Лекция 7

ПОДГРУПУСКУЛЫ И ПОДАЛГЕБРЫ. — ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДГРУПУСКУЛЫ И ИДЕАЛЫ. — ФАКТОРГРУПУСКУЛЫ И ФАКТОРАЛГЕБРЫ. — СВЕДЕНИЕ ГЛАДКИХ ГРУПУСКУЛ К АНАЛИТИЧЕСКИМ. — СИСТЕМЫ ПФАФФА. — ПОДРАССЛОЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ. — ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПОДРАССЛОЕНИЯ. — ГРАФИКИ СИСТЕМ ПФАФФА. — ИНВОЛЮТИВНЫЕ ПОДРАССЛОЕНИЯ. — ПОЛНАЯ УНИВАЛЕНТНОСТЬ ФУНКТОРА ЛИ. — ИНВОЛЮТИВНОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПОДРАССЛОЕНИЙ. — ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПОДРАССЛОЕНИЯ.

Теорема 1 предыдущей лекции полностью сводит теорию (аналитических) групускул Ли к теории алгебр Ли. Мы проиллюстрируем это на примере подгрупускул, и факторгрупускул.

Определение 1. *Подгрупускулой* групускулы Ли G называется такое ее подмножество H, что:

1) если для элементов a, $b \in H$ определен элемент ab^{-1}, то $ab^{-1} \in H$.

2) существует такая окрестность U единицы e групускулы G, что пересечение $U \cap H$ замкнуто в U (условие локальной замкнутости).

Заметим, что из этого определения непосредственно еще не вытекает, что подгрупускула H сама является групускулой Ли (хотя, как мы увидим ниже, на самом деле это так).

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — некоторая ее подалгебра. Применяя функтор $E = I \circ J^{-1}$, мы по алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можем построить групускулу Ли $E\mathfrak{g}$, а по алгебре Ли $\mathfrak{h}$ — групускулу Ли $E\mathfrak{h}$. При этом, согласно

построению, $E\mathfrak{h}$ будет подмножеством групускулы $E\mathfrak{g}$ и, более того, ее подгрупускулой (ибо если $x, y \in \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{Э}_n(x, y) \in \mathfrak{h}$ для любого $n \geqslant 1$).

Пусть теперь G — произвольная групускула Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ — ее алгебра Ли. При естественном изоморфизме $E\mathfrak{g} \approx G$ каждой подгрупускуле групускулы $E\mathfrak{g}$, имеющей вид $E\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, отвечает некоторая подгрупускула групускулы G. В некоторой окрестности единицы $e \in G$ эта подгрупускула совпадает с образом $\exp \mathfrak{h}$ подалгебры $\mathfrak{h}$ при экспоненциальном отображении $\exp$, так что, в соответствии с нашим соглашением не различать эквивалентные групускулы, мы можем обозначать ее символом $\exp \mathfrak{h}$.

Подгрупускула $\exp \mathfrak{h}$ групускулы G, отвечающая подалгебре $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$, обладает тем свойством, что в некоторой системе нормальных координат $x^1, \ldots, x^n$ (а именно, в системе, определенной базисом алгебры $\mathfrak{g}$, первые m векторов которого составляют базис подалгебры $\mathfrak{h}$) она задается линейными уравнениями

$$x^{m+1} = 0, \quad \ldots, \quad x^n = 0. \tag{1}$$

О подгрупускулах, обладающих этим свойством, мы будем говорить, что они *локально плоски*. Таким образом, для того чтобы подгрупускула $H \subset G$ имела вид $\exp \mathfrak{h}$, необходимо, чтобы она была локально плоска. Легко, впрочем, видеть, что это необходимое условие также и достаточно, так что *подгрупускула H групускулы Ли G тогда и только тогда отвечает некоторой подалгебре алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$* (и потому, в частности, сама является групускулой Ли), *когда она локально плоска*. Действительно, пусть $\mathfrak{h}$ — подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, натянутое на первые m векторов базиса, определяющего нормальные координаты, в которых H задается уравнениями (1). Тогда для любого $X \in \mathfrak{h}$ и любого t (с достаточно малым $|t|$) точка $\beta_X(t) = \exp tX$ лежит в H. Поэтому, если $X, Y \in \mathfrak{h}$, то

$$\beta(t) = \beta_X(\sqrt{t})\,\beta_Y(\sqrt{t})\,\beta_X(\sqrt{t})^{-1}\,\beta_Y(\sqrt{t})^{-1} \in H$$

и, значит, вектор

$$[X, Y] = \left.\frac{d\beta(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

(см. предложение 2 лекции 4) лежит в $\mathfrak{h}$. Следовательно, $\mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для завершения доказательства остается заметить, что групускулы H и $E\mathfrak{h}$ очевидным образом эквивалентны. □

Мы видим, в частности, что для локально плоской подгрупускулы H подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}(G)$ состоит из всех элементов $X \in \mathfrak{l}(G)$, для которых $\exp tX \in H$ при любом t (с достаточно малым $|t|$). Эта подалгебра естественным образом отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{l}(H)$ подгрупускулы H (рассматриваемой как групускула Ли), и мы будем ее обозначать тем же символом $\mathfrak{l}(H)$.

Таким образом, *для любой групускулы Ли G между множеством всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ и множеством всех локально плоских подгрупускул групускулы G имеет место биективное соответствие, в котором подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ соответствует подгрупускула* $\exp \mathfrak{h}$, *а подгрупускуле $H \subset G$ — подалгебра $\mathfrak{l}(H)$.*

Это соответствие мы будем называть *соответствием Ли.*

Замечательный факт, впервые доказанный Э. Картаном, состоит в том, что условие локальной плоскостности подгрупускул в этом утверждении на самом деле не нужно.

Предложение 1 (теорема Картана). *Каждая подгрупускула H произвольной групускулы Ли G локально плоска и, значит, в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ существует такая подалгебра $\mathfrak{h}$, что*

$$H = \exp \mathfrak{h}.$$

В частности, H является групускулой Ли.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}$ — совокупность всех элементов $X \in \mathfrak{g}$, обладающих тем свойством, что $\exp tX \in H$ для любого t (с достаточно малым $|t|$). Мы докажем, что $\mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$ и что $\exp \mathfrak{h} = H$. Доказательство мы разобьем в ряд лемм.

Лемма 1. *Если для элемента $X \in \mathfrak{g}$ существует такая сходящаяся к X последовательность $\{X_i\}$, что для некоторых $t_i \in \mathbb{R}$, стремящихся к нулю при $i \to \infty$, имеет место включение*

$$\exp t_i X_i \in H,$$

то $X \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. Поскольку $\prod \exp(-t_i X_i) = \prod \exp(t_i X_i)^{-1} \in H$, мы без ограничения общности можем считать, что $t_i > 0$. Пусть $t > 0$ — такое число, что элемент $\exp tX \in G$ определен, и пусть

$$k_i(t) = \left[\frac{t}{t_i}\right] \quad \left(\text{целая часть от } \frac{t}{t_i}\right).$$

Так как $\frac{t}{t_i} - 1 < k_i(t) \leqslant \frac{t}{t_i}$, то $\lim\limits_{t\to\infty} t_i k_i(t) = t$, и потому

$$\lim_{t\to\infty} \exp(t_i k_i(t) X_i) = \exp tX.$$

Но

$$\exp(t_i k_i(t) X_i) = (\exp t_i X_i)^{k_i(t)} \in H,$$

а подгрупускула H по условию локально замкнута. Следовательно, $\exp tX \in H$ и, значит, $X \in \mathfrak{h}$. □

Лемма 2. *Подмножество $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является подалгеброй.*

Доказательство. Так как $\exp(t(sX)) = \exp((ts)X)$, то для любого $X \in \mathfrak{h}$ и любого $s \in \mathbb{R}$ имеет место включение $sX \in \mathfrak{h}$ (ибо t мы всегда можем выбрать достаточно малым).

