

## *Лекция 8*

НАКРЫТИЯ. — СЕЧЕНИЯ НАКРЫТИЙ. — ПУНКТИРОВАННЫЕ НАКРЫТИЯ. — КОАМАЛЬГАМЫ. — ОДНОСВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. — МОРФИЗМЫ НАКРЫТИЙ. — ОТНОШЕНИЕ КВАЗИПОРЯДКА В КАТЕГОРИИ ПУНКТИРОВАННЫХ НАКРЫТИЙ. — СУЩЕСТВОВАНИЕ ОДНОСВЯЗНЫХ НАКРЫТИЙ. — ВОПРОСЫ ОБОСНОВАНИЯ. — ФУНКТОРИАЛЬНОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНОГО НАКРЫТИЯ.

Мы переходим теперь к изучению функтора локализации  $\text{GR}_0\text{-DIFF} \rightarrow \text{GR-LOC}$ . Исследование этого функтора основывается на совершенно ином круге идей и методов, связанных в основном с так называемыми «накрывающими пространствами». Общепринятое построение теории накрывающих пространств, опирающееся на понятие «гомотопных путей», неоднократно излагалось в учебной и монографической литературе, как независимо от ее применений к теории групп Ли (см., например, [12], гл. 5), так и в связи с этой теорией (см., например, [7], гл. 9). Мы изложим другое, более элементарное построение этой теории, впервые в несколько ином варианте предложенное Шевалле и не опирающееся ни на что, кроме некоторых простейших общетопологических конструкций. Затем мы применим полученные результаты к исследованию функтора локализации.

**Определение 1.** Пусть  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  — непрерывное надъективное отображение топологического пространства  $\tilde{X}$  на топологическое пространство  $X$ , и пусть  $U \subset X$  — открытое подмножество пространства  $X$ . Говорят, что  $U$

ровно накрыто отображением  $\pi$ , если прообраз  $\pi^{-1}(U)$  множества  $U$  при отображении  $\pi$  является объединением непересекающихся открытых множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается посредством  $\pi$  на  $U$ . Отображение  $\pi$  называется *накрытием* пространства  $X$ , если пространства  $X$ ,  $\tilde{X}$  связаны и любая точка пространства  $X$  обладает окрестностью, ровно накрытой отображением  $\pi$ . Пространство  $\tilde{X}$  называется в этом случае *накрывающим пространством*.

Иногда приходится рассматривать надъективные отображения  $\pi$ :  $\tilde{X} \rightarrow X$ , для которых пространство  $X$  связано и любая его точка обладает окрестностью, ровно накрытой отображением  $\pi$ , но пространство  $\tilde{X}$ , вообще говоря, не связано. Такие отображения мы будем называть *слабыми накрытиями*.

Если  $U$  ровно накрыто отображением  $\pi$ , то и любое открытое множество  $V \subset U$  ровно накрыто отображением  $\pi$ . Поэтому для любого (вообще говоря, слабого) накрытия  $\pi$ :  $\tilde{X} \rightarrow X$  ровно накрытые открытые множества  $U \subset X$  составляют базу пространства  $X$ .

Поскольку каждая точка  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  принадлежит прообразу некоторой точки  $x \in X$ , открытые множества  $U \subset \tilde{X}$ , которые  $\pi$  гомеоморфно отображает на открытые множества  $U \subset X$ , составляют базу пространства  $\tilde{X}$ , т. е. любое открытое множество пространства  $\tilde{X}$  является объединением таких множеств.

Непрерывное отображение  $\pi$ :  $\tilde{X} \rightarrow X$ , обладающее последним свойством, называется *локальным гомеоморфизмом*. Таким образом, любое (слабое) накрытие является локальным гомеоморфизмом.

Заметим, что обратное неверно. Локальным гомеоморфизмом, не являющимся накрытием, будет, например, ограничение произвольного накрытия  $\pi$ :  $\tilde{X} \rightarrow X$  на подпространстве  $\tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_0\}$ , где  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  — произвольная точка (даже если это ограничение надъективно, а подпространство  $\tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_0\}$  связано).

Каждый локальный гомеоморфизм является, очевидно, открытым отображением (т. е. переводит открытые множества в открытые). Поэтому любое (слабое) накрытие является открытым отображением.

