z_\alpha = z_{i\alpha},$$

где $i\alpha = (i, i_1, \ldots, i_n)$.

Доказательство. В силу условия а) достаточно построить элементы вида $x_i z_\alpha$. Мы сделаем это индукцией по $|\alpha|$ и i. Для проведения этой индукции удобно несколько усилить лемму, потребовав дополнительно выполнения следующего условия:

г) *если $x_i z_\alpha = \sum c_k z_{\beta_k}$, то $|\beta_k| \leqslant |\alpha| + 1$ для всех k.*

При $\alpha = \varnothing$ и любом i мы, по определению, положим

$$x_i z_\varnothing = z_i.$$

Пусть элементы $x_j z_\beta$ уже построены для всех j и всех β с $|\beta| < |\alpha|$, а также для всех $j < i$ при $|\beta| = |\alpha|$. Полагая $\alpha = i_1\beta$, мы определим элемент $x_i z_\alpha$ формулой

$$x_i z_\alpha = \begin{cases} z_{i\alpha}, & \text{если} \quad i \leqslant i_1; \\ x_{i_1}(x_i z_\beta) + [x_i, x_{i_1}]\, z_\beta, & \text{если} \quad i > i_1. \end{cases}$$

В силу условия г) и предположения индукции это определение корректно. Ясно, что для так построенного элемента $x_i z_\alpha$ условия в) и г) выполнены.

Тем самым все элементы $x_i z_\alpha$, а значит (по линейности), и все элементы av, $a \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathscr{V}_I$, построены. Осталось проверить условие б). Ясно, что это достаточно сделать лишь при $a = x_i$, $b = x_j$, $v = z_\alpha$. Таким образом, нам осталось лишь доказать, что для любых i, j и любой монотонной последовательности $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ справедливо равенство

$$x_i(x_j z_\alpha) - x_j(x_i z_\alpha) = [x_i, x_j]\, z_\alpha. \tag{4}$$

При $i=j$ это равенство, очевидно, выполнено. Кроме того, если оно выполнено для пары (i, j), то оно выполнено и для пары (j, i). Поэтому, без ограничения общности, мы можем предполагать, что $i>j$.

Проведем индукцию по $|\alpha|$. При $\alpha=\varnothing$ (и $i>j$), по определению,

$$x_i(x_j z_\varnothing)=x_j(x_i z_\varnothing)+[x_i, x_j] z_\varnothing.$$

Следовательно, при $\alpha=\varnothing$ равенство (4) справедливо.

Предполагая теперь, что равенство (4) выполнено для всех α с $|\alpha|<n$, рассмотрим произвольную последовательность $\alpha=(i_1, \ldots, i_n)$ с $|\alpha|=n$. Для симметрии формул положим $i_1=k$ и $\beta=(i_2, \ldots, i_n)$.

Если $j \leqslant k$, то, по определению,

$$x_i(x_j z_\alpha)=x_i z_{j\alpha}=x_j(x_i z_\alpha)+[x_i, x_j] z_\alpha,$$

так что в этом случае равенство (4) верно.

Пусть $j>k$. По предположению индукции равенство (4) верно при $\alpha=\beta$ (и любых i и j). Поэтому

$$\begin{aligned}[x_i, x_j] z_\alpha &= [x_i, x_j](x_k z_\beta)= \\ &= x_k([x_i, x_j] z_\beta)+[[x_i, x_j], x_k] z_\beta= \\ &= x_k(x_i(x_j z_\beta))-x_k(x_j(x_i z_\beta))+[[x_i, x_j], x_k] z_\beta,\end{aligned}$$

и, значит, равенство (4) мы можем переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}x_i(x_j(x_k z_\beta))-x_j(x_i(x_k z_\beta))+x_k(x_j(x_i z_\alpha))- \\ -x_k(x_i(x_j z_\alpha))=[[x_i, x_j], x_k] z_\beta.\end{aligned}$$

Обозначим это равенство символом (i, j, k).

Заметим теперь, что равенства (j, k, i) и (k, i, j), получаемые из равенства (i, j, k) циклической перестановкой индексов, мы можем считать доказанными. Действительно, при переименовании индексов $j \mapsto i$, $k \mapsto j$, $i \mapsto k$ равенство (j, k, i) переходит в равенство (i, j, k) с $i>j$ и $j<k$, а в этих предположениях оно уже доказано. Аналогично при переименовании индексов $k \mapsto j$, $i \mapsto i$, $j \mapsto k$ равенство (k, i, j) также переходит (правда, с изменением всех знаков) в равенство (i, j, k) с $i>j$ и $j<k$.