Пусть $X, Y \in \mathfrak{h}$. Тогда $\exp \mathfrak{I}(tX, tY) = \exp tX \cdot \exp tY \in H$, т. е. $\exp t(X + Y + Z_t) \in H$, где $Z_t = O(t)$. Произвольно выбрав сходящуюся к нулю последовательность $\{t_i\}$, положим $X_i = X + Y + Z_{t_i}$. Последовательность $\{X_i\}$ удовлетворяет (по отношению к элементу $X + Y$) всем условиям леммы 1. Поэтому, согласно этой лемме, $X + Y \in \mathfrak{h}$.

Аналогично, так как

$$\exp tX \cdot \exp tY \cdot (\exp tX)^{-1} (\exp tY)^{-1} = \\ = \exp t^2([X, Y] + O(t)) \in H,$$

то $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. □

Пусть теперь $\mathfrak{k}$ — произвольное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{h}$, т. е. такое, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}. \tag{2}$$

Лемма 3. *В $\mathfrak{k}$ существует такая окрестность V нуля 0, что*

$$\exp Y \notin H$$

ни для одного отличного от нуля элемента $Y \in \mathfrak{k}$.

Доказательство. Выбрав в $\mathfrak{k}$ некоторую норму $\| \ \|$ (скажем, евклидову), рассмотрим множество B всех элементов $Y \in \mathfrak{k}$, для которых $1 \leqslant \|Y\| \leqslant 2$. Если лемма 3 неверна, то в алгебре $\mathfrak{g}$ существует такая последовательность $Y_i \to 0$, что $Y_i \in \mathfrak{k}$ и $\exp Y_i \in H$. Подберем целые числа n_i так, чтобы $X_i = n_i Y_i \in B$ (ясно, что это всегда возможно). Поскольку B компактно, можно, без ограничения общности, считать, что последовательность $\{X_i\}$ сходится. Пусть X — ее предел. Поскольку последовательность $\{X_i\}$ удовлетворяет всем условиям леммы 1 (с $t_i = 1/n_i$), элемент X (очевидно, отличный от нуля) принадлежит подаглебре $\mathfrak{h}$. Но это невозможно, ибо $X \in \mathfrak{k}$, а $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = 0$. Следовательно, утверждение леммы 3 неверным быть не может. □

Лемма 4. В групускуле Ли G имеет место равенство

$$H = \exp \mathfrak{h}.$$

Доказательство. Так как по построению $\exp \mathfrak{h} \subset H$, то нам нужно лишь показать, что имеет место обратное включение. При этом без ограничения общности мы можем предполагать, что групускула G является канонической окрестностью единицы, отвечающей разложению (2) алгебры $\mathfrak{g}$ (см. определение 4 лекции 5). Более того, мы можем считать, что G является образом при отображении

$$X + Y \longmapsto \exp X \cdot \exp Y, \qquad X \in \mathfrak{h}, \quad Y \subset \mathfrak{k},$$

окрестности нуля алгебры $\mathfrak{g}$, имеющей вид $U \oplus V$, где U — некоторая окрестность нуля в $\mathfrak{h}$, а V — окрестность нуля в $\mathfrak{k}$, предусмотренная леммой 3. Но в этих условиях включение $\exp \mathfrak{h} \supset H$ очевидно, поскольку, если $\exp X \cdot \exp Y \in H$, то $\exp Y \in H$ (ибо $\exp X \in H$) и, значит, $Y = 0$ в силу леммы 3. □

Тем самым предложение 1 полностью доказано. □

Следствие. Соответствие Ли является естественным биективным соответствием между множеством всех подгрупускул групускулы Ли G и множеством всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{I}(G)$. □

Заметив, что оба эти множества являются по отношению к включению решетками (структурами), мы немедленно получим, что *соответствие Ли представляет собой изоморфизм этих решеток.*

Определение 2. Подгрупускула H групускулы Ли G называется *инвариантной*, если $aba^{-1} \in H$ для любых элементов $a \in G$, $b \in H$, для которых элемент aba^{-1} определен.

Определение 3. Подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *идеалом*, если $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ для любых элементов $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$.

Предложение 2. В соответствии Ли инвариантным подгрупускулам групускулы Ли G отвечают идеалы алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$, а идеалам — инвариантные подгрупускулы.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$, и пусть $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$. Из того, что $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, непосредственно вытекает, что $\mathfrak{Z}_n(X, Y) \in \mathfrak{h}$ при любом $n > 1$, и потому

$$\mathfrak{Z}(X, Y) = X + Y^*,$$

где $Y^* = Y + \sum_{n>1} \mathfrak{Z}_n(X, Y) \in \mathfrak{h}$ (если, конечно, ряд $\mathfrak{Z}(X, Y)$ сходится). Поскольку $[X + Y^*, -X] = [X, Y^*] \in \mathfrak{h}$ и, значит, $\mathfrak{Z}_n(X + Y^*, -X) \in \mathfrak{h}$ при $n > 1$, отсюда следует, что

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(X, Y), -X) = X + Y^* - X + \sum_{n>1} \mathfrak{Z}_n(X + Y^*, -X) \in \mathfrak{h},$$

и потому

$$\exp X \cdot \exp Y \cdot (\exp X)^{-1} = \exp \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(X, Y), -X) \in \exp \mathfrak{h}.$$

Следовательно, подгрупускула $\exp \mathfrak{h}$ инвариантна.

Обратно, пусть $H = \exp \mathfrak{h}$ — произвольная инвариантная подгрупускула групускулы Ли G. Тогда для любых элементов $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ и любого t (с достаточно малым $|t|$) будет иметь место включение

$$\exp tX \cdot \exp tY \cdot (\exp tX)^{-1} \in H,$$

а потому и включение

$$\exp tX \cdot \exp tY \cdot (\exp tX)^{-1} \cdot (\exp tY)^{-1} = \\ = \exp t^2([X, Y] + O(t)) \in H,$$

из которого посредством уже известного нам рассуждения (см. выше доказательство леммы 2) вытекает,

что $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Следовательно, подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$ является идеалом. □

Пусть H — произвольная подгрупускула групускулы Ли G. Назовем элементы $a, b \in G$ *сравнимыми по модулю* H, если $a^{-1}b \in H$. Ясно, что на достаточно малой окрестности единицы групускулы G это отношение является отношением эквивалентности, классами эквивалентности которого являются смежные классы aH (точнее, пересечения этих классов с окрестностью единицы). Пусть G/H — множество этих смежных классов.

Разложив алгебру Ли $\mathfrak{g} = L(G)$ в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ алгебры Ли $\mathfrak{h}$ подгрупускулы H и некоторого подпространства $\mathfrak{k}$ и рассмотрев канонические координаты $x^1, \ldots, x^n$, определенные этим разложением, мы немедленно получим, что смежные классы $aH \in G/H$ задаются в координатах $x^1, \ldots, x^n$ уравнениями вида

$$(3) \qquad x^{m+1} = a^1, \ \ldots, \ x^n = a^{n-m} \quad (n = \dim G, \ m = \dim H),$$

где $a^1, \ldots, a^{n-m}$ — произвольные (достаточно малые по абсолютной величине) вещественные числа. Это показывает, что, сопоставив смежному классу aH точку $(a^1, \ldots, a^{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$, мы получим некоторое биективное отображение множества G/H на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^{n-m}$, т. е. получим карту. Поскольку при другом выборе дополнительного подпространства $\mathfrak{k}$ получается, как легко видеть, согласованная карта, тем самым на множестве G/H определяются топология и гладкость, относительно которых оно является гладким многообразием (диффеоморфным некоторому открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^{n-m}$ и потому имеющим размерность $n - m$).

Если подгрупускула H инвариантна, то формула $aH \cdot bH = abH$ корректно определяет в окрестности точки $H = eH$ многообразия G/H некоторое умножение, относительно которого оно, очевидно, является групускулой Ли с единицей H.

Определение 4. Построенная групускула Ли G/H называется *факторгрупускулой* групускулы Ли G по инвариантной подгрупускуле H.

Пусть теперь $\mathfrak{h}$ — идеал некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим факторпространство $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, элементами кото-

рого являются смежные классы $x+\mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$. Очевидно, что формула

$$[x+\mathfrak{h},\ y+\mathfrak{h}]=[x,\ y]+\mathfrak{h}$$

корректно определяет на факторпространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ операцию $[\ ,\ ]$, относительно которой это факторпространство является алгеброй Ли.

