Лекция 6

ТЕОРЕМА ФРИДРИХСА. — ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ В ИЗ ЛЕКЦИИ 4. — ТЕОРЕМА ДЫНКИНА. — ЛИНЕЙНАЯ ЧАСТЬ РЯДА КЕМПБЕЛЛА — ХАУСДОРФА. — СХОДИМОСТЬ РЯДА КЕМПБЕЛЛА — ХАУСДОРФА. — ГРУППАЛГЕБРЫ ЛИ. — ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАТЕГОРИИ ГРУПУСКУЛ И ГРУППАЛГЕБР ЛИ. — ИЗОМОРФИЗМ КАТЕГОРИИ ГРУППАЛГЕБР И АЛГЕБР ЛИ. — ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА ЛИ.

Согласно изложенному в конце предыдущей лекции построению *все элементы алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *являются примитивными элементами универсальной обертывающей алгебры* $\mathcal{U}$. Оказывается, что верно и обратное:

Предложение 1. *Для любой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *все примитивные элементы обертывающей алгебры Хопфа* $\mathcal{U}$ *исчерпываются элементами из* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть, как и в предыдущей лекции, $X=\{x_i,\ i\in I\}$ — произвольный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\{x_\alpha\}$ — базис обертывающей алгебры $\mathcal{U}$, состоящий из специальных (по отношению к базису X) элементов x_α. Вычислим образ δx_α произвольного специального элемента при коумножении

$$\delta\colon \mathcal{U}\to\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}.$$

Если $\alpha=\varnothing$, т. е. $x_\alpha=1$, проблемы нет: $\delta 1=1$. Точно так же нет проблемы и при $|\alpha|=1$, т. е. когда α состоит из единственного элемента $i\in I$, поскольку элемент x_i, являясь элементом алгебры $\mathfrak{g}$, примитивен, и потому $\delta x_i=x_i'+x_i''$. Таким образом, нам нужно рассмотреть только случай $|\alpha|\geq 1$.

Вообще говоря, среди элементов последовательности α могут быть одинаковые. Пусть $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$ — все неповторяющиеся элементы этой последовательности, и пусть $k_s = k_s(\alpha)$ — число элементов последовательности α, равных элементу j_s, $s = 1, \ldots, m$. Таким образом, $k_s \geqslant 1$, $k_1 + \ldots + k_s = |\alpha|$ и

$$x_\alpha = x_{j_1}^{k_1} \ldots x_{j_m}^{k_m}.$$

Так как $\delta x_j = x_j' + x_j''$, то

$$\delta x_\alpha = \left(x_{j_1}' + x_{j_1}''\right)^{k_1} \ldots \left(x_{j_m}' + x_{j_m}''\right)^{k_m}.$$

Раскрывая в этом многочлене скобки и выписывая лишь слагаемые, либо не содержащие по-разному штрихованных элементов, либо линейные по элементам вида x_i'', мы (учитывая перестановочность элементов с разным числом штрихов) получим для δx_α выражение вида

$$\begin{aligned}\delta x_\alpha = {} & x_{j_1}'^{k_1} \ldots x_{j_m}'^{k_m} + x_{j_1}''^{k_1} \ldots x_{j_m}''^{k_m} + \\ & + k_1 x_{j_1}'^{k_1-1} x_{j_2}'^{k_2} \ldots x_{j_m}'^{k_m} \cdot x_{j_1}'' + \\ & + k_2 x_{j_1}'^{k_1} x_{j_2}'^{k_2-1} \ldots x_{j_m}'^{k_m} \cdot x_{j_2}'' + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + k_m x_{j_1}'^{k_1} x_{j_2}'^{k_2} \ldots x_{j_m}'^{k_m-1} \cdot x_{j_m}'' + \ldots,\end{aligned}$$

где, ввиду условия $|\alpha| > 1$, ни одно слагаемое не может сократиться с другим. Положив

$$x_{\alpha_1} = x_{j_1}^{k_1-1} x_{j_2}^{k_2} \ldots x_{j_m}^{k_m}, \ldots, x_{\alpha_m} = x_{j_1}^{k_1} x_{j_2}^{k_2} \ldots x_{j_m}^{k_m-1},$$

мы можем эту формулу записать в следующем компактном виде:

$$(1) \quad \delta x_\alpha = x_\alpha' + x_\alpha'' + k_1(\alpha) x_{\alpha_1}' x_{j_1}'' + \ldots$$
$$\ldots + k_m(\alpha) x_{\alpha_m}' x_{j_m}'' + \ldots, \qquad |\alpha| > 1.$$

Рассмотрим теперь произвольный элемент

$$a = \sum_{\alpha \neq \varnothing} c_\alpha x_\alpha$$

линеала $\mathcal{U}^*$.

Мы положим $a = a_1 + a_2$, где

$$a_1 = \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha x_\alpha \quad \text{и} \quad a_2 = \sum_{|\alpha|>1} c_\alpha x_\alpha.$$

Элемент a_1 принадлежит алгебре $\mathfrak{g}$ и потому примитивен. Следовательно, элемент a примитивен тогда и только тогда, когда примитивен элемент a_2. В частности, если $a_2 = 0$, то элемент a примитивен.