С другой стороны, сложив равенства (j, k, i) и (k, i, j), мы в левой части получим, очевидно, как раз левую часть равенства (i, j, k) с обратным знаком. Что же касается правой части суммы, то она будет равна

$$([[x_j, x_k], x_i] + [[x_k, x_i], x_j])\, z_\beta,$$

что в силу тождества Якоби равно взятой с обратным знаком правой части равенства (i, j, k). Следовательно, поскольку равенства (j, k, i) и (k, i, j) верны, равенство (i, j, k) тоже верно.

Тем самым лемма 1 полностью доказана. □

Напомним, что линейное пространство $\mathscr{V}$ называется модулем над ассоциативной алгеброй $\mathscr{A}$ (или просто $\mathscr{A}$-модулем), если для любого элемента $a \in \mathscr{A}$ и любого элемента $v \in \mathscr{V}$ определен элемент $av \in \mathscr{V}$, линейно зависящий от a и v, и если для любых элементов $a, b \in \mathscr{A}$, $v \in \mathscr{V}$ выполнено соотношение

5) $$(ab)\, v = a\,(bv).$$

Тот факт, что элемент av линейно зависит от элемента v, означает, что отображение $v \longmapsto av$ пространства $\mathscr{V}$ в себя линейно. Обозначая это отображение символом $\theta(a)$, мы получаем, следовательно, некоторое отображение θ алгебры $\mathscr{A}$ в алгебру $\operatorname{End}\mathscr{V}$ всех линейных отображений (эндоморфизмов) пространства $\mathscr{V}$ в себя. Тот факт, что элемент av линейно зависит от элемента a, означает, что отображение θ линейно, а соотношение (5) означает, что это отображение является гомоморфизмом алгебр. Обратно, задание произвольного гомоморфизма алгебр $\theta\colon \mathscr{A} \to \operatorname{End}\mathscr{V}$ определяет на $\mathscr{V}$ строение модуля над $\mathscr{A}$, для которого $av = \theta(a)v$.

Аналогичным образом линейное пространство $\mathscr{V}$ называется *модулем над алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$, если задан некоторый гомоморфизм $\theta\colon \mathfrak{g} \to [\operatorname{End}\mathscr{V}]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $[\operatorname{End}\mathscr{V}]$. В терминах элементов это означает, что для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ и любого элемента $v \in \mathscr{V}$ определен элемент $av = \theta(a)v$, линейно зависящий от a и v, причем для любых элементов $a, b \in \mathfrak{g}$ и $v \in \mathscr{V}$ выполнено соотношение

$$[a, b] = a\,(bv) - b\,(av).$$

Сравнивая эти требования с условиями а) и б) леммы 1, мы видим, что эта лемма означает, что *в линейное пространство $\mathscr{V}_l$ может быть введена такая структура модуля над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, что для любой монотонной последовательности $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и любого $i \leqslant i_1$ будет иметь место равенство*

$$x_i z_\alpha = z_{i\alpha}.$$

В этой формулировке мы и будем этой леммой пользоваться.

Пусть теперь $\mathscr{U}$ — некоторая ассоциативная унитальная алгебра и $\iota\colon \mathfrak{g} \to [\mathscr{U}]$ — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в коммутаторную алгебру Ли алгебры $\mathscr{U}$.

Определение 1. Говорят, что гомоморфизм $\iota\colon \mathfrak{g} \to [\mathscr{U}]$ обладает *свойством универсальности*, а алгебра $\mathscr{U}$ (рассматриваемая вместе с этим гомоморфизмом) представляет собой *универсальную обертывающую алгебру* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если для любой ассоциативной унитальной алгебры $\mathscr{A}$ и любого гомоморфизма $\varphi\colon \mathfrak{g} \to [\mathscr{A}]$ существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{A}$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{U} \arrow[dl, "\psi"] \\ \mathscr{A} & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Мы будем писать $\psi = \mathscr{U}\varphi$.

Заметим, что если $\mathscr{A} = \mathscr{U}$ и $\varphi = \iota$, то $\mathscr{U}\varphi$ является тождественным гомоморфизмом $\mathrm{id}\colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}$.

Для алгебры Ли $\mathrm{L}\langle X\rangle$ универсальной обертывающей алгеброй служит алгебра $\mathbb{K}\langle X\rangle$ (относительно вложения $\iota\colon \mathrm{L}\langle X\rangle \to [\mathbb{K}\langle X\rangle]$). Действительно, пусть $\varphi\colon \mathrm{L}\langle X\rangle \to [\mathscr{A}]$ — произвольный гомоморфизм алгебры $\mathrm{L}\langle X\rangle$ в коммутаторную алгебру $[\mathscr{A}]$ некоторой ассоциативной унитальной алгебры $\mathscr{A}$. Так как алгебра $\mathbb{K}\langle X\rangle$ свободна, то отображение $\varphi\big|_X\colon X \to \mathscr{A}$ единственным образом распространяется до некоторого гомоморфизма $\psi\colon \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathscr{A}$. Поэтому нам нужно только показать, что $\psi \circ \iota = \varphi$