Определение 5. Алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ называется *факторалгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по идеалу $\mathfrak{h}$.

В частности, для любой инвариантной подгрупускулы H групускулы Ли G определена факторалгебра $\mathfrak{l}(G)/\mathfrak{l}(H)$ алгебры Ли $\mathfrak{l}(G)$ по ее идеалу $\mathfrak{l}(H)$. Сравним эту факторалгебру с алгеброй Ли $\mathfrak{l}(G/H)$ факторгрупускулы G/H.

Предложение 3. *Алгебры Ли* $\mathfrak{l}(G/H)$ *и* $\mathfrak{l}(G)/\mathfrak{l}(H)$ *естественно изоморфны*:

$$\mathfrak{l}(G/H) \approx \mathfrak{l}(G)/\mathfrak{l}(H).$$

Доказательство. Применив к алгебрам Ли $\mathfrak{l}(G/H)$ и $\mathfrak{l}(G)/\mathfrak{l}(H)$ функтор E: $\mathrm{ALG}_f\text{-LIE} \to \mathrm{GR\text{-}LOC}$, мы, с одной стороны, получим групускулу Ли $E(\mathfrak{l}(G/H))$, естественно изоморфную групускуле G/H, а с другой стороны, групускулу Ли $E(\mathfrak{l}(G)/\mathfrak{l}(H))$. Поэтому предложение 3 равносильно утверждению, что имеет место естественный изоморфизм

$$G/H \approx E(\mathfrak{l}(G)/\mathfrak{l}(H)).$$

В этой форме мы его и будем доказывать.

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}(G)$ и $\mathfrak{h}=\mathfrak{l}(H)$. Элементами групускулы $E(\mathfrak{l}(G)/\mathfrak{l}(H))=E(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ являются, по определению, элементы факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, т. е. смежные классы $X+\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ по идеалу $\mathfrak{h}$. Покажем, что экспоненциальное отображение exp: $\mathfrak{g} \to G$ каждый такой смежный класс отображает на некоторый смежный класс aH групускулы G по инвариантной подгрупускуле $H=\exp \mathfrak{h}$. Действительно, как мы уже знаем, для любых достаточно близких к нулю элементов $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство

$$\mathfrak{Z}(X,\ Y)=X+Y^*,$$

где $Y^* \in \mathfrak{h}$. При этом

$$Y^*=Y+\sum_{n>1} \mathfrak{Z}_n(X,\ Y),$$

откуда непосредственно вытекает, что при любом фиксированном X отображение $Y \to Y^*$ биективно (в некоторой окрестности нуля). Следовательно, отображение

$$X + Y^* \mapsto \exp(X + Y^*) = \exp \mathfrak{Z}(X, Y) = \exp X \cdot \exp Y$$

каждый смежный класс $X + \mathfrak{h}$ отображает на смежный класс $\exp X \cdot H$.

Построенное отображение многообразия $E(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ на многообразие G/H, очевидно, является в единице диффеоморфизмом. Поэтому для завершения доказательства предложения 3 нам остается лишь показать, что произведение оно переводит в произведение. Но это очевидно, поскольку для любых элементов X_1, $X_2 \in \mathfrak{g}$, Y_1, $Y_2 \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство

$$(X_1 + Y_1^*) \cdot (X_2 + Y_2^*) = \mathfrak{Z}(X_1 + Y_1^*, X_2 + Y_2^*) = \mathfrak{Z}(X_1, X_2) + Y^*,$$

где $Y^* \in \mathfrak{h}$, и потому

$$(X_1 + Y_1^*) \cdot (X_2 + Y_2^*) \mapsto \exp \mathfrak{Z}(X_1, X_2) \cdot \exp Y^* \in a_1 H \cdot a_2 H,$$

где $a_1 = \exp X_1$, $a_2 = \exp X_2$. □

Подытожим полученные результаты в следующей теореме:

Теорема 1. Для каждой групускулы Ли G соответствие Ли является естественным биективным соответствием между решеткой всех подгрупускул групускулы Ли G и решеткой всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$.

В этом соответствии инвариантным подгрупускулам отвечают идеалы алгебры $\mathfrak{g}$ и, наоборот, идеалам — инвариантные подгрупускулы.

Алгеброй Ли каждой факторгрупускулы групускулы G является факторалгебра алгебры Ли $\mathfrak{l}(G)$ по соответствующему идеалу. □

Как мы уже неоднократно подчеркивали, все результаты последних лекций относились к аналитическим (т. е. класса C^ω) групускулам. Оказывается, что в общности мы при этом фактически нисколько не проиграли. Чтобы дать этому утверждению точную формулировку, мы, считая фиксированным некоторый класс гладкости C^r (с $r \geqslant 2$), будем называть *гладкими групускулами* групускулы, являющиеся многообразиями класса C^r, а *аналитическими групускулами* — групускулы класса C^ω.

Тогда будет иметь место следующая теорема, показывающая, что в теории групускул Ли ограничение аналитическими групускулами общности на самом деле не уменьшает:

Теорема 2. *Каждая гладкая групускула изоморфна (в категории гладких групускул) некоторой аналитической групускуле.*

Доказательство этой теоремы основывается на одном интересном и самом по себе свойстве функтора Ли, которое нам и будет нужно в первую очередь обсудить.

Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — две категории и $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ — произвольный функтор. Для любых двух объектов A, B категории $\mathbf{C}$ функтор F задает некоторое отображение

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(FA, FB)$$

множества всех морфизмов $A \to B$ категории $\mathbf{C}$ в множество всех морфизмов $FA \to FB$ категории $\mathbf{D}$. Говорят, что функтор F *вполне унивалентен*, если для любых A и B это отображение биективно, т. е. если для любого морфизма β: $FA \to FB$ существует один и только один морфизм α: $A \to B$, для которого $F\alpha = \beta$.

Ясно, что если функтор F вполне унивалентен, то объекты A и B категории $\mathbf{C}$ тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны объекты FA и FB категории $\mathbf{D}$.

В следующем предложении под GR-LOC понимается категория гладких групускул Ли.

Предложение 4. *Функтор Ли* $\mathrm{GR\text{-}LOC} \to \mathrm{ALC}_f\text{-}\mathrm{LIE}$ *вполне унивалентен.*

В частности, *групускулы Ли тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны их алгебры Ли.*

Из этого предложения теорема 2 вытекает мгновенно. Действительно, пусть G — произвольная гладкая групускула, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ — ее алгебра Ли. Построенный в предыдущей лекции функтор E сопоставляет алгебре Ли $\mathfrak{g}$ некоторую аналитическую групускулу $E\mathfrak{g}$, алгебра Ли $\mathfrak{l}(E\mathfrak{g})$ которой изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$. Поэтому эта групускула изоморфна групускуле G. $\square$

Заметим, что для аналитических групускул предложение 4 тривиальным образом справедливо, поскольку *любой квазиобратимый функтор* F: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *вполне унивалентен.* Действительно, если G: $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ — квазиобратный

функтор, то для любого морфизма $\alpha\colon A \to B$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d] & GFA \arrow[d, "GF\alpha"] \\ B \arrow[r, "\varepsilon_B"] & GFB \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой являются изоморфизмами. Поэтому, если $F\alpha = F\beta$, то

$$\alpha = \varepsilon_B^{-1} \circ GF\alpha \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B^{-1} \circ GF\beta \circ \varepsilon_A = \beta.$$

Таким образом, если для морфизма $\gamma\colon FA \to FB$ существует морфизм $\alpha\colon A \to B$, для которого $F\alpha = \gamma$, то этот морфизм единствен. Аналогично доказывается, что для морфизма $\alpha\colon GS \to GT$, где S, T — объекты категории $\mathbf{D}$, может существовать только единственный морфизм $\gamma\colon S \to T$, для которого $G\gamma = \alpha$. С другой стороны, для любого морфизма $\gamma\colon FA \to FB$ морфизм $\alpha = \varepsilon_B^{-1} \circ G\gamma \circ \varepsilon_A$ обладает тем свойством, что $GF\alpha = \varepsilon_B \circ \alpha \circ \varepsilon_A^{-1} = G\gamma$. Поэтому $F\alpha = \gamma$. $\square$

Доказательство предложения 4 основывается на теории уравнений в полных дифференциалах (уравнений Пфаффа). Мы начнем с того, что изложим эту теорию в инвариантной форме, не использующей координат.