Пусть $a_2 \neq 0$, и пусть $j_1 < \ldots < j_m$ — все различные элементы всевозможных последовательностей α, для которых x_α входит в элемент a_2 с отличным от нуля коэффициентом c_α. Для каждого такого x_α формула (1) сохранит силу, если считать, что $k_s(\alpha) = 0$ и $x_{\alpha_s} = 1$ для каждого индекса $s = 1, \ldots, m$, для которого элемент j_s не входит в последовательность α. Поэтому

$$\delta a_2 = \sum_{|\alpha|>1} c_\alpha \left(x'_\alpha + x''_\alpha + k_1(\alpha) x'_{\alpha_1} x''_{j_1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + k_m(\alpha) x'_{\alpha_m} x''_{j_m} + \ldots\right) =$$
$$= a'_2 + a''_2 + \left(\sum_{|\alpha|>1} k_1(\alpha) c_\alpha x'_{\alpha_1}\right) x''_{j_1} + \ldots$$
$$\ldots + \left(\sum_{|\alpha|>1} k_m(\alpha) c_\alpha x'_{\alpha_m}\right) x''_{j_m} + \ldots$$

и, значит, если элемент a_2 примитивен, то для любого $s = 1, \ldots, m$ в алгебре $\mathcal{U}$ имеет место равенство

$$\sum_{|\alpha|>1} k_s(\alpha) c_\alpha x_{\alpha_s} = 0.$$

В этом равенстве члены, отвечающие различным последовательностям α, сократиться не могут, так как равенство $x_{\alpha_s} = x_{\beta_s}$ возможно только при $\alpha_s = \beta_s$, а если $\alpha_s = \beta_s$ и $k_s(\alpha) \neq 0$, $k_s(\beta) \neq 0$, то $\alpha = \beta$. Следовательно, если элемент a_2 примитивен, то $k_s(\alpha) c_\alpha = 0$ для любой последовательности α (участвующей в разложении элемента a_2) и любого s, т. е. (поскольку мы предположили, что $c_\alpha \neq 0$) $k_s(\alpha) = 0$. Поэтому $|\alpha| = 0$, что противоречит условию $|\alpha| > 1$.

Следовательно, каждый элемент $a_2 \neq 0$ заведомо не примитивен. Поэтому не примитивен и элемент a.

Этим доказано, что элемент $a \in \mathcal{U}^*$ тогда и только тогда примитивен, когда $a_2 = 0$, т. е. когда $a = a_1$ и, значит, $a \in \mathfrak{g}$.

Тем самым предложение 1 полностью доказано. □

Следствие (теорема Фридрихса). *Элемент алгебры многочленов $\mathbb{K}\langle X\rangle$ тогда и только тогда является лиевым многочленом над X (т. е., точнее, имеет вид ιa, где $a \in \mathbb{L}\langle X\rangle$), когда этот элемент примитивен.* □

Теперь у нас все готово для доказательства утверждения В из лекции 4. Напомним, что это утверждение относится к многочленам

$$z_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum \frac{x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_k} y^{q_k}}{p_1! q_1! \ldots p_k! q_k!} \tag{2}$$

из алгебры $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$, где во внутренней сумме производится суммирование по всем таким наборам целых неотрицательных чисел $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$, что $p_1 + \ldots + p_k + q_1 + \ldots + q_k = n$ и $p_i + q_i > 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$ (поле $\mathbb{K}$ мы теперь предполагаем полем характеристики 0). Эти многочлены являются однородными степени n компонентами формального ряда $\ln(e^x e^y)$ от двух некоммутирующих переменных x и y, получающегося при подстановке произведения

$$e^x e^y = \sum_{p, q=0}^{\infty} \frac{x^p y^q}{p! q!}$$

рядов

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \quad \text{и} \quad e^y = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^q}{q!}$$

вместо z в формальный ряд

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k.$$

Утверждение В гласит, что *каждый многочлен $z_n(x, y)$ лежит в алгебре $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$*, т. е., согласно теореме Фридрихса, является примитивным элементом алгебры Хопфа $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ (удовлетворяет соотношению $\delta z_n(x, y) = z_n(x', y') + z_n(x'', y'')$).

Концептуально наиболее естественный путь доказательства этого утверждения состоит в том, что мы расширяем алгебру $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ до алгебры $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ формальных рядов от некоммутирующих переменных x, y и повторяем для этой алгебры все сделанное в предыдущей лекции, т. е. вводим подалгебру $\mathbb{L}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ коммутаторной алгебры Ли $[\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle]$, порожденную элементами x, y (эта алгебра состоит из рядов, все однородные составляющие которых являются лиевыми многочленами из $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$), и показываем, что ряды из $\mathbb{L}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ суть в точности примитивные элементы алгебры по отношению к умножению δ, для которого $\delta x = x' + x''$ и $\delta y = y' + y''$. Коль скоро это сделано, утверждение В (равносильное утверждению, что ряд $\ln(e^x e^y)$ лежит в алгебре $\mathbb{L}\langle\langle x, y\rangle\rangle$, т. е. является примитивным элементом алгебры $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$) доказывается очевидной выкладкой:

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad \delta \ln(e^x e^y) &= \ln(e^{\delta x} e^{\delta y}) = \ln(e^{x'+x''} e^{y'+y''}) = \\
&= \ln(e^{x'} e^{x''} e^{y'} e^{y''}) = \ln(e^{x'} e^{y'} e^{x''} e^{y''}) = \\
&= \ln(e^{x'} e^{y'}) + \ln(e^{x''} e^{y''}) = \\
&= \ln(e^x e^y)' + \ln(e^x e^y)''.
\end{aligned}
$$

(В этой выкладке использован тот очевидный факт, что если элементы ξ и η перестановочны, то $e^{\xi+\eta} = e^{\xi} e^{\eta}$ и $\ln(\xi\eta) = \ln\xi + \ln\eta$.)