т. е. что $\psi|_{\mathrm{I}\langle X\rangle} = \varphi$. Но по построению $\psi = \varphi$ на X. Кроме того, если $\varphi a = \psi a$ и $\varphi b = \psi b$, где $a, b \in \mathrm{I}\langle X\rangle$, то $\varphi(a+b) = \psi(a+b)$, $\varphi(ka) = \psi(kb)$ (ибо оба отображения φ и ψ линейны) и $\varphi[a, b] = [\varphi a, \varphi b] = \varphi a \cdot \varphi b - \varphi b \cdot \varphi a = \psi a \cdot \psi b - \psi b \cdot \psi a = \psi(ab - ba) = \psi[a, b]$. Поэтому $\varphi = \psi$ на всех лиевых многочленах от X, т. е. на всей алгебре $\mathrm{I}\langle X\rangle$. □

Если $\iota_1\colon \mathfrak{g} \to [\mathcal{U}_1]$ и $\iota_2\colon \mathfrak{g} \to [\mathcal{U}_2]$ — два гомоморфизма, обладающих свойством универсальности, то определены гомоморфизмы $\rho = \mathcal{U}_1\iota_2\colon \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ и $\sigma = \mathcal{U}_2\iota_1\colon \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$, возникающие в силу универсальности гомоморфизмов ι_1 и ι_2 соответственно:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & \mathcal{U}_1 \arrow[d, shift left, "\rho"] \\ \mathcal{U}_2 \arrow[u, shift left, "\sigma"] & \end{tikzcd}$$

При этом для композиции $\sigma \circ \rho$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & \mathcal{U}_1 \arrow[dl, "\sigma\circ\rho"] \\ \mathcal{U}_1 & \end{tikzcd}$$

показывающая, что $\sigma \circ \rho = \mathcal{U}_1\iota_1$. Но, как выше было замечено, $\mathcal{U}_1\iota_1 = \mathrm{id}$, где id — тождественное отображение $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_1$. Поэтому $\sigma \circ \rho = \mathrm{id}$. Аналогично показывается, что композиция $\rho \circ \sigma$ представляет собой тождественное отображение $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_2$. Следовательно, гомоморфизмы ρ и σ являются взаимно обратными изоморфизмами. Этим доказано, что *для любых двух универсальных обертывающих алгебр $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует такой изоморфизм* $\rho\colon \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$, что $\rho \circ \iota_1 = \iota_2$.

В этом смысле универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}$ данной алгебры Ли единственна.

Чтобы доказать ее существование, мы, снова выбрав в $\mathfrak{g}$ произвольный базис (3), рассмотрим алгебру некоммутативных многочленов $\mathrm{K}\langle X\rangle$. Алгебра $\mathfrak{g}$ (рассматриваемая

как линеал) естественным образом отождествляется с подпространством $\mathbb{K}_1\langle X\rangle$ алгебры $\mathbb{K}\langle X\rangle$, состоящим из однородных многочленов первой степени. Тем самым для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ в алгебре $\mathbb{K}\langle X\rangle$ будут определены три (при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ заведомо различных) элемента: элемент $[x, y] \in \mathbb{K}_1\langle X\rangle$, являющийся однородным многочленом первой степени, и элементы xy и yx, являющиеся однородными многочленами второй степени. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал алгебры $\mathbb{K}\langle X\rangle$, порожденный всеми многочленами вида $xy - yx - [x, y]$, и пусть $\mathcal{U} = \mathbb{K}\langle X\rangle/\mathcal{J}$ — соответствующая факторалгебра. Пусть, кроме того, ι: $\mathfrak{g} \to \mathcal{U}$ — ограничение на $\mathfrak{g} = \mathbb{K}_1\langle X\rangle$ канонического эпиморфизма $\mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathcal{U}$. Тогда для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ в алгебре $\mathcal{U}$ будет иметь место равенство

$$\iota[x, y] = \iota(xy - yx) = \iota x \cdot \iota y - \iota y \cdot \iota x = [\iota x, \iota y],$$

показывающее, что ι представляет собой гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to [\mathcal{U}]$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольная ассоциативная унитальная алгебра, и пусть φ: $\mathfrak{g} \to [\mathcal{A}]$ — произвольный гомоморфизм. Ограничение φ на X единственным образом распространяется до некоторого гомоморфизма $\bar{\psi}$: $\mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathcal{A}$. Оба отображения φ и $\bar{\psi}$ линейны и совпадают на базисе X линеала $\mathfrak{g} = \mathbb{K}_1\langle X\rangle$. Поэтому $\varphi = \bar{\psi}$ на $\mathfrak{g}$, и, значит, для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(xy - yx - [x, y]) &= \bar{\psi}x \cdot \bar{\psi}y - \bar{\psi}y \cdot \bar{\psi}x - \bar{\psi}[x, y] = \\ &= \varphi x \cdot \varphi y - \varphi y \cdot \varphi x - \varphi[x, y] = \\ &= [\varphi x, \varphi y] - \varphi[x, y] = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{\psi}(\mathcal{J}) = 0$, и потому $\bar{\psi}$ индуцирует некоторый гомоморфизм ψ: $\mathcal{U} \to \mathcal{A}$, обладающий, очевидно, тем свойством, что $\varphi \circ \iota = \psi$. Это означает, что гомоморфизм ι обладает свойством универсальности.