Пусть P и Q — два гладких многообразия.

Определение 6. Системой Пфаффа на P в Q называется функция

$$f\colon (p, q) \longmapsto f(p, q),$$

сопоставляющая каждой точке $(p, q) \in P \times Q$ некоторое линейное отображение

$$f(p, q)\colon \mathsf{T}_p(P) \to \mathsf{T}_q(Q),$$

гладко зависящее от p и q.

Если $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^m$ — локальные координаты в многообразиях P и Q соответственно, то в ассоциированных координатах на линейных пространствах $\mathsf{T}_p(P)$ и $\mathsf{T}_q(Q)$ отображение $f(p, q)$ будет задаваться $n \times m$-матрицей, элементы которой являются функ-

циями координат $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^m$. Требование гладкой зависимости отображения $f(p, q)$ от p и q означает, что эти функции гладки.

Замечание 1. В более инвариантных терминах понятие системы Пфаффа определяется с помощью понятия индуцированного расслоения. Мы не будем напоминать это понятие (оно нам больше нигде не понадобится) и лишь заметим, что система Пфаффа в смысле определения 6 есть не что иное, как отображение над $P \times Q$ расслоения, индуцированного из касательного расслоения $\mathsf{T}(P)$ проекцией $P \times G \to P$, в расслоение, индуцированное из касательного расслоения $\mathsf{T}(Q)$ проекцией $P \times Q \to Q$. Этот подход позволяет не объяснять требование гладкой зависимости отображений $f(p, q)$ от p и q.

Определение 7. *Интегралом* системы Пфаффа f на открытом множестве $U \subset P$ называется такое отображение φ: $U \to Q$, что

$$f(u, \varphi x) = (d\varphi)_u$$

для любой точки $u \in U$. Система Пфаффа f называется *интегрируемой*, если для каждой точки $(p_0, q_0) \in P \times Q$ существует такой интеграл φ: $U \to Q$ системы f, определенный на некоторой окрестности U точки p_0 в многообразии P, что $\varphi(p_0) = q_0$.

Лемма 1. *Любые два интеграла* φ: $U \to Q$ *и* φ': $U' \to Q$, *определенные на окрестностях* U *и* U' *точки* p_0 *и такие, что* $\varphi(p_0) = \varphi'(p_0)$, *совпадают на некоторой окрестности точки* p_0.

Мы докажем эту лемму ниже.

Чтобы получить удобные условия интегрируемости системы Пфаффа (и заодно доказать лемму 1), целесообразно несколько обобщить задачу.

Пусть M — произвольное гладкое многообразие и π: $\mathsf{T}(M) \to M$ — его касательное расслоение.

Определение 8. Векторное расслоение π_1: $E \to M$ называется *подрасслоением* касательного расслоения π: $\mathsf{T}(M) \to M$, если $E \subset \mathsf{T}(M)$, отображение вложения $E \to \mathsf{T}(M)$ гладко и $\pi_1 = \pi|_E$. Подрасслоение однозначно определено заданием многообразия E, и, как правило,

мы будем его отождествлять с E. Слой $\pi_1^{-1}(a)$ расслоения E над точкой $a \in M$ мы будем обозначать символом E_a. Он является подпространством $\mathsf{T}_a(M) \cap E$ касательного пространства $\mathsf{T}_a(M)$, размерность которого одна и та же для всех a. Мы будем обозначать эту размерность символом m.

Для каждого открытого множества $U \subset M$ определено векторное расслоение $\pi_1^{-1}(U) \to U$ с теми же слоями, что и расслоение E. Оно является подрасслоением касательного расслоения $\mathsf{T}(U) \to U$. Мы будем обозначать это подрасслоение символов $E|_U$ и называть *ограничением* подрасслоения E на U.

Согласно этому определению $\mathsf{T}(M)|_U = \mathsf{T}(U)$.

Пусть W — произвольное m-мерное многообразие и w_0 — его точка. Как правило, W будет у нас окрестностью точки w_0 в некотором многообразии (например, $\mathbb{R}^m$), но в принципе W может быть любым.

Определение 9. Гладкое отображение Φ: $W \to M$ называется *интегральным по отношению к подрасслоению* $E \subset \mathsf{T}(M)$, если в любой точке $w \in W$ его дифференциал

$$(d\Phi)_w\colon \mathsf{T}_w(W) \to \mathsf{T}_a(M), \qquad a = \Phi w,$$

является мономорфизмом на слой E_a подрасслоения E.

В соответствии с общепринятыми в теории множеств обозначениями мы будем писать Φ: $(W, w_0) \to (M, a_0)$, если $a_0 = \Phi w_0$.

Определение 10. Подрасслоение E касательного расслоения $\mathsf{T}(M)$ называется *интегрируемым*, если для любой точки $a_0 \in M$ существует отображение Φ: $(W, w_0) \to (M, a_0)$, интегральное по отношению к E.

Лемма 2. *Если подрасслоение E интегрируемо, то для любой точки $a_0 \in M$ и любых интегральных по отношению к E отображений Φ: $(W, w_0) \to (M, a_0)$ и Φ': $(W', w_0') \to (M, a_0)$ существуют в многообразиях W и W' такие окрестности V и V' точек w_0 и w_0' и такой диффеоморфизм β: $V' \to V$, что $\Phi' = \Phi \circ \beta$ на V'.*

Мы докажем эту лемму позже.

Пусть f — произвольная система Пфаффа на P в Q, и пусть $M = P \times Q$. Для любой точки $a = (p, q) \in M$

рассмотрим *график* отображения $f(p, q)$: $\mathsf{T}_p(P) \to \mathsf{T}_q(Q)$, т. е. подмножество E_a прямой суммы

$$\mathsf{T}_a(M) = \mathsf{T}_p(P) \oplus \mathsf{T}_q(Q),$$

состоящее из таких векторов (A, B), $A \in \mathsf{T}_p(P)$, $B \in \mathsf{T}_q(Q)$, что

$$B = f(p, q) A.$$

Поскольку отображение $f(p, q)$ линейно, это подмножество является подпространством.

Мы положим

$$E = \bigcup_{a \in M} E_a.$$

Множество E является подмножеством в $\mathsf{T}(M)$ и ограничение π_1: $E \to M$ на E проекции π: $\mathsf{T}(M) \to M$ обладает тем свойством, что $\pi_1^{-1}(a) = E_a$ для любой точки $a \in M$.

Если $(U \times V, h \times k)$ — карта на M, являющаяся произведением карт (U, k) и (V, k) на P и Q соответственно, и если

$$W = \pi_1^{-1}(U \times V) = \bigcup_{a \in U \times V} E_a,$$

то отображение

$$W \to (U \times V) \times \mathbb{R}^m, \qquad m = \dim P,$$

определенное формулой

$$(A, B) \longmapsto (\pi(A, B), \dot{h}A),$$

где $\dot{h}$: $\mathsf{T}_p(P) \to \mathbb{R}^m$, $p = \pi A$, — координатный изоморфизм, отвечающий гомеоморфизму h, очевидно, будет биективным отображением. Обратное отображение H переводит точку (a, x), где $a = (p, q) \in U \times V$, а $x \in \mathbb{R}^m$, в вектор $(\dot{h}^{-1}x, f(p, q)\dot{h}^{-1}x)$ и потому обладает тем свойством, что для каждой точки $a \in U \times V$ отображение $x \longmapsto H(a, x)$ является изоморфизмом линеала $\mathbb{R}^m$ на линеал E_a.

При этом, если (U', h') — другая карта на P, а

$$H'\colon (U' \times V) \times \mathbb{R}^m \to W' = \bigcup_{a \in U' \times V} E_a$$

— соответствующее отображение, то (при $U \cap U' \neq \varnothing$) для любой точки $a \in (U \times V) \cap (U' \times V)$ композиция отображения $x \longmapsto H(a, x)$ с отображением, обратным к отображению $x \longmapsto H'(a, x)$, будет, очевидно, совпадать с отображением $h' \circ h^{-1}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ и, значит, будет гладко зависеть от точки a.