Однако этот переход к алгебре $\mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ на самом деле совершенно не нужен. Действительно, желая доказать формулу $\delta z_n(x, y) = z_n(x', y') + z_n(x'', y'')$, мы можем повторить выкладку (3), рассматривая не формальные ряды, а лишь некоторые достаточно длинные (в зависимости от n) их отрезки и следя лишь за членами степени $\leqslant n$. Ясно, что вся выкладка (которая теперь будет осуществляться внутри алгебры $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$) полностью сохранится. Тем самым утверждение В из лекции 4 мы можем считать, наконец, доказанным.

Изложенное доказательство утверждения В не дает никакой явной формулы для лиевых многочленов $\mathfrak{L}_n(x, y)$, существование которых оно утверждает. Поэтому мы сейчас дополним его выводом такого рода явной формулы.

Пусть, как и в предыдущей лекции, $\mathbb{K}^*\langle x, y\rangle$ — подалгебра алгебры $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$, состоящая из всех многочленов без свободного члена. Мы определим отображение

$$\sigma\colon \mathbb{K}^*(x, y) \to \mathbb{L}\langle x, y\rangle$$

следующими условиями:

a) отображение σ линейно;

b) $\sigma x = x$ и $\sigma y = y$;

c) для любого одночлена $a \neq 1$

$$\sigma(ax) = [\sigma a, x], \quad \sigma(ay) = [\sigma a, y].$$

Ясно, что эти условия однозначно определяют отображение σ.

Определение 1. Элементы алгебры $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$, имеющие вид σa, где a — одночлен, называются *лиевыми одночленами.*

Согласно определению:

1) элементы x и y являются лиевыми одночленами;

2) если u — лиев одночлен, то $[u, x]$ и $[u, y]$ — также лиевы одночлены.

Ясно, что линейная оболочка всех лиевых одночленов совпадает с образом $\operatorname{Im}\sigma = \sigma(\mathbb{K}^*\langle x, y\rangle)$ отображения σ.

В явном виде лиев одночлен σa, отвечающий одночлену $a = x^{p_1}y^{q_1} \ldots x^{p_k}y^{q_k}$, определяется формулой

(4)

$$\sigma a = [\ldots \underbrace{[x, x], x], \ldots x]}_{p_1 \text{ раз}}, \underbrace{y], \ldots, y]}_{q_1 \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{x], \ldots, x]}_{p_k \text{ раз}}, \underbrace{y], \ldots, y]}_{q_k \text{ раз}}.$$

В частности, мы видим, что $\sigma a = 0$, если либо $p_1 > 1$, либо $p_1 = 0$ и $q_1 > 1$ (напомним, что, согласно нашему определению одночлена, все показатели $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ положительны, за возможным исключением лишь показателей p_1 и q_k).

Из формулы (4) непосредственно вытекает, что *для любого лиева одночлена $u = \sigma a$ многочлен u является однородным элементом алгебры* $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$, т. е. линейной комбинацией одночленов одной и той же степени $n \geqslant 1$. Эту степень (равную, очевидно, степени одночлена a) мы будем называть *степенью* лиева одночлена u.

Лемма 1. *Для любых лиевых одночленов u и v элемент $[u, v]$ принадлежит линеалу* $\operatorname{Im}\sigma$.

Доказательство. Проведем индукцию по степени n элемента v. Если $n=1$, т. е. если $v=x$ или $v=y$, то элемент $[u, v]$ является, по определению, лиевым одночленом и потому лежит в $\operatorname{Im}\sigma$. Пусть $n>1$. Тогда $v=[w, x]$ или $v=[w, y]$, где w — лиев одночлен степени $n-1$. Для определенности предположим, что $v=[w, x]$ (случай $v=[w, y]$ совершенно аналогичен). Тогда $[u, v]=[u, [w, x]]$, и потому, согласно тождеству Якоби,

$$[u, v]=[[u, w], x]-[[u, x], w].$$

Но, по предположению индукции, элемент $[u, w]$, а следовательно, и элемент $[[u, w], x]$ лежит в $\operatorname{Im}\sigma$, т. е. является линейной комбинацией лиевых одночленов. Точно так же линейной комбинацией лиевых одночленов является и элемент $[[u, x], w]$. Поэтому $[u, v]\in\operatorname{Im}\sigma$. □

Следствие. *Любой элемент алгебры Ли* $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$ *является линейной комбинацией лиевых одночленов. Иными словами,*

$$\operatorname{Im}\sigma=\mathbb{L}\langle x, y\rangle.$$

Доказательство. Из леммы 1 непосредственно вытекает, что линеал $\operatorname{Im}\sigma$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$. Поскольку $x, y\in\operatorname{Im}\sigma$, а алгебра $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$ порождается элементами x и y, этот линеал должен совпадать с $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$. □

Определим теперь некоторый *антигомоморфизм* алгебры $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ в алгебру $\operatorname{End}_{\text{лин}}(\mathbb{L}\langle x, y\rangle)$ линейных отображений алгебры $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$ в себя, т. е. линейное отображение

$$\theta\colon \mathbb{K}\langle x, y\rangle\to\operatorname{End}_{\text{лин}}(\mathbb{L}\langle x, y\rangle),$$

удовлетворяющее для любых элементов $a, b\in\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ соотношению $\theta(ab)=\theta(b)\circ\theta(a)$. Поскольку алгебра $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ порождается элементами x и y, такой антигомоморфизм однозначно определяется его значениями θx и θy на этих элементах, а поскольку образующие x и y являются свободными образующими, отображения θx и θy можно выбрать совершенно произвольно. Мы определим их формулами

$$(\theta x)\,v=[v, x],\quad (\theta y)\,v=[v, y],$$

где v — произвольный элемент алгебры $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$.