Тем самым доказано, что *для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}$.*

Замечание 1. Легко видеть, что построенная алгебра $\mathcal{U}$ не зависит от выбора базиса (3) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и потому соответствие $\mathfrak{g} \mapsto \mathcal{U}$ представляет собой некоторый функтор ALG-LIE $\to$ ALG$_0$-ASS. Этот функтор

обладает тем свойством, что для любой ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ множество $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, [\mathscr{A}])$ всех гомоморфизмов $\mathfrak{g} \to [\mathscr{A}]$ находится в естественном биективном соответствии с множеством $\mathrm{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{A})$ всех гомоморфизмов $\mathscr{U} \to \mathscr{A}$:

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, [\mathscr{A}]) \approx \mathrm{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{A}).$$

На языке теории категорий это означает, что функтор $\mathfrak{g} \mapsto \mathscr{U}$ *сопряжен слева* с коммутаторным функтором $\mathscr{A} \mapsto [\mathscr{A}]$.

Применительно к алгебре $\mathscr{A} = \mathrm{End}\,\mathscr{V}$ свойство универсальности гомоморфизма $\iota\colon \mathfrak{g} \to [\mathscr{U}]$ означает, что *любой модуль $\mathscr{V}$ над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ обладает единственной структурой $\mathscr{U}$-модуля, продолжающей его структуру $\mathfrak{g}$-модуля, т. е. такой, что*

$$xv = (\iota x)\, v$$

для любых элементов $x \in \mathfrak{g}$ и $v \in \mathscr{V}$. Действительно, структура $\mathfrak{g}$-модуля на $\mathscr{V}$ задается гомоморфизмом $\mathfrak{g} \to [\mathrm{End}\,\mathscr{V}]$, а структура $\mathscr{U}$-модуля — гомоморфизмом $\mathscr{U} \to \mathrm{End}\,\mathscr{V}$. □

В силу леммы 1 мы получаем отсюда, что *на линейном пространстве $\mathscr{V}_I$ существует структура $\mathscr{U}$-модуля, в которой*

$$(\iota x_i)\, z_\alpha = z_{i\alpha} \tag{6}$$

для любой монотонной последовательности $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ и любого $i \leqslant i_1$.

В частности,

$$(\iota x_i)\, z_\varnothing = z_i.$$

Из последней формулы непосредственно вытекает следующее предложение:

Предложение 2. *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отображение $\iota\colon \mathfrak{g} \to [\mathscr{U}]$ инъективно, так что алгебра $\mathfrak{g}$ может быть отождествлена с некоторой подалгеброй коммутаторной алгебры $[\mathscr{U}]$.*

Доказательство. Пусть x — такой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $\iota x = 0$, и пусть $x = \sum c_i x_i$ — разложение этого элемента по базису (3). Тогда

$$\sum c_i z_i = \sum c_i (\iota x_i) z_\varnothing = \left(\iota \sum c_i x_i\right) z_\varnothing = (\iota x) z_\varnothing = 0 z_\varnothing = 0,$$

что возможно (поскольку элементы z_i составляют часть базиса линеала $\mathscr{V}_I$) только тогда, когда $c_i = 0$ для всех i. Следовательно, $x = 0$. □

Предложение 2 объясняет для алгебры $\mathscr{U}$ эпитет «обертывающая».

В дальнейшем мы будем считать отображение ι вложением, и, в частности, элемент вида ιx, $x \in \mathfrak{g}$, будем обозначать просто через x.

Из предложения 2 предложение 1 вытекает уже без особого труда.