Вообще говоря, представление прообраза ровно накрытого множества  $U \subset X$  в виде объединения непере-

секающихся открытых множеств  $U_\alpha$ , каждое из которых гомеоморфно отображается на  $U$ , отнюдь не единственно. Однако это представление единствено, если  $U$  связно, поскольку в этом случае множества  $U_\alpha$  могут быть охарактеризованы как компоненты связности множества  $\pi^{-1}(U)$  (каждое из них, будучи гомеоморфным  $U$ , связно, и они являются открытыми и непересекающимися множествами).

Многие важные топологические свойства пространства  $X$  наследуются любым накрывающим пространством  $\tilde{X}$ . Например, из того, что накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  является локальным гомеоморфизмом, немедленно вытекает, что пространство  $\tilde{X}$  локально связно, если локально связно пространство  $X$ .

Аналогично легко видеть, что если пространство  $X$  хаусдорфово, то и каждое его накрывающее пространство  $\tilde{X}$  хаусдорфово. Действительно, пусть  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  — различные точки пространства  $\tilde{X}$ . Если  $\pi(\tilde{x}_1) = \pi(\tilde{x}_2)$ , то по условию точки  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  принадлежат двум непересекающимся открытым множествам. Если же  $\pi(\tilde{x}_1) \neq \pi(\tilde{x}_2)$ , то в силу хаусдорфовости пространства  $X$  точки  $\pi(\tilde{x}_1)$  и  $\pi(\tilde{x}_2)$  обладают непересекающимися окрестностями  $U_1$  и  $U_2$ . Прообразы  $\pi^{-1}(U_1)$  и  $\pi^{-1}(U_2)$  этих окрестностей и будут непересекающимися открытыми множествами, содержащими точки  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$ .  $\square$

Пусть  $U \subset X$  — открытое множество, ровно накрытое отображением  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ . Рассмотрим непересекающиеся открытые множества  $U_\alpha \subset \tilde{X}$ , на которых отображение  $\pi$  гомеоморфно и объединением которых является множество  $\pi^{-1}(U)$ . По определению для любого  $\alpha$  гомеоморфизм  $\sigma_\alpha: U \rightarrow U_\alpha$ , обратный к гомеоморфизму  $\pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ , будет сечением отображения  $\pi$  над  $U$  (точнее, сечением будет его композиция с отображением вложения  $U_\alpha \rightarrow \tilde{X}$ ).

С другой стороны, как мы знаем, если  $U$  связно, то множества  $U_\alpha$  однозначно определены, причем для задания любого из них достаточно указать в нем некоторую точку (ибо эти множества являются компонентами множества  $\pi^{-1}(U)$ ). Поэтому однозначно определены и сечения  $\sigma_\alpha$ . Это означает, что если мы выберем в  $U$

произвольную точку  $x_0$ , то для любой точки  $\tilde{x}_\alpha \in \pi^{-1}(x_0)$  будет существовать над  $U$  единственное сечение  $\sigma_\alpha: U \rightarrow \tilde{X}$  отображения  $\pi$ , для которого  $\sigma(\tilde{x}_\alpha) = x_0$ .

Обратно, пусть  $U$  — связное подмножество пространства  $\tilde{X}$ , обладающее тем свойством, что для любой точки  $x_0 \in U$  и любой точки  $\tilde{x}_\alpha \in \pi^{-1}(x_0)$  существует единственное сечение  $\sigma_\alpha: U \rightarrow \tilde{X}$  отображения  $\pi$  над  $U$ , для которого  $\sigma_\alpha(x_0) = \tilde{x}_\alpha$ . Рассмотрим произвольную точку  $\tilde{x}$  множества  $\pi^{-1}(U)$ . Пусть  $x = \pi(\tilde{x})$ . По условию существует единственное сечение  $\sigma: U \rightarrow \tilde{X}$  отображения  $\pi$  над  $U$ , для которого  $\sigma(x) = \tilde{x}$ . Пусть  $\sigma(x_0) = \tilde{x}_\alpha$ . Тогда в силу единственности сечения  $\sigma_\alpha$  имеет место равенство  $\sigma = \sigma_\alpha$ , показывающее, в частности, что  $\tilde{x} \in \sigma_\alpha(U)$ . Следовательно, множество  $\pi^{-1}(U)$  является объединением множеств  $\sigma_\alpha(U)$ . Если  $\tilde{x} \in \sigma_{a_1}(U) \cap \sigma_{a_2}(U)$ , то  $\tilde{x}_{a_1} = \sigma_{a_1}(x_0) = \sigma(x_0) = \sigma_{a_2}(x_0) = \tilde{x}_{a_2}$ , и потому  $\sigma_{a_1} = \sigma_{a_2}$ . Следовательно, различные множества  $\sigma_\alpha(U)$  не пересекаются. Поскольку множества  $\sigma_\alpha(U)$  связны (будучи гомеоморфными связному множеству  $U$ ), тем самым доказано, что они представляют собой компоненты множества  $\pi^{-1}(U)$ . Если пространство  $\tilde{X}$  локально связно, то эти компоненты должны быть открыты. Таким образом, при сделанных предположениях множество  $\pi^{-1}(U)$  разлагается в объединение непересекающихся открытых множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается на  $U$ . Другими словами, множество  $U$  ровно накрыто отображением  $\pi$ .