Таким образом, согласно этому определению, если $u = x$ или $u = y$, то отображение $\theta(u)\colon \mathbb{L}\langle x, y\rangle \to \mathbb{L}\langle x, y\rangle$ представляет собой внутреннее дифференцирование $\mathrm{ad}(-u) = -\mathrm{ad}\, u$ алгебры Ли $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$ (см. лекцию 3). Оказывается, что равенство $\theta u = -\mathrm{ad}\, u$ (или, точнее, равенство $\theta(\iota u) = -\mathrm{ad}\, u$) справедливо для каждого элемента u алгебры $\mathbb{L}\langle x, y\rangle$.

Лемма 2. Для любых элементов u, $v \in \mathbb{L}\langle x, y\rangle$ имеет место равенство

$$(\bar{\theta} u)\, v = [v, u], \tag{5}$$

где $\bar{\theta} = \theta \circ \iota$.

Доказательство. Согласно следствию из леммы 1 равенство (5) достаточно доказать лишь для случая, когда элемент u является лиевым одночленом. Проведем индукцию по степени n элемента u. Если $n = 1$, то $u = x$ или $u = y$, и равенство (5) имеет место по определению. Пусть $n > 1$. Тогда $u = [w, x]$ или $u = [w, y]$, где w — лиев одночлен степени $n - 1$. Пусть, для определенности, $u = [w, x]$. Так как

$$\bar{\theta}(w, x) = \theta(bx) - \theta(xb) = \theta x \cdot \theta b - \theta b \cdot \theta x,$$

где $b = \iota w$, то, согласно предположению индукции и тождеству Якоби,

$$\begin{aligned}(\bar{\theta} u)\, v &= (\bar{\theta}[w, x])\, v = (\theta x)(\theta b)\, v - (\theta b)(\theta x)\, v = \\ &= (\bar{\theta} x)(\bar{\theta} w)\, v - (\bar{\theta} w)(\bar{\theta} x)\, v = \\ &= (\bar{\theta} x)[v, w] - (\bar{\theta} w)[v, x] = [[v, w], x] - [[v, x], w] = \\ &= [v, [w, x]] = [v, u]. \quad \square\end{aligned}$$

Лемма 3. Для любых элементов a, $b \in \mathbb{K}^*\langle x, y\rangle$ имеет место равенство

$$\sigma(ab) = (\theta b)(\sigma a). \tag{6}$$

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать элемент b одночленом. Проведем индукцию по его степени n. При $n = 1$, т. е. при $b = x$ или $b = y$, равенство (6) непосредственно вытекает из определений. Пусть $n \geq 1$. Тогда $b = cx$ или $b = cy$, где

c — одночлен степени $n-1$. Пусть, для определенности, $b = cx$. Так как

$$\sigma(ab) = \sigma(acx) = [\sigma(ac), x] = (\theta x)(\sigma(ac)),$$

то, согласно предположению индукции,

$$\sigma(ab) = (\theta x)(\theta c)(\sigma a) = \theta(cx)(\sigma a) = (\theta b)(\sigma a). \quad \square$$

Лемма 4. Ограничение $\bar{\sigma} = \sigma \circ \iota$ *отображения* σ *на* $\mathrm{L}\langle x, y\rangle \subset \mathbb{K}^*\langle x, y\rangle$ *является дифференцированием алгебры* $\mathrm{L}\langle x, y\rangle$, *т. е. для любых элементов* $u, v \in \mathrm{L}\langle x, y\rangle$ *имеет место равенство*

$$\bar{\sigma}[u, v] = [\bar{\sigma}u, v] + [u, \bar{\sigma}v].$$

Доказательство. Пусть $\iota u = a$ и $\iota v = b$. Тогда ввиду лемм 3 и 2

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}[u, v] &= \sigma(ab) - \sigma(ba) = (\theta b)(\sigma a) - (\theta a)(\sigma b) = \\ &= [\sigma a, b] - [\sigma b, a] = [\sigma a, b] + [a, \sigma b] = \\ &= [\bar{\sigma}u, v] + [u, \bar{\sigma}v]. \quad \square\end{aligned}$$

Теперь мы можем доказать наше основное предложение.