Все это означает, что (E, π_1, M) представляет собой векторное расслоение. Кроме того, ясно, что отображение вложения $E \to \mathbf{T}(M)$ гладко, и, значит (поскольку по построению $\pi_1 = \pi|_E$), это расслоение является подрасслоением касательного расслоения $\mathbf{T}(M)$.

Определение 11. Построенное подрасслоение называется *графиком* системы Пфаффа f.

Очевидно, что отображение φ: $U \to Q$ тогда и только тогда является интегралом системы Пфаффа f, когда отображение Φ: $U \to P \times Q$, определенное формулой

$$\Phi u = (u, \varphi u), \qquad u \in U, \tag{4}$$

является интегральным по отношению к графику E системы f. С другой стороны, если Ψ: $W \to P \times Q$ — произвольное отображение, интегральное по отношению к графику E, и $\Psi w = (\alpha w, \psi w)$, где α: $W \to P$, ψ: $W \to Q$, то для любой точки $w_0 \in W$ дифференциал $(d\alpha)_{w_0}$ отображения α будет, как легко видеть, изоморфизмом, и, значит, — возможно после перехода от W к меньшей окрестности точки w_0 — само отображение α будет диффеоморфизмом многообразия W на некоторую окрестность U точки $u_0 = \alpha w_0$. Тогда отображение $\Phi = \Psi \circ \alpha^{-1}$: $U \to P \times Q$, оставаясь по-прежнему интегральным по отношению к подрасслоению E, будет уже задаваться формулой (4) (с $\varphi = \psi \circ \alpha^{-1}$) и потому будет определять интеграл φ системы Пфаффа f. Этим доказано, что *система Пфаффа из P в Q тогда и только тогда интегрируема, когда ее график является интегрируемым подрасслоением касательного расслоения многообразия $P \times Q$.*

Кроме того, мы теперь можем (предполагая доказанной лемму 2) доказать лемму 1.

Доказательство леммы 1. Пусть φ: $(U, u_0) \to (Q, q_0)$ и φ': $(U', u_0) \to (Q, q_0)$ — два интеграла системы Пфаффа f, совпадающие в точке $u_0 \in U \cap U'$, и пусть

Φ: $u \mapsto (u, \varphi u)$ и Φ': $u \mapsto (u, \varphi' u)$ — соответствующие отображения (4), интегральные по отношению к графику E этой системы. Согласно лемме 2 существуют такие окрестности V и V' точки u_0 и такой диффеоморфизм β: $V' \to V$, что $\Phi' = \Phi \circ \beta$ на V'. Проектируя на U, мы получаем, в частности, что $\beta u = u$ для любой точки $u \in V'$, т. е. что $V' = V$ и $\beta = \mathrm{id}$. Но тогда $\varphi' = \varphi' \circ \beta = \varphi'$ на $V' = V$, что и доказывает лемму 1. □

Пусть снова E — произвольное подрасслоение расслоения $\mathsf{T}(M)$. О векторном поле $X \in \mathfrak{a}(M)$ мы будем говорить, что оно *лежит в* E, если $X_a \in E_a$ для любой точки $a \in M$. Ясно, что все такие поля образуют подмодуль $\mathcal{F}(M)$-модуля $\mathfrak{a}(M)$. Мы будем обозначать этот подмодуль символом $\mathfrak{a}(E)$.

Если расслоение E тривиально (изоморфно расслоению $M \times \mathbb{R}^n \to M$), то на M существуют такие векторные поля $X_1, \ldots, X_m$, что для любой точки $a \in M$ векторы $(X_1)_a, \ldots, (X_m)_a$ составляют базис пространства E_a, и, значит, поля $X_1, \ldots, X_m$ составляют базис $\mathcal{F}(M)$-модуля $\mathfrak{a}(E)$, т. е. этот модуль свободен. Отсюда в силу локальной тривиальности расслоения E следует, что *для любого подрасслоения E касательного расслоения $\mathsf{T}(M)$ существует такое открытое покрытие $\{U\}$ многообразия M, что для каждого элемента U этого покрытия $\mathcal{F}(U)$-модуль $\mathfrak{a}\left(E|_U\right)$ свободен.*

Определение 12. Подрасслоение E называется *инволютивным*, если подмодуль $\mathfrak{a}(E)$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}(M)$, т. е. если $[X, Y] \in \mathfrak{a}(E)$ для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}(E)$.

Ниже мы встретимся с ситуацией, когда подмодуль $\mathfrak{a}(E)$ порождается некоторой (конечномерной) подалгеброй $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}(M)$, т. е. любой его элемент является линейной комбинацией с коэффициентами из $\mathcal{F}(M)$ полей из $\mathfrak{g}$ (в соответствии со стандартными обозначениями теории модулей мы будем такой подмодуль обозначать символом $\mathcal{F}(M)\mathfrak{g}$). Легко видеть, что в этом случае условие инволютивности выполнено, т. е. *любой подмодуль, порожденный подалгеброй, сам является подалгеброй.* Действительно, достаточно, очевидно, показать, что для любых полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ и любой функции

$f \in \mathscr{F}(M)$ поле $[fX, Y]$ лежит в $\mathscr{F}(M)\mathfrak{g}$. Но так как Y представляет собой дифференцирование, то $Y \circ fX = Yf \cdot X + f \cdot Y \circ X$, и потому

$$[fX, Y] = fX \circ Y - Y \circ fX = f \cdot (X \circ Y - Y \circ X) - Yf \cdot X = \\ = f \cdot [X, Y] - Yf \cdot X \in \mathscr{F}(M)\mathfrak{g},$$

ибо $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ и $Yf \in \mathscr{F}(M)$. □

Предложение 5 (теорема Фробениуса). *Подрасслоение E тогда и только тогда интегрируемо, когда оно инволютивно.*

Прежде чем доказывать это предложение, мы применим его к доказательству предложения 4.

Доказательство предложения 4. Пусть G и H — две гладкие групускулы Ли и f: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — произвольный гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ в алгебру Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$. Нам надо показать, что существует гомоморфизм φ: $G \to H$ групускулы G в групускулу H, для которого $\mathfrak{l}(\varphi) = f$, и что этот гомоморфизм единствен.

С этой целью, интерпретируя f как отображение $\mathsf{T}_e(G) \to \mathsf{T}_{e'}(H)$, мы для любых двух элементов $a \in G$, $b \in H$ определим линейное отображение $f(a, b)$: $\mathsf{T}_a(G) \to \mathsf{T}_b(H)$, положив

$$f(a, b) = (dL_b)_e \circ f \circ (dL_a)_e^{-1}, \tag{5}$$

где, как всегда, L_a, L_b — левые сдвиги. Ясно, что отображения $f(a, b)$ гладко зависят от a и b, т. е. составляют некоторую систему Пфаффа на G в H.

Для любого гомоморфизма φ: $G \to H$ групускул Ли и любого элемента $a \in G$ имеет место соотношение $\varphi \circ L_a = L_{\varphi a} \circ \varphi$ (означающее попросту, что $\varphi(ax) = \varphi a\, \varphi x$), т. е. соотношение $\varphi = L_{\varphi a} \circ \varphi \circ L_a^{-1}$. Поэтому

$$(d\varphi)_a = (dL_{\varphi a})_e \circ (d\varphi)_e \circ (dL_a)_e^{-1},$$

откуда следует, что если $f = \mathfrak{l}(\varphi)$, т. е. $f = (d\varphi)_e$, то

$$(d\varphi)_a = f(a, \varphi a),$$

т. е. φ является интегралом системы Пфаффа (5), обладающим тем свойством, что $\varphi e = e$.

Обратно, пусть для системы Пфаффа (5) существует интеграл φ, определенный на некоторой окрестности единицы e групускулы G и такой, что $\varphi e = e$. Так как эквивалентные групускулы мы не различаем, то без ограничения общности мы можем считать, что интеграл φ определен на всей групускуле G.