Доказательство предложения 1. Пусть $\varphi\colon X \to \mathfrak{g}$ — произвольное отображение множества X в произвольную алгебру Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathscr{U}$ — вложение алгебры $\mathfrak{g}$ в ее универсальную обертывающую алгебру $\mathscr{U}$. Поскольку алгебра $\mathbb{K}\langle X\rangle$ является свободной алгеброй категории ALG_0-ASS, существует гомоморфизм $\bar{\psi}\colon \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathscr{U}$, совпадающий на X с составным отображением $\iota \circ \varphi\colon X \to \mathscr{U}$. Каждый элемент алгебры $\mathbb{I}\langle X\rangle$, т. е. каждый лиев многочлен от элементов $x \in X$ этот гомоморфизм переводит в лиев многочлен от соответствующих элементов $(\iota \circ \varphi) x$ подалгебры $\iota(\mathfrak{g})$ и потому — в некоторый элемент этой подалгебры. Это означает, что $\bar{\psi}(\mathbb{I}\langle X\rangle) \subset \iota(\mathfrak{g})$. Поскольку, согласно предложению 2, отображение $\iota\colon \mathfrak{g} \to \iota(\mathfrak{g})$ биективно, отсюда следует, что отображение $\bar{\psi}$ индуцирует такое отображение $\psi\colon \mathbb{I}\langle X\rangle \to \mathfrak{g}$, что $\iota \circ \psi = \bar{\psi}$ на $\mathbb{I}\langle X\rangle$. Для завершения доказательства остается заметить, что отображение ψ является, очевидно, гомоморфизмом алгебр Ли и совпадает на X с данным отображением φ. □

Предложение 2 равносильно утверждению, что элементы $x_i = \iota x_i$ алгебры $\mathscr{U}$ линейно независимы. В этой форме оно допускает важное обобщение, играющее существенную роль в доказательстве утверждения В из предыдущей лекции (заметим, кстати, что предложе-

ние 1 для доказательства утверждения В нам на самом деле не нужно; мы доказали его только потому, что оно имеет самостоятельный интерес). Чтобы сформулировать это обобщение, мы для любой монотонной последовательности $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ элементов множества I введем в рассмотрение элемент

$$x_\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} \tag{7}$$

универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{U}$ (при $\alpha = \varnothing$ считается, что $x_\varnothing = 1$). В дальнейшем для облегчения формулировок мы будем называть элементы вида (7) *специальными элементами* алгебры $\mathfrak{U}$ (по отношению к базису (3) алгебры $\mathfrak{g}$).

Предложение 3. *Специальные элементы x_α универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{U}$ линейно независимы.*

Доказательство. Из формулы (6) посредством очевидной индукции получается, что

$$x_\alpha z_\varnothing = z_\alpha$$

для любой монотонной последовательности α. После этого остается повторить уже знакомое нам рассуждение: если $\sum c_\alpha x_\alpha = 0$, то

$$\sum c_\alpha z_\alpha = \sum c_\alpha x_\alpha z_\varnothing = 0 z_\varnothing = 0,$$

что возможно только тогда, когда $c_\alpha = 0$ для любого α. □

Предложение 3 может быть уточнено:

Предложение 4. *Специальные элементы x_α составляют базис алгебры $\mathfrak{U}$ (рассматриваемой как линеал).*

Мы предпошлем доказательству этого предложения несколько предварительных замечаний.

Элементы x_α определены, конечно, для любых (не обязательно монотонных) последовательностей $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ элементов множества I (но эпитет «специальный» мы будем употреблять для этих элементов только тогда, когда последовательность α монотонна).

Для любой последовательности $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ элементов множества I мы символом $d(\alpha)$ обозначим число имеющихся в ней *беспорядков*, т. е. таких пар (k, l), $1 \leqslant k, l \leqslant n$, что $k < l$ и $i_k > i_l$. Последовательность α

монотонна тогда и только тогда, когда $d(\alpha)=0$. В частности, $d(\varnothing)=0$.

Нетрудная индукция по $|\alpha|$ и $d(\alpha)$ теперь показывает, что *любой элемент вида x_α является линейной комбинацией специальных элементов.*

Действительно, при $d(\alpha)=0$ это утверждение автоматически верно. Предполагая, что оно уже доказано для всех элементов вида x_β с $|\beta|<|\alpha|$ или с $|\beta|=|\alpha|$ и $d(\beta)<d(\alpha)$, рассмотрим элемент x_α с $d(\alpha)>0$. Ясно, что в последовательности α существует пара соседних индексов (i, j), образующих беспорядок, т. е. таких, что $i>j$. Поэтому элемент x_α мы можем записать в следующем виде:

$$x_\alpha = x_{\alpha'} x_i x_j x_{\alpha''},$$

где α' и α'' — некоторые последовательности индексов (возможно, пустые). Но, согласно определению коммутатора,

$$x_i x_j = x_j x_i + [x_i, x_j],$$

и потому

$$x_\alpha = x_{\alpha'} x_j x_i x_{\alpha'} + x_{\alpha'} [x_i, x_j] x_{\alpha'}.$$

В алгебре $\mathfrak{g}$ элемент $[x_i, x_j]$ разлагается по базису (3), т. е. имеет место равенство вида

$$[x_i, x_j] = c_{k_1} x_{k_1} + c_{k_2} x_{k_2} + \ldots,$$

где только конечное число коэффициентов $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots$ отлично от нуля. Следовательно,

$$x_\alpha = x_{\beta_0} + c_{k_1} x_{\beta_1} + c_{k_2} x_{\beta_2} + \ldots,$$

где

$$x_{\beta_0} = x_{\alpha'} x_j x_i x_{\alpha''} \quad \text{и} \quad x_{\beta_s} = x_{\alpha'} x_{k_s} x_{\alpha''} \quad \text{при} \quad s = 1, 2, \ldots$$