Предложение 2 (теорема Дынкина). *Однородный многочлен* $a \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$ *степени* $n \geqslant 1$ *тогда и только тогда принадлежит алгебре Ли* $\mathrm{L}\langle x, y\rangle$ (*т. е. имеет вид* ιu, *где* $u \in \mathrm{L}\langle x, y\rangle$), *когда*

$$\iota(\sigma a) = na. \tag{7}$$

Доказательство. Если равенство (7) выполнено, то

$$a = \iota\left(\frac{\sigma a}{n}\right), \quad \text{где} \quad \frac{\sigma a}{n} \in \mathrm{L}\langle x, y\rangle.$$

Обратно, пусть $a = \iota u$, где $u \in \mathrm{L}\langle x, y\rangle$. Без ограничения общности мы можем считать, что элемент u является лиевым одночленом. Проведем индукцию по степени n элемента u. Если $n = 1$, то $u = x$ или $u = y$ и равенство (7) справедливо. Пусть $n > 1$, и пусть, для определенности, $u = [v, x]$, где v — лиев одночлен

степени $n-1$. Тогда, согласно лемме 4 и предположению индукции,

$$\begin{aligned}\iota(\sigma a) &= \iota(\bar{\sigma} u) = \iota\bar{\sigma}[v, x] = \\ &= \iota([\bar{\sigma} v, x] + [v, \bar{\sigma} x]) = \\ &= [\iota\bar{\sigma} v, x] + \iota[v, x] = \\ &= (n-1)\iota[v, x] + \iota[v, x] = \\ &= (n-1)\iota u + \iota u = (n-1)a + a = na. \quad \square\end{aligned}$$

Предложение 2 означает, что если $a = \iota u$, то

$$u = \frac{\sigma a}{n}.$$

Согласно утверждению B условие $a = \iota u$ выполнено при $a = z_n(x, y)$ и $u = \mathfrak{Z}_n(x, y)$. Следовательно,

$$\mathfrak{Z}_n(x, y) = \frac{\sigma z_n(x, y)}{n},$$

т. е. (см. формулу (2))

$$\mathfrak{Z}_n(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{(p)(q)}\frac{\sigma\left(x^{p_1}y^{q_1}\ldots x^{p_k}y^{q_k}\right)}{p_1!q_1!\ldots p_k!q_k!}, \tag{8}$$

где во внутренней сумме суммирование распространено на все целые неотрицательные показатели $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$, для которых

$$p_1 + q_1 > 0, \ldots, p_k + q_k > 0$$

и

$$p_1 + q_1 + \ldots + p_k + q_k = n.$$

Это и есть та формула, к которой мы стремились.

Для лиевского формального ряда

$$\mathfrak{Z}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{Z}_n(x, y) \tag{9}$$

мы после очевидной перегруппировки членов получаем отсюда формулу

$$(10)\qquad \mathfrak{Э}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(p),\,(q)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{1}{p_1 + q_1 + \ldots + p_k + q_k} \times \\ \times \frac{[x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_k} y^{q_k}]}{p_1! q_1! \ldots p_k! q_k!},$$

где для наглядности вместо $\sigma(x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_k} y^{q_k})$ написано $[x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_k} y^{q_k}]$.

Этот ряд называется рядом *Кемпбелла — Хаусдорфа в форме Дынкина.*

Для практических вычислений ряд (10) мало удобен, поскольку он содержит много неприведенных подобных членов. Трудность приведения этих членов хорошо иллюстрируется на примере вычисления линейной по x части ряда (10).

Лиев одночлен $[x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_m} y^{q_m}]$ тогда и только тогда линеен по x (и отличен от нуля), когда либо $p_1 = 1$, $p_2 = 0, \ldots, p_m = 0$ (и только он имеет вид $[xy^n]$, где $n = q_1 + \ldots + q_m$), либо $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0, \ldots, p_m = 0$, $q_1 = 1$ (и тогда он имеет вид $[yxy^{n-1}]$, где $n - 1 = q_2 + \ldots + q_m$). При этом в первом случае $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant 1, \ldots, q_m \geqslant 1$, а во втором $q_2 \geqslant 0$, $q_3 \geqslant 1, \ldots, q_m \geqslant 1$. Поскольку $[yxy^{n-1}] = -[xy^n]$, мы видим, следовательно, — несколько меняя обозначения, — что линейная по x часть ряда $\mathfrak{Э}(x, y)$ (обозначим ее символом $\mathfrak{Э}'(x, y)$) выражается формулой

$$\mathfrak{Э}'(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \times \\ \times \left(\sum{}' \frac{1}{q_1! q_2! \ldots q_m!} - \sum{}'' \frac{1}{q_1! q_2! \ldots q_{m-1}!} \right) [xy]^n,$$

где в $\sum'$ суммирование происходит по всем наборам таких целых чисел $q_1, q_2, \ldots, q_m$, что

$$q_1 \geqslant 0, \quad q_2 \geqslant 1, \quad \ldots, \quad q_m \geqslant 1 \quad \text{и} \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_m = n,$$

а в $\sum''$ — таких целых чисел $q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$, что

$$q_1 \geqslant 0, \quad q_2 \geqslant 1, \quad \ldots, \quad q_{m-1} \geqslant 1$$

и

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{m-1} = n - 1.$$

При $m = 1$ сумма $\sum''$ отсутствует.