Тем самым нами доказано следующее предложение:

**Предложение 1.** *Если пространство  $\tilde{X}$  локально связно, то связное открытое множество  $U \subset X$  тогда и только тогда ровно накрыто отображением  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ , когда для любой точки  $x_0 \in U$  и любой точки  $\tilde{x}_\alpha \in \pi^{-1}(x_0)$  существует единственное сечение  $\sigma_\alpha$  отображения  $\pi$  над  $U$ , для которого  $\sigma_\alpha(x_0) = \tilde{x}_\alpha$ .  $\square$*

**Следствие.** *Пусть  $U$  и  $V$  — связные открытые множества пространства  $X$ , ровно накрыты отображением  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ . Если:*

- пространство  $\tilde{X}$  локально связно,*
- пересечение  $U \cap V$  связно, то множество  $U \cup V$  также ровно накрыто отображением  $\pi$ .*

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in U \cup V$  и  $\tilde{x}_\alpha \in \pi^{-1}(x_0)$ . Достаточно доказать, что существует такое

сечение  $\sigma_\alpha: U \cup V \rightarrow \tilde{X}$  отображения  $\pi$  над  $U \cup V$ , что  $\sigma_\alpha(x_0) = \tilde{x}_\alpha$ , и что это сечение единствено. При этом без ограничения общности мы можем, очевидно, предполагать, что  $x_0 \in U$ .

По условию над  $U$  существует такое сечение  $\sigma'_a: U \rightarrow \tilde{X}$  отображения  $\pi$ , что  $\sigma'_a(x_0) = \tilde{x}_\alpha$ , и это сечение единствено. Выбрав в  $U \cap V$  произвольную точку  $y_0$ , рассмотрим точку  $\tilde{y}_0 = \sigma'_a(y_0) \in \tilde{X}$ . Так как  $y_0 \in V$ , то над  $V$  существует единственное сечение  $\sigma''_a: V \rightarrow \tilde{X}$  отображения  $\pi$ , для которого  $\sigma''_a(y_0) = \tilde{y}_0$ . Ограничения на  $U \cap V$  сечений  $\sigma'_a$  и  $\sigma''_a$  являются сечениями над  $U \cap V$ , переводящими точку  $y_0$  в точку  $\tilde{y}_0$ . Поскольку  $U \cap V$  связано, отсюда следует, что  $\sigma'_a = \sigma''_a$  на  $U \cap V$ . Поэтому сечения  $\sigma'_a$  и  $\sigma''_a$  определяют на  $U \cup V$  непрерывное отображение  $\sigma_\alpha: U \cup V \rightarrow \tilde{X}$ , являющееся, очевидно, сечением, для которого  $\sigma_\alpha(x_0) = \tilde{x}_\alpha$ .

Тем самым существование сечения  $\sigma_\alpha$  установлено. Его единственность теперь очевидна.  $\square$

*Предложение 1.* (вместе со следствием) применимо, в частности, к любому накрытию  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  произвольного локально связного (и связного) пространства  $X$ .