Поскольку $d(\beta_0) = d(\alpha) - 1$ и $|\beta_s| = |\alpha| - 1$ при $s > 0$, элементы x_{β_0} и x_{β_s} выражаются, по предположению индукции, через специальные элементы. Следовательно, через специальные элементы выражается и элемент x_α. □

С другой стороны, из изложенной выше конструкции универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{U}$ непосредственно вытекает, что *алгебра $\mathfrak{U}$ порождается* (*как уни-*

тальная алгебра) *всеми элементами из* $\mathfrak{g}$, т. е., точнее, элементами вида ιx, где $x \in \mathfrak{g}$. Впрочем, это утверждение без труда вытекает и прямо из определения 1. Действительно, пусть $\mathscr{V}$ — подалгебра алгебры $\mathscr{U}$, порожденная всеми элементами из $\mathfrak{g}$ (и единицей 1), и пусть $j\colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ — гомоморфизм вложения. Поскольку $\iota\mathfrak{g} \subset \mathscr{V}$, гомоморфизм ι индуцирует гомоморфизм $\iota'\colon \mathfrak{g} \to [\mathscr{V}]$ (удовлетворяющий соотношению $j \circ \iota' = \iota$). Пусть $k = \mathscr{U}\iota'$. Тогда, как непосредственно явствует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[d, "\iota'"] & \mathscr{U} \arrow[dl, "k"] \\
\mathscr{U} & {[\mathscr{V}]} \arrow[l, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

композиция $j \circ k$ будет отображением $\mathscr{U}\iota = \mathrm{id}$. Следовательно, гомоморфизм j является эпиморфизмом. Значит, $\mathscr{V} = \mathscr{U}$. □

Доказательство предложения 4. Согласно предложению 3 достаточно доказать, что любой элемент алгебры $\mathscr{U}$ является линейной комбинацией специальных элементов. Но поскольку элементы из $\mathfrak{g}$ порождают алгебру $\mathscr{U}$, любой элемент этой алгебры является многочленом от элементов x_i базиса (3), т. е. представляет собой линейную комбинацию одночленов вида x_α (при α произвольном). Это доказывает предложение 4, поскольку, как выше было доказано, каждый элемент вида x_α является линейной комбинацией специальных элементов. □

Предложение 4 обычно называется теоремой Пуанкаре — Биркгофа — Витта. Впрочем, это имя присваивается также предложениям 2 и 3.

Нам предложение 4 понадобится только в применении к алгебре $\mathbb{K}\langle X\rangle$ и ее универсальной обертывающей алгебре $\mathbb{K}\langle X\rangle$ (так что, строго говоря, мы могли бы обойтись без понятия обертывающей алгебры; однако никаких существенных упрощений нам бы это не дало).

Следующий этап доказательства утверждения B будет состоять в том, что мы по-иному, более эффективно,

охарактеризуем элементы алгебры $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Для этого нам понадобится одна общая конструкция.

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — два линеала, а $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ — некоторые их базисы. Рассмотрим всевозможные формальные произведения вида x_iy_i и линеал $\mathscr{C}$, базисом которого они служат. Каждый элемент линеала $\mathscr{C}$ является формальной линейной комбинацией вида

$$\sum k_{ij}x_iy_j, \qquad k_{ij}\in\mathbb{K},$$

лишь конечное число коэффициентов k_{ij} которой отлично от нуля. Сравним линеал $\mathscr{C}$ с линеалом $\mathscr{C}'$, элементами которого являются формальные суммы вида

$$\sum a_jy_j, \tag{8}$$

где $a_j\in\mathscr{A}$, и в котором линейные операции определяются очевидным образом (этот линеал является прямой суммой линеалов, изоморфных линеалу $\mathscr{A}$, число которых равно числу элементов базиса $\{y_j\}$). Заметим, что линеал $\mathscr{C}'$ *не зависит* от выбора базиса $\{x_i\}$ (этот базис в его построении не участвует). Если $a_j=\sum k_{ij}x_i$ — разложения элементов a_j по базису $\{x_i\}$, то мы сопоставим элементу (8) линеала $\mathscr{C}'$ элемент $\sum k_{ij}x_iy_j$ линеала $\mathscr{C}$. Очевидно, что это устанавливает изоморфизм линеала $\mathscr{C}'$ на линеал $\mathscr{C}$. Отождествив посредством этого изоморфизма линеалы $\mathscr{C}'$ и $\mathscr{C}$, мы получим, следовательно, что линеал $\mathscr{C}$ также не зависит от выбора базиса $\{x_i\}$. Кроме того, в силу этого отождествления приобретет смысл (и будет правильным) равенство