Чтобы вычислить коэффициенты ряда $\mathcal{S}'(x, y)$, мы воспользуемся стандартным методом производящих функций. Пусть $A(t)$ — ряд, получающийся из ряда $\mathcal{S}'(x, y)$ заменой $[xy^n]$ на t^n. Так как

$$\sum_{n=m-1}^{\infty} \sum{}' \frac{1}{q_1! q_2! \ldots q_m!} \frac{t^n}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{t} \sum_{n=m-1}^{\infty} \int_0^t dt \sum{}' \frac{1}{q_1! q_2! \ldots q_m!} t^n =$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t dt \left(\sum_{q_1=0}^{\infty} \frac{t^{q_1}}{q_1!} \right) \left(\sum_{q_2=1}^{\infty} \frac{t^{q_2}}{q_2!} \right)^{m-1} = \frac{1}{t} \int_0^t e^t (e^t - 1)^{m-1} dt$$

и аналогично

$$\sum_{n=m-1}^{\infty} \sum{}'' \frac{1}{q_1! q_2! \ldots q_{m-1}!} \frac{t^n}{n+1} = \frac{1}{t} \int_0^t te^t (e^t - 1)^{m-2} dt,$$

то

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^1 \frac{e^t}{e^t - 1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (e^t - 1)^m \right) dt -$$

$$- \frac{1}{t} \int_0^t \frac{te^t}{(e^t - 1)^2} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (e^t - 1)^m \right) dt =$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{e^t}{e^t - 1} t\, dt - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{te^t}{(e^t - 1)^2} (t - (e^t - 1))\, dt =$$

$$= \frac{te^t}{e^t - 1} = \frac{-t}{e^{-t} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-t)^n,$$

где B_n — так называемые числа Бернулли.

Поскольку $[xy^n] = (-\operatorname{ad} y)^n x$, этим доказано, что

$$\mathfrak{Z}'(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\operatorname{ad} y)^n x = \frac{\operatorname{ad} y}{e^{\operatorname{ad} y} - 1} x,$$

т. е. (поскольку единственным членом ряда $\mathfrak{Z}(x, y)$, не содержащим x, является y) что

$$\mathfrak{Z}(x, y) = y + \frac{\operatorname{ad} y}{e^{\operatorname{ad} y} - 1} x + \ldots, \tag{11}$$

где многоточие изображает члены не ниже чем второй степени по x.

Аналогично показывается, что

$$\mathfrak{Z}(x, y) = x + \frac{-\operatorname{ad} x}{e^{-\operatorname{ad} x} - 1} y + \ldots, \tag{12}$$

где многоточие изображает члены не ниже чем второй степени по y.

Исследуем теперь сходимость рядов (9) и (10). Для этого воспользуемся леммой 1 лекции 2, которая, как было замечено, применима к любым конечномерным алгебрам и, в частности, к произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\| \ \|$ — мультипликативная норма в $\mathfrak{g}$, а X и Y — такие элементы из $\mathfrak{g}$, что $\|X\| < \delta$ и $\|Y\| < \delta$, где $0 < \delta < 1$.

Так как алгебра $\mathrm{I}\langle x, y\rangle$ свободна, то существует единственный гомоморфизм $\mathrm{I}\langle x, y\rangle \to \mathfrak{g}$, переводящий элементы x и y в элементы X и Y. Образ при этом гомоморфизме элемента $u = u(x, y)$ алгебры $\mathrm{I}\langle x, y\rangle$ мы будем обозначать символом $u(X, Y)$.

Очевидная индукция (использующая мультипликативность нормы) показывает теперь, что если u является лиевым одночленом степени n, то

$$\| u(X, Y) \| \leqslant \delta^n.$$

Отсюда следует, что если $u = \sum c_\alpha u_\alpha$, где u_α — лиевы одночлены степени n, то

$$\| u(X, Y) \| \leqslant C\delta^n,$$

где $C = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|$. В частности, мы получаем (см. (8)), что

$$\|\mathfrak{Z}_n(X, Y)\| \leqslant D_n \delta^n, \tag{13}$$

где

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{(p), (q)} \frac{1}{p_1! q_1! \ldots p_k! q_k!}.$$

Значение внутренней суммы в последней формуле равно коэффициенту при t^n в ряде Маклорена функции $(e^{2t} - 1)^k$. Поэтому число nD_n равно коэффициенту при t^n в ряде Маклорена функции $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(e^{2t} - 1)^k$ или, что равносильно, функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(e^{2t} - 1)^k.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \delta^n = \int_0^{\delta} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{14}$$

Поскольку ряд для $f(t)$, очевидно, сходится при $|e^{2t} - 1| < 1$, и, значит, при $|t| < \frac{\ln 2}{2}$, этим доказано, что *ряд* (14) *сходится при* $\delta < \frac{\ln 2}{2}$. Так как, согласно формуле (13), ряд (14) мажорирует ряд

$$\mathfrak{Z}(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Z}_n(X, Y), \tag{15}$$

мы получаем тем самым, что *ряд* (15) *сходится, если* $\|X\| < \delta_0$, $\|Y\| < \delta_0$, *где* $\delta_0 = \frac{\ln 2}{2}$. □

Замечание 1. Сходимость ряда (15) при $\|X\| < \delta_0$, $\|Y\| < \delta_0$ нами была уже доказана в лекции 4. Новым является лишь то, что теперь сходимость ряда (15) доказана для любой (конечномерной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, тогда как в лекции 5 алгебра $\mathfrak{g}$ предполагалась алгеброй Ли некоторой группы (групускулы) Ли.

Пусть снова G — произвольная аналитическая группа (или групускула) Ли, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ — ее алгебра Ли. Поскольку экспоненциальное отображение exp является диффеоморфизмом в точке $0 \in \mathfrak{g}$, оно позволяет перенести (по формуле $X \cdot Y = \exp^{-1}(\exp X \cdot \exp Y)$) умножение, имеющееся в G, в некоторую окрестность нуля алгебры $\mathfrak{g}$. Тем самым линеал $\mathfrak{g}$ превращается в групускулу Ли, изоморфную (в категории GR-LOC) групускуле G (изоморфизм осуществляется отображением exp).