Для любой фиксированной точки $a \in G$ отображение $\varphi \circ L_a$: $x \longmapsto \varphi(ax)$, определенное на некоторой окрестности точки e, удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} d(\varphi \circ L_a)_x &= (d\varphi)_{ax} \circ (dL_a)_x = \\ &= (dL_{\varphi(ax)})_e \circ f \circ (dL_{ax})_e^{-1} \circ (dL_a)_x = \\ &= (dL_{\varphi(ax)})_e \circ f \circ (dL_x)_e^{-1} = f(x, \varphi(ax)), \end{aligned}$$

т. е. является интегралом системы Пфаффа (5). Аналогично, так как

$$\begin{aligned} (dL_{\varphi(a)} \circ \varphi)_x &= (dL_{\varphi(a)})_{\varphi(x)} \circ (d\varphi)_x = \\ &= (dL_{\varphi(a)})_{\varphi(x)} \circ (dL_{\varphi(x)})_e \circ f \circ (dL_x)_e^{-1} = \\ &= (dL_{\varphi(a)\varphi(x)})_e \circ f \circ (dL_x)_e^{-1} = f(x, \varphi(a)\varphi(x)), \end{aligned}$$

то отображение $L_{\varphi(a)} \circ \varphi$: $x \longmapsto \varphi(a)\varphi(x)$ также является интегралом системы Пфаффа (5). Поскольку оба интеграла при $x = e$ принимают одно и то же значение $\varphi(a)$ они в силу леммы 1 совпадают в некоторой окрестности точки e. Таким образом, в этой окрестности $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x)$ и, значит, φ является гомоморфизмом групускулы Ли G в групускулу Ли H. Поскольку

$$(d\varphi)_e = (dL_e)_e \circ f \circ (dL_e)_e^{-1} = f,$$

этот гомоморфизм индуцирует данный гомоморфизм f алгебр Ли.

Тем самым доказано, что гомоморфизмы φ: $G \to H$ групускул Ли, индуцирующие данный гомоморфизм f: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ алгебр Ли, это в точности интегралы системы Пфаффа (5), для которых $\varphi(e) = e$. Следовательно, для доказательства предложения 4 достаточно доказать, что система Пфаффа (5) интегрируема, т. е. что интегрируемо подрасслоение E касательного расслоения $T(G \times H)$, являющееся графиком этой системы.

Слой этого графика над точкой $(e, e) \in G \times H$ является, очевидно, графиком $\mathfrak{f}$ гомоморфизма f, т. е. подпространством пространства $\mathsf{T}_e(G \times H) = \mathsf{T}_e(G) \times \mathsf{T}_e(H)$, состоящим из пар вида (A, fA), где $A \in \mathsf{T}_e(G)$. Над произвольной же точкой $(a, b) \in G \times H$ слой графика получается из f воздействием линейного оператора $dL_{(a, b)} = dL_a \times dL_b$.

Поэтому, если мы рассмотрим на $G \times H$ левоинвариантные векторные поля $X_1, \ldots, X_m$, значения $X_1(e, e), \ldots, X_m(e, e)$ которых в точке (e, e) составляют базис подпространства $\mathfrak{f}$, то их значения $X_1(a, b), \ldots, X_m(a, b)$ в любой точке $(a, b) \in G \times H$ будут составлять базис слоя графика E над точкой (a, b). Это означает, что *поля* $X_1, \ldots, X_m$ *составляют базис* $\mathcal{F}(G \times H)$*-модуля* $\mathfrak{a}(E)$ (так что этот модуль свободен).

Чтобы переформулировать это утверждение в более инвариантных терминах, мы заметим, что, являясь графиком гомоморфизма алгебр Ли, подпространство $\mathfrak{f}$ алгебры Ли $\mathfrak{l}(G \times H) \subset \mathfrak{a}(G \times H)$ будет подалгеброй этой алгебры, а значит, и всей алгебры Ли $\mathfrak{a}(G \times H)$. В интерпретации алгебры $\mathfrak{l}(G \times H)$ как алгебры левоинвариантных векторных полей базис подалгебры $\mathfrak{f}$ будут составлять как раз поля $X_1, \ldots, X_m$. Поэтому подмодуль $\mathcal{F}(G \times H)$-модуля $\mathfrak{a}(G \times H)$, имеющий базис $X_1, \ldots, X_m$, — это в точности подмодуль $\mathcal{F}(G \times H)\mathfrak{f}$, порожденный подалгеброй $\mathfrak{f}$. Но выше было замечено, что подмодуль, порожденный подалгеброй, сам является подалгеброй. Таким образом, подмодуль $\mathfrak{a}(E)$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}(G \times H)$, так что подрасслоение E инволютивно. Следовательно, согласно предложению 5, оно интегрируемо. □

Теперь нам осталось лишь доказать предложение 5 (и лемму 2). Необходимость условия этого предложения доказывается без труда:

Предложение 6. *Любое интегрируемое подрасслоение* E *инволютивно.*

Доказательство. Пусть $a_0 \in M$, и пусть Φ: $(W, w_0) \to (M, a_0)$ — интегральное по отношению к E отображение. Так как в любой точке $w \in W$ отображение $(d\Phi)_w$: $\mathsf{T}_w(W) \to \mathsf{T}_{\Phi w}(M)$ мономорфно, то для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}(E)$ существует на W единствен-

ное поле X^{Φ}, удовлетворяющее соотношению

$$X_{\Phi w} = (d\Phi)_w (X^{\Phi}_w),$$

т. е. Φ-связанное с полем X. При этом для любых двух полей $X, Y \in \mathfrak{a}(E)$ поля $[X, Y]$ и $[X^{\Phi}, Y^{\Phi}]$ также Φ-связаны, т. е. для них имеет место равенство

$$[X, Y]_{\Phi w} = (d\Phi)_w [X^{\Phi}, Y^{\Phi}]_w.$$

Таким образом, $[X, Y]_{\Phi w} \in \operatorname{Im}(d\Phi)_w = E_{\Phi w}$. В частности, $[X, Y]_{a_0} \in E_{a_0}$. Поскольку точка $a_0 \in M$ произвольна, это доказывает, что $[X, Y] \in \mathfrak{a}(E)$. Следовательно, подрасслоение E инволютивно. □

Доказательство обратного утверждения существенно деликатнее.

Определение 13. Подрасслоение E касательного расслоения $\mathsf{T}(M)$ называется *вполне интегрируемым*, если многообразие M обладает атласом, состоящим из таких карт $(U, x^1, \ldots, x^n)$, что для любой точки $a \in U$ первые m векторов $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$ базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a$ пространства $\mathsf{T}_a(M)$ составляют базис пространства E_a, т. е., иными словами, из таких, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ на U составляют базис $\mathcal{F}(U)$-модуля $\mathfrak{a}(E|_U)$.

Легко видеть, что *любое вполне интегрируемое подрасслоение интегрируемо.* Действительно, пусть $a_0 \in M$, и пусть $a_0 \in U$, где $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — некоторая карта из предусмотренного определением 13 атласа. Пусть, далее, $\mathcal{L}^m$ — плоскость $x^{m+1} = x^{m+1}(a_0), \ldots, x^n = x^n(a_0)$ пространства $\mathbb{R}^n$ и W — пересечение $\mathcal{L}^m \cap h(U)$ (содержащее, очевидно, точку $w_0 = h(a_0)$). Наконец, пусть Φ: $W \to M$ — ограничение на W обратного диффеоморфизма h^{-1}: $h(U) \to U$ (рассматриваемое как отображение в M). Дифференциал $(d\Phi)_w$ отображения Φ в произвольной точке $w \in W$ переводит стандартный базис пространства $\mathsf{T}_w(W) = \mathbb{R}^m$ в векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$, где $a = \Phi w$, и потому является мономорфизмом на пространство E_a.