$$\sum k_{ij}x_iy_j=\sum\left(\sum k_{ij}x_i\right)y_j.$$

Аналогичным образом линеал $\mathscr{C}$ отождествляется с линеалом $\mathscr{C}''$, элементы которого имеют вид

$$\sum x_ib_i,$$

где $b_i\in\mathscr{B}$. Это доказывает независимость линеала $\mathscr{C}$ от выбора базиса $\{y_j\}$ и одновременно придает смысл равенству

$$\sum k_{ij}x_iy_j=\sum x_i\left(\sum k_{ij}y_j\right).$$

Мы видим, таким образом, что линеал $\mathscr{C}$ не зависит (в силу сделанных отождествлений) от выбора базисов в линеалах $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, т. е. определяется исключительно этими линеалами. Он называется *тензорным произведением* линеалов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ и обозначается символом $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Замечание 1. Обыкновенно элементы $x_i y_i$ линеала $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ обозначаются символами $x_i \otimes y_j$ и, соответственно этому, элемент $\sum k_{ij} x_i y_j$ записывается формулой $\sum k_{ij} x_i \otimes y_j$. Более общим образом для любых двух элементов $a = \sum k_i x_i$ и $b = \sum l_j y_j$ символом $a \otimes b$ обозначается элемент $\sum k_i l_j x_i \otimes y_j$. Ясно, что

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b,$$
$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$$

и

$$k(a + b) = (ka) \otimes b_1 = a \otimes (kb)$$

для любых элементов a, a_1, $a_2 \in \mathscr{A}$, b, b_1, $b_2 \in \mathscr{B}$ и $k \in \mathbb{K}$. Обратно, нетрудно видеть, что линеал, порожденный символами $a \otimes b$, подчиненными этим соотношениям, естественно изоморфен линеалу $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Тем самым мы получаем инвариантную (не использующую базисов) конструкцию линеала $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Эта конструкция нам не понадобится, и поэтому мы на ней подробнее останавливаться не будем.

Замечание 2. Можно получить и другую инвариантную характеристику линеала $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ (по крайней мере для случая, когда оба линеала $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ конечномерны), если ввести в рассмотрение линейное пространство $\mathscr{D}$ смешанных билинейных функционалов $x, y \mapsto \boldsymbol{B}(x, y)$ (см. II, 5), первый аргумент которых пробегает линеал $\mathscr{A}$, а второй — линеал $\mathscr{B}$. Оказывается, что линеал $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ сопряжен линеалу $\mathscr{D}$, причем соответствующее спаривание однозначно определяется соотношением $\langle a \otimes b, \boldsymbol{B} \rangle = \boldsymbol{B}(a, b)$. Этим замечанием мы также пользоваться не будем.

В случае, когда $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются алгебрами, в линеале $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ определяется умножение, для которого

$$(a \otimes b)(x \otimes y) = (ax) \otimes (by)$$

при любых $a, x \in \mathscr{A}$, $b, y \in \mathscr{B}$. Относительно этого умножения линеал $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ будет алгеброй. Эта алгебра называется *тензорным произведением алгебр* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и обозначается прежним символом $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Если алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ ассоциативны и унитальны, то алгебра $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ также ассоциативна и унитальна. (Заметим, что для алгебр Ли аналогичное утверждение неверно.) Единицей алгебры $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ служит, очевидно, элемент $1 \otimes 1$.

В принятых нами упрощенных обозначениях (не использующих знака $\otimes$) умножение в $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ задается формулой

$$\left(\sum k_{ij} x_i y_j\right)\left(\sum l_{pq} x_p y_q\right) = \sum k_{ij} l_{pq} (x_i x_p)(y_j y_q).$$

В единственно интересном для нас сейчас случае $\mathscr{A} = \mathbb{K}\langle X\rangle$ и $\mathscr{B} = \mathbb{K}\langle Y\rangle$ алгебра $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ является не чем иным, как алгеброй многочленов от образующих из X и Y, подчиненных требованию, что каждая образующая из X коммутирует с каждой образующей из Y. Мы будем обозначать эту алгебру символом $\mathbb{K}\langle X, Y\rangle$. Таким образом,

$$\mathbb{K}\langle X, Y\rangle = \mathbb{K}\langle X\rangle \otimes \mathbb{K}(Y)$$

для любых X и Y.

Умножение в произвольной алгебре $\mathscr{A}$ представляет собой не что иное, как некоторое линейное отображение

$$\mu\colon \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

(образ элемента $a \otimes b \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ при этом отображении и есть произведение ab). По теоретико-категорной двойственности (заключающейся в обращении всех стрелок) двойственным объектом является произвольное линейное отображение

$$\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}. \tag{9}$$

Линеал $\mathscr{A}$, для которого задано некоторое отображение вида (9), называется *коалгеброй*, а отображение (9) — *коумножением* (употребляется также термин *диагональное отображение*).