Таким образом, в линейном пространстве $\mathfrak{g}$ кроме линейных операций и операции Ли $X, Y \longmapsto [X, Y]$ имеется еще одна операция («умножение»), относительно которой пространство $\mathfrak{g}$ является групускулой Ли. Эта операция связана с операциями, имеющимися в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, формулой

$$X \cdot Y = \mathfrak{Z}(X, Y).$$

Построенный объект заслуживает специального определения.

Определение 2. *Группалгеброй Ли* мы будем называть конечномерное линейное пространство $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$, являющееся одновременно алгеброй Ли (с умножением $[x, y]$) и групускулой Ли (с умножением xy), в которой произведение xy определено тогда и только тогда, когда ряд Кемпбелла — Хаусдорфа $\mathfrak{Z}(x, y)$ сходится, и в этом случае совпадает с его суммой:

$$xy = \mathfrak{Z}(x, y).$$

Из формул (11) и (12) непосредственно следует, что для любого (достаточно близкого к нулю) элемента X произвольной группалгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференциалы $(dL_X)_0$ и $(dR_Y)_0$ в точке 0 сдвигов L_X: $Y \longmapsto \mathfrak{Z}(X, Y)$ и R_Y: $X \longmapsto \mathfrak{Z}(X, Y)$ определяются формулами

$$(dL_X)_0 = \frac{-\operatorname{ad} X}{e^{-\operatorname{ad} X} - E}, \qquad (dR_X)_0 = \frac{e^{\operatorname{ad} X}}{e^{\operatorname{ad} X} - E}.$$

Замечание 2. Вторая из этих формул нами фактически уже доказана другим методом в лекции 4 (см. следствие 1 предложения 3 лекции 4).

Отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ группалгебр Ли называется *гомоморфизмом*, если оно представляет собой их гомоморфизм как алгебр Ли (а потому и как групускул Ли).

Ясно, что все группалгебры Ли и все их гомоморфизмы образуют категорию. Мы будем эту категорию обозначать символом GRIE.

Согласно сказанному выше каждой групускуле Ли G мы можем отнести некоторую группалгебру Ли, перенеся с помощью экспоненциального отображения exp умножение на G в $\mathfrak{g}$. Эту группалгебру Ли мы будем обозначать символом $\Gamma(G)$. Ясно, что соответствие $G \longmapsto \Gamma(G)$ представляет собой некоторый функтор

$$\Gamma\colon \text{GR-LOC} \to \text{GRIE}.$$

Мы этот функтор также будем называть *функтором Ли.*

Рассмотрим теперь *функтор игнорирования*

$$I\colon \text{GRIE} \to \text{GR-LOC},$$

действие которого состоит в отбрасывании (игнорировании) в каждой группалгебре Ли ее структуры алгебры Ли.

На первый взгляд кажется, что функторы Γ и I взаимно обратны. Однако это неверно. Действительно, для произвольной групускулы Ли G групускула $(I \circ \Gamma)\, G$ является не групускулой G, а построенной выше групускулой на линеале $\mathfrak{l}(G)$, отличной, вообще говоря, от групускулы G. Тем не менее, как мы видим, последняя групускула естественно изоморфна групускуле G (соответствующим изоморфизмом является экспоненциальное отображение exp). На языке теории функторов это означает, что *функтор* $I \circ \Gamma$ *изоморфен тождественному функтору* Id *категории* GR-LOC:

$$I \circ \mathfrak{l} \approx \mathrm{Id}.$$

Аналогично *функтор* $\Gamma \circ I$ *изоморфен тождественному функтору* Id *категории* GRIE:

$$\Gamma \circ I \approx \mathrm{Id}.$$

Действительно, группалгебре Ли $\mathfrak{g}$ функтор $\Gamma \circ I$ сопоставляет группалгебру, совпадающую как линейное пространство с касательным пространством $\mathbf{T}_0(\mathfrak{g})$. Но

мы знаем, что между линейными пространствами $\mathfrak{g}$ и $\mathsf{T}_0(\mathfrak{g})$ существует естественный изоморфизм

$$l\colon \mathfrak{g} \to \mathsf{T}_0(\mathfrak{g}).$$

Покажем, что l является изоморфизмом группалгебр Ли.

По определению изоморфизм l переводит произвольный элемент $x \in \mathfrak{g}$ в касательный вектор кривой $t \mapsto tx$ в точке 0. Поскольку $(tx)\cdot(sx) = \mathfrak{Z}(tx, sx) = \mathfrak{Z}_1(tx, sx) = (t+s)x$, эта кривая является однопараметрической подгруппой групускулы Ли $l\mathfrak{g}$, и потому (см. предложение 1 лекции 4) для любых двух элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ вектор $[lx, ly]$ представляет собой касательный вектор в точке 0 к кривой

$$t \mapsto (\sqrt{t}\,x)(\sqrt{t}\,y)(\sqrt{t}\,x)^{-1}(\sqrt{t}\,y)^{-1}.$$

Но поскольку (см. доказательство предложения 1 лекции 4)

$$(\sqrt{t}\,x)(\sqrt{t}\,y)(\sqrt{t}\,x)^{-1}(\sqrt{t}\,y)^{-1} = t[x, y] + O(t^{3/2}),$$

эта кривая имеет в точке 0 тот же касательный вектор, что и кривая $t \mapsto t[x, y]$. Следовательно,

$$[lx, ly] = l[x, y],$$

так что l действительно является изоморфизмом алгебр, а следовательно, и группалгебр Ли. □

Если функторы $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ и $G\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$, где C и D — некоторые категории, обладают тем свойством, что составные функторы $F \circ G$ и $G \circ F$ изоморфны тождественным функторам (категорий D и C соответственно), то говорят, что функторы F и G *квазиобратны*. Категории C и D, для которых существуют квазиобратные функторы $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ и $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$, называются *эквивалентными*.