Таким образом, отображение $\Phi\colon (W, w_0) \to (M, a_0)$ является отображением, интегральным по отношению к E. Поскольку точка $a_0 \in M$ произвольна, это и означает, что подрасслоение E интегрируемо. □

Более того, аналогичным образом показывается, что *любое вполне интегрируемое подрасслоение E обладает свойством, утверждаемым в лемме 2*, т. е. для любых двух интегральных по отношению к подрасслоению E отображений $\Phi\colon (W, w_0) \to (M, a_0)$ и $\Phi'\colon (W', w_0') \to (M, a_0)$ существуют в W и W' такие окрестности V и V' точек w_0 и w_0' и такой диффеоморфизм $\beta\colon V' \to V$, что $\Phi' = \Phi \circ \beta$ на V'. Действительно, без ограничения общности мы можем считать, что отображение Φ' является отображением, построенным выше по карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$, и что многообразие W является открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда для любой точки $w = (w^1, \ldots, w^m) \in W$ векторы $(d\Phi)_w\left(\frac{\partial}{\partial w^1}\right), \ldots, (d\Phi)_w\left(\frac{\partial}{\partial w^m}\right)$ будут составлять базис пространства E_a, $a = \Phi w$, и потому будут линейно выражаться через векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$. С другой стороны, если $x^1(w), \ldots, x^n(w)$ — функции, задающие отображение Φ, то

$$(d\Phi)_w\left(\frac{\partial}{\partial w^i}\right) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial w^i}\right)_w \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_a, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

по общему правилу, определяющему в координатах действие дифференциала гладкого отображения. Следовательно, $\frac{\partial x^j}{\partial w^i} = 0$ на W для любого $i = 1, \ldots, m$ и любого $j = m+1, \ldots, n$, и потому $x^j(w) = \text{const}$ (точнее, $x^j(w) = x^j(a_0)$) при $j = m+1, \ldots, n$. Это означает, что композиция $\beta = h \circ \Phi$ отображения Φ и координатного диффеоморфизма h представляет собой отображение $W \to W'$. Поскольку отображение β, очевидно, этально, точка w_0 обладает окрестностью V, на которой это отображение является диффеоморфизмом на некоторую окрестность V' точки w_0'. Для завершения доказательства остается заметить, что $\Phi = h^{-1} \circ (h \circ \Phi) = \Phi \circ \beta$ на V. □

В силу этих замечаний для доказательства леммы 2 и оставшейся части предложения 5 нам достаточно доказать следующее предложение:

Предложение 7. Любое инволютивное подрасслоение E касательного расслоения $\mathrm{T}(M)$ вполне интегрируемо.

Доказательство. Пусть a_0 — произвольная точка многообразия M, и пусть $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — некоторая карта многообразия M в этой точке. Выбрав, если нужно, меньшую окрестность, мы можем считать, что $\mathcal{F}(U)$-модуль $\mathfrak{a}(E|_U)$ свободен, т. е. обладает базисом из m векторных полей $X_1, \ldots, X_m$. Для упрощения формул можно, кроме того, считать, что $x^1(a_0) = 0, \ldots, x^n(a_0) = 0$.

Пусть сначала $m = 1$. Полагая $X = X_1$, рассмотрим компоненты $X^1 = Xx^1, \ldots, X^n = Xx^n$ векторного поля X в координатах $x^1, \ldots, x^n$. Поскольку $X \neq 0$ в U, без ограничения общности можем считать, что $X^n \neq 0$ в U (достаточно, если нужно, переименовать координаты и уменьшить U).

Как мы знаем, для любой точки $u \in U$ существует интегральная кривая φ_u: $I_u \to M$ поля X, определенная на некотором интервале I_u оси $\mathbb{R}$, содержащем точку 0, и такая, что $\varphi_u(0) = u$. Мы можем считать (опять, если нужно, уменьшив U), что интервал I_u не зависит от u (является одним и тем же интервалом I для всех u).

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ открытое множество $W \times I$, где W — множество всех точек $w = (w^1, \ldots, w^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, для которых $(w, 0) \in h(U)$, и отображение

$$\Phi\colon W \times I \to M$$

этого множества в многообразие M, определенное формулой

$$\Phi(w, t) = \varphi_u(t), \quad \text{где} \quad u = h^{-1}(w, 0).$$

В координатах $w^1, \ldots, w^{n-1}, w^n = t$ и $x^1, \ldots, x^n$ это отображение записывается такими функциями $x^1(w, t), \ldots, x^n(w, t)$, что

$$(6) \quad \frac{dx^i(w, t)}{dt} = X^i(x^1(w, t), \ldots, x^n(w, t)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

и

$$x^1(w, 0) = w^1, \ldots, x^{n-1}(w, 0) = w^{n-1}, \quad x^n(w, 0) = 0$$

тождественно по w. В частности, мы видим, что

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial w^j}\right)_{t=0} = \delta_j^i \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial x^n}{\partial t}\right)_{t=0} = 0.$$

Вместе с формулами (6) это означает, что в любой точке вида $(w, 0)$ и, в частности, в точке $(0, 0)$ матрица дифференциала отображения Φ в координатах $w^1, \ldots, w^{n-1}, w^n = t$ и $x^1, \ldots, x^n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & X^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & X^{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & X^n \end{pmatrix}$$

и потому (в силу условия $X^n \neq 0$) не вырождена. Следовательно, в точке $0 = (0, 0) \in W \times I$ отображение Φ этально, и потому без ограничения общности мы можем считать его диффеоморфизмом множества $W \times I$ на окрестность U. Обратный диффеоморфизм Φ^{-1} определяет на U координаты $w^1, \ldots, w^{n-1}, w^n$, обладающие, очевидно, тем свойством, что $\frac{\partial}{\partial w^n} = X$ на U.

Таким образом, в некоторой окрестности U точки a_0 существуют такие координаты $w^1, \ldots, w^n$, что поле $\frac{\partial}{\partial w^n}$ порождает подмодуль $\mathfrak{a}(E|_U)$. Поскольку точка a_0 была выбрана произвольно, это доказывает полную интегрируемость подрасслоения E.

Тем самым при $m = 1$ предложение 6 полностью доказано. (Заметим, что при $m = 1$ условие инволютивности автоматически выполнено.)

Пусть теперь $m > 1$. Рассуждая по индукции, предположим, что для подрасслоений, имеющих слои размерности $m - 1$, предложение 6 уже доказано и рассмотрим произвольное инволютивное подрасслоение E со слоями размерности m.

Лемма 3. На многообразии M существует такая карта $(U, x^1, \ldots, x^n)$ с $a_0 \in U$ и такой базис $X_1, \ldots, X_m$ модуля $\mathfrak{a}(E|_U)$, что

а) $X_m x^1 = \ldots = X_m x^{n-1} = 0$, $X_m x^n = 1$, *т. е.* $X_m = \frac{\partial}{\partial x^n}$;

б) $X_1x^n = \ldots = X_{m-1}x^n = 0$, *т. е. поля* $X_1, \ldots, X_{m-1}$ *выражаются лишь через поля* $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}$;

в) *при* $x^n = 0$ *функции* $X_1x^j, \ldots, X_{m-1}x^j$, $m \leqslant j \leqslant n$, *от* $x^1, \ldots, x^{n-1}$ *тождественно равны нулю.*

Доказательство. Пусть сначала $(U, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная карта (с $a_0 \in U$), для которой модуль $\mathfrak{a}(E|_U)$ свободен, и пусть $X_1, \ldots, X_m$ — произвольный базис модуля $\mathfrak{a}(E|_U)$. Векторное поле X_m порождает подрасслоение, для которого $m = 1$; применив к этому подрасслоению уже доказанную часть предложения 7, мы найдем карту (обозначим ее снова через $(U, x^1, \ldots, x^n)$, удовлетворяющую условию а).

Чтобы удовлетворить условию б), мы заменим поля $X_1, \ldots, X_{m-1}$ полями

$$X_1 - (X_1x^n)\, X_m, \ \ldots, \ X_{m-1} - (X_{m-1}x^n)\, X_m.$$

Ясно, что вместе с полем X_m они также составляют базис модуля $\mathfrak{a}(E|_U)$ и (обозначенные снова через $X_1, \ldots, X_{m-1}$) удовлетворяют условию б).

Удовлетворить условию в) значительно труднее.