Определение 2. Ассоциативная унитальная алгебра $\mathscr{A}$ называется *алгеброй Хопфа*, если она одновременно

является коалгеброй (т. е. для нее задано коумножение (9)), причем:

а) коумножение (9) является гомоморфизмом унитальных алгебр;

б) в алгебре $\mathscr{A}$ задано такое линейное подпространство $\mathscr{A}^*$, что $\mathscr{A} = \mathbb{K}1 \oplus A^*$ и для любого элемента $x \in \mathscr{A}^*$ имеет место равенство

$$\delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1 + \sum x_i \otimes y_i, \tag{10}$$

где $x_i y_i \in \mathscr{A}^*$. Если

$$\delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1,$$

то элемент $x \in A^*$ называется *примитивным*.

Заметим, что, согласно а), имеет место равенство $\delta 1 = 1 \otimes 1$.

В терминологии общей теории коалгебр условие б) означает, что элемент $1 \in \mathscr{A}$ является *коединицей* коумножения δ.

Отображения $x \mapsto x \otimes 1$ и $x \mapsto 1 \otimes x$ являются мономорфизмами алгебры $\mathscr{A}$ в алгебру $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$. Мы будем элемент $x \otimes 1$ обозначать символом x', а элемент $1 \otimes x$ — символом x''. В этих обозначениях формула (10) приобретает вид

$$\delta x = x' + x'' + \sum x'_i y''_i, \tag{11}$$

где x_i, $y_i \in \mathscr{A}^*$, а условие примитивности — вид

$$\delta x = x' + x''.$$

Согласно сделанному выше замечанию, при $\mathscr{A} = \mathbb{K}\langle X\rangle$ алгеброй $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ служит алгебра $\mathbb{K}\langle X', X''\rangle$, где X' и X'' — два дизъюнктных экземпляра множества X. В частности, если $\mathscr{A} = \mathbb{K}\langle x, y\rangle$ (только этот случай нам на самом деле и интересен), то $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} = \mathbb{K}\langle x', y'; x'', y''\rangle$, где x' и y' перестановочны с x'' и y''.

Мы введем в алгебру $\mathbb{K}\langle X\rangle$ коумножение, требуя, чтобы все образующие $x \in X$ были примитивны, т. е. чтобы для любого элемента $x \in X$ имела место формула

$$\delta x = x' + x''.$$

Поскольку алгебра $\mathbb{K}\langle X\rangle$ свободна, это условие однозначно определяет коумножение

$$\delta\colon \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X', X''\rangle, \tag{12}$$

являющееся гомоморфизмом алгебр, т. е. удовлетворяющее условию а) определения алгебр Хопфа.

Что же касается условия б), то за фигурирующее в нем линейное подпространство $\mathscr{A}^*$ мы примем подалгебру $\mathbb{K}\langle X\rangle^*$ алгебры $\mathbb{K}\langle X\rangle$, состоящую из всех *многочленов без свободного члена* (являющихся линейными комбинациями одночленов $\neq 1$), или, что, очевидно, равносильно, представляющую собой линейную оболочку всех специальных (относительно некоторого базиса алгебры $\mathbb{K}\langle X\rangle$) элементов x_α, отвечающих непустым монотонным последовательностям α. Ясно, что тогда условие б) (в форме (11)) будет выполнено. Тем самым *мы задали в алгебре* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *структуру алгебры Хопфа.*

Эту структуру можно ввести и из общих соображений и притом не только в алгебре $\mathbb{K}\langle X\rangle$, но и в универсальной обертывающей алгебре $\mathscr{U}$ произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Действительно, поскольку в алгебре $\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}$ элементы с различным числом штрихов перестановочны, отображение

$$x \mapsto x' + x'', \qquad x \in \mathfrak{g},$$

представляет собой гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ в коммутаторную алгебру $[\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}]$. Поэтому оно продолжается до некоторого гомоморфизма алгебр

$$\delta\colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}\otimes\mathscr{U}. \tag{13}$$

Теперь ясно, что если мы примем за $\mathscr{U}^*$ подпространство алгебры $\mathscr{U}$, состоящее из линейных комбинаций произведений элементов из $\mathfrak{g}$, то $\mathscr{U}$ будет алгеброй Хопфа с коумножением δ. Таким образом, *универсальная обертывающая алгебра* $\mathscr{U}$ *произвольной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *естественным образом является алгеброй Хопфа.*

Заметим, что при $\mathscr{U} = \mathbb{K}\langle X\rangle$ коумножение (13) совпадает с коумножением (12), поскольку оба коумножения одинаково действуют на образующих из X.