Таким образом, нами доказано следующее предложение:

Предложение 3. *Категории* GR-LOC *и* GRIE *эквивалентны. Эквивалентность осуществляется квазиобратными функторами* V *и* I. □

Отбрасывая в группалгебре Ли структуру групускулы, мы получаем функтор игнорирования

$$J\colon \mathrm{GRIE} \to \mathrm{ALG}_f\text{-}\mathrm{LIE},$$

композиция $J \circ \mathfrak{l}'$ которого с функтором Ли $\mathfrak{l}'$: GR-LOC $\to$ GRIE является не чем иным, как интересующим нас в первую очередь функтором Ли

$$\mathfrak{l}: \text{GR-LOC} \to \text{ALG}_f\text{-LIE}$$

для групускул.

Предложение 4. *Для функтора J существует обратный функтор*

$$J^{-1}: \text{ALG}_f\text{-LIE} \to \text{GRIE}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли (умножение в которой обозначено символом $[x, y]$). Если группалгебра $J^{-1}\mathfrak{g}$ существует, то как алгебра Ли она совпадает с алгеброй $\mathfrak{g}$, а умножение в ней связано с операциями в $\mathfrak{g}$ формулой

$$xy = \mathfrak{Z}(x, y).$$

Поэтому для доказательства предложения 3 достаточно доказать, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эта формула определяет в $\mathfrak{g}$ умножение, удовлетворяющее аксиомам групускулы Ли. В свою очередь, для этого достаточно доказать, что:

а) в алгебре $\mathfrak{g}$ существует такая окрестность нуля U, что при $x, y \in U$ ряд $\mathfrak{Z}(x, y)$ сходится;

б) отображение $U \times U \to \mathfrak{g}$, определенное соответствием $x, y \mapsto \mathfrak{Z}(x, y)$, вместе с отображением $x \mapsto x^{-1} = -x$ обладает свойствами, перечисленными в определении 1 лекции 4.

Утверждение а) мы выше уже доказали, а для доказательства утверждения б) заметим сначала, что в алгебре формальных рядов от трех некоммутирующих неизвестных x, y, z имеет место формула

$$(e^x e^y) e^z = e^x (e^y e^z)$$

(непосредственно проверяющаяся прямой выкладкой). Поскольку ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа $\mathfrak{Z}(x, y)$ переходит при подстановке $[x, y] \mapsto xy - yx$ в ряд $\ln(e^x e^y)$, отсюда непосредственно вытекает, что умножение $x, y \mapsto \mathfrak{Z}(x, y)$ ассоциативно (если только все нужные ряды сходятся). Аналогично, поскольку $\mathfrak{Z}(0, x) = \mathfrak{Z}(x, 0) =$ умножение $x, y \mapsto \mathfrak{Z}(x, y)$ обладает единицей 0, а по-

скольку $e^x e^{-x} = 1$, обратным элементом x^{-1} относительно этого умножения является элемент $-x$.

Предложение 4 тем самым полностью доказано. □

Поскольку функтор I квазиобратен функтору $\mathfrak{l}'$, функтор $E = I \circ J^{-1}$ квазиобратен функтору Ли $\mathfrak{l} = J \circ \mathfrak{l}'$. Таким образом, мы достигли нашей главной цели: нашли функтор, если не обратный, то квазиобратный функтору Ли GR-LOC $\to$ ALG$_f$-LIE.

Все полученные результаты мы можем суммировать в следующей окончательной теореме:

Теорема 1. *Имеет место следующая коммутативная диаграмма функторов*

$$\begin{tikzcd}
\text{GR-LOC} \arrow[rr, shift left, "\mathfrak{l}"] \arrow[dr, shift left, "\mathfrak{l}'"] & & \text{ALG}_f\text{-LIE} \arrow[ll, shift left, "E"] \arrow[dl, shift left, "J"] \\
& \text{GRIE} \arrow[ul, shift left, "I"] \arrow[ur, shift left, "J^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

в которой функторы J и J^{-1} обратны друг другу, а функторы $\mathfrak{l}$ и E, а также функторы $\mathfrak{l}'$ и I квазиобратны. □

Следствие. *Категории* GR-LOC, ALG$_f$-LIE *и* GRIE *эквивалентны.* □

По существу, теорема 1 была известна еще Софусу Ли.

Ли изложил свои результаты в виде шести теорем: трех прямых и трех обратных. Ближе всего к теореме 1 его третья обратная теорема. На этом довольно шатком основании теорему 1 иногда называют третьей теоремой Ли.

Подчеркнем, что в теореме 1 групускулы Ли предполагаются *аналитическими*. Случай групускул, принадлежащих классу гладкости C^r, $2 \leqslant r \leqslant \infty$ мы рассмотрим в следующей лекции.