Пусть $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — то же множество, что и в первой части доказательства ($w \in W$ тогда и только тогда, когда $(w, 0) \in h(U)$). Отождествив W с $W \times 0$, рассмотрим ограничение $\varphi\colon W \to U$ на W диффеоморфизма h^{-1}, обратного к координатному диффеоморфизму $h\colon U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n$. Для любой точки $w \in W$ дифференциал $(d\varphi)_w$ отображения φ является мономорфным отображением линеала $\mathsf{T}_w(W) = \mathbb{R}^{n-1}$ на подпространство линеала $\mathsf{T}_a(M)$, $a = \varphi(w)$, натянутое на векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right)_a$. Поэтому на W существуют однозначно определенные векторные поля

$$Y_1, \ldots, Y_{m-1},$$

φ-связанные с полями $X_1, \ldots, X_{m-1}$ (для которых мы предполагаем выполненными условия а) и б)). Обозначив для каждой точки $w \in W$ через $(\varphi^*E)_w$ линейную оболочку векторов $(Y_1)_w, \ldots, (Y_{m-1})_w$, мы получим над W подрасслоение φ^*E касательного расслоения $\mathsf{T}(W)$, обладающее тем свойством, что морфизм $\mathsf{T}(\varphi)$:

$\mathsf{T}(W) \to \mathsf{T}(M)$ векторных расслоений отображает его в подрасслоение E.

По построению векторные поля $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ составляют базис $\mathscr{F}(W)$-модуля $\mathfrak{a}(\varphi^* E)$. При этом, так как для любой точки $w \in W$

$$(d\varphi)_w [Y_i, Y_j]_w = [X_i, X_j]_{\varphi(w)} \in E_{\varphi(w)},$$

то $[Y_i, Y_j]_w \in (\varphi^* E)_w$ и, значит, $[Y_i, Y_j] \in \mathfrak{a}(\varphi^* E)$. Это означает, что подрасслоение $\varphi^* E$ инволютивно.

Следовательно, по предположению индукции на W существуют (после возможного уменьшения U, а потому и W) такие (криволинейные) координаты $w^1, \ldots, w^{n-1}$, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial w^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w^{n-1}}$ порождают подмодуль $\mathfrak{a}(\varphi^* F)$. Поскольку этим же свойством обладают поля $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$, отсюда следует, что поля $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ выражаются только через $\frac{\partial}{\partial w^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w^{m-1}}$, и потому их координаты $Y_1 w^j, \ldots, Y_{m-1} w^j$ в базисе $\frac{\partial}{\partial w^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w^{n-1}}$ при $m \leqslant j \leqslant n$ равны нулю.

Без ограничения общности мы можем считать, что $h(U) = W \times I$, где I — некоторый интервал оси $\mathbb{R}$, и потому, положив $h(u) = (w, x^n)$, можем любой точке $u \in U$ отнести в качестве ее локальных координат координаты $w^1, \ldots, w^{n-1}$ точки $w \in W$ и координату $x^n \in I$. Другими словами, мы вводим в U новые локальные координаты $y^1 = w^1, \ldots, y^{n-1} = w^{n-1}$, $y^n = x^n$, приняв за координатный диффеоморфизм $U \to h(U)$ диффеоморфизм, обратный к диффеоморфизму $(\varphi \circ k) \times \mathrm{id}$, где $k\colon W \to W'$ — диффеоморфизм, задающий в W локальные координаты $w^1, \ldots, w^{n-1}$. Координаты $y^1, \ldots, y^n$ обладают тем свойством, что $y^n = x^n$, а $y^1, \ldots, y^{n-1}$ не зависят от x^n, так что

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^n} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} = 0$$

и

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial y^n}{\partial x^{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial y^n}{\partial x^n} = 1.$$

Поэтому компоненты $Xy^1, \ldots, Xy^n$ произвольного векторного поля X относительно координат $y^1, \ldots, y^n$ вы-

ражаются через его компоненты $X^1 = Xx^1, \ldots, X^n = Xx^n$ относительно координат $x^1, \ldots, x^n$ по формулам

$$Xy^i = X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \begin{cases} X^1 \frac{\partial y^i}{\partial x^1} + \ldots + X^{n-1} \frac{\partial y^i}{\partial x^{n-1}}, & \text{если } i = 1, \ldots, n-1, \\ X^n, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

В частности, для поля $X = X_m$ (для которого по условию $X^1 = 0, \ldots, X^{n-1} = 0, X^n = 1$) мы получаем отсюда, что $X_m y^1 = 0, \ldots, X_m y^{n-1} = 0, X_m y^n = 1$, т. е. что $X_m = \frac{\partial}{\partial y^n}$. Для полей же $X_1, \ldots, X_{m-1}$ отсюда следует, что $X_1 y^n = \ldots = X_{m-1} y^n = 0$, т. е. что эти поля линейно выражаются лишь через поля $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$. Это означает, что в карте $(U, y^1, \ldots, y^n)$ условия а) и б) по-прежнему выполнены.

Кроме того, при $y^n = 0$, т. е. в точке вида $u = \varphi(w)$, $w \in W$, для значения $(X_i)_u$ векторного поля X_i, $i = 1, \ldots, n-1$, имеет место формула

$$(X_i)_u = (d\varphi)_w Y_i,$$

выражающая φ-связанность полей X_i и Y_i. Применительно к функциям $X_i y^j$ эта формула показывает, что значение

$$(X_i y^j)(u) = (X_i)_u x^j$$

функции $X_i y^j$ в точке $u \in U$ с $y^n(u) = 0$ равно значению в точке w функции $Y_i y^j$. Поскольку $Y_i y^j = 0$ при $m \leqslant j \leqslant n-1$, этим доказано, что $X_i y^j|_{y^n=0} = 0$ при $m \leqslant j \leqslant n-1$. Таким образом, для карты $(U, y^1, \ldots, y^n)$ выполнено и условие в) (с заменой $x^1, \ldots, x^n$ на $y^1, \ldots, y^n$). □

Из этой леммы предложение 7 вытекает уже без особого труда.

Пусть карта $(U, x^1, \ldots, x^n)$ и поля $X_1, \ldots, X_m$ удовлетворяют условиям леммы 3.

Рассмотрим скобку Ли $[X_m, X_i]$, $i = 1, \ldots, m-1$. В силу условия инволютивности это векторное поле

лежит в $\mathfrak{a}(E|_U)$, и поэтому на U существуют такие гладкие функции $c_i^1, \ldots, c_i^m$, что

$$[X_m, X_i] = c_i^1 X_1 + \ldots + c_i^m X_m, \qquad i = 1, \ldots, m-1,$$

и, значит,

$$[X_m, X_i] x^j = c_i^1 X_1 x^j + \ldots + c_i^m X_m x^j$$

для любого $j = 1, \ldots, n$. При этом, если $j \neq n$ (единственно интересный случай), то $X_m x^j = 0$. Поэтому можно считать, что в правой части последний член имеет вид $c_i^{m-1} X_{m-1} x^j$. С другой стороны, по определению скобки Ли

$$[X_m, X_i] x^j = X_m (X_i x^j) - X_i (X_m x^j) = \frac{\partial X_i x^j}{\partial x^m},$$

так как по условию $X_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$. Это означает, что для любого $j = 1, \ldots, n-1$ (а также, очевидно, и при $j = n$) функции

$$z_1 = X_1 x^j, \ \ldots, \ z_{m-1} = X_{m-1} x^j$$

как функции от $t = x^n$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt} = c_i^1 z_1 + \ldots + c_i^{m-1} z_{m-1}, \qquad i = 1, \ldots, m-1.$$

Но, согласно условию в) леммы 3, при $t = 0$ функции $z_1, \ldots, z_{m-1}$ равны нулю. Поэтому они равны нулю и при любом t.

Этим доказано, что на U поля $X_1, \ldots, X_{m-1}$ выражаются через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}$, а значит, поля $X_1, \ldots, X_m$ — через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Поэтому последние поля составляют базис модуля $\mathfrak{a}(E|_U)$.

Для завершения шага индукции осталось переименовать координаты x^n и x^m.

Тем самым предложение 6, а вместе с ним и предложение 5 с леммой 2 полностью доказаны. □

Следствие. *Подрасслоение касательного расслоения тогда и только тогда интегрируемо, когда оно вполне интегрируемо.* □