В условиях предложения 1 образ  $\sigma_\alpha(U)$  множества  $U$  при каждом из отображений  $\sigma_\alpha$  является открытым подмножеством пространства  $\tilde{X}$ . Как показывает следующее предложение, этот факт имеет, на самом деле, весьма общий характер:

*Предложение 2.* Если пространство  $X$  локально связно, то для произвольного накрытия  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  каждое его сечение  $\sigma: V \rightarrow \tilde{X}$  над любым открытым множеством  $V \subset X$  является открытым отображением.

В частности, множество  $\sigma(V)$  открыто в  $\tilde{X}$  и  $\sigma$  является гомеоморфизмом множества  $V$  на множество  $\sigma(V)$  (с обратным гомеоморфизмом  $\pi|_{\sigma(V)}$ ).

*Доказательство.* Поскольку над каждым открытым множеством, содержащимся в  $V$ , отображение  $\sigma$  также является сечением, достаточно доказать, что множество  $\sigma(V)$  открыто в  $\tilde{X}$ .

Пусть  $\tilde{x} \in \sigma(V)$ , и пусть  $x \in V$  — такая точка, что  $\sigma(x) = \tilde{x}$ . Пусть, далее,  $U$  — содержащаяся в  $V$  связная окрестность точки  $x$ , ровно накрытая отображением  $\pi$ , а  $\tilde{U}$  — компонента ее прообраза  $\pi^{-1}(U)$ , содержащая

точку  $\tilde{x}$ . Образ  $\sigma(U)$  окрестности  $U$  при отображении  $\sigma$  является связным множеством, содержащим точку  $\tilde{x}$ . Следовательно,  $\sigma(U) \subset \tilde{U}$ , и потому определено отображение  $(\pi|_{\tilde{U}}) \circ \sigma = \text{id}$ . Но по условию отображение  $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$  гомеоморфно. Пусть  $\sigma': U \rightarrow \tilde{U}$  — обратный гомеоморфизм. Тогда  $\sigma' \circ (\pi|_{\tilde{U}}) = \text{id}$  и, следовательно,

$$\sigma' = \sigma' \circ (\pi|_{\tilde{U}} \circ \sigma) = (\sigma' \circ \pi|_{\tilde{U}}) \circ \sigma = \sigma.$$

В частности,  $\sigma(U) = \sigma'(U) = \tilde{U}$ . Это означает, что окрестность  $\tilde{U}$  точки  $\tilde{x} \in \sigma(V)$  целиком содержится в  $\sigma(V)$ , так что  $\tilde{x}$  является внутренней точкой множества  $\sigma(V)$ . Следовательно, множество  $\sigma(V)$  открыто.  $\square$

Требуемая в предложении 1 единственность сечений  $\sigma_a$  на самом деле может быть доказана (в единственном интересном нам случае, когда  $\pi$  является накрытием хаусдорфова пространства). Впрочем, нам будет удобно доказать эту единственность в несколько более общей ситуации, для описания которой мы введем следующее определение:

*Определение 2.* Пусть  $f: Y \rightarrow X$  и  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  — два морфизма произвольной категории  $\mathbf{C}$ . Морфизм  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  категории  $\mathbf{C}$  называется поднятием морфизма  $f$  (по отношению к морфизму  $\pi$ ), если  $\tilde{f} = \pi \circ f$ , т. е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ f \swarrow & \downarrow \pi & \searrow \\ Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \end{array}$$

Сечения представляют собой не что иное, как поднятия тождественного морфизма  $X \rightarrow X$ , а сечения над  $U \subset X$  (в случае, когда категория  $\mathbf{C}$  является категорией ТОР топологических пространств) — поднятие отображения вложения  $U \rightarrow X$ .

*Предложение 3.* Если  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  — накрытие хаусдорфова пространства  $X$ , то для произвольного непрерывного отображения  $f: Y \rightarrow X$  связного пространства  $Y$  в пространство  $X$  любые две его поднятия  $\tilde{f}, \tilde{f}' : Y \rightarrow \tilde{X}$ , совпадающие хотя бы в одной точке  $y_0 \in Y$ , совпадают всюду.

**Доказательство.** Пусть  $Y'$  — множество всех точек  $y \in Y$ , для которых  $\tilde{f}y = \tilde{f}'y$ . Множество  $Y'$  не пусто (содержит точку  $y_0$ ) и замкнуто (ибо пространство  $X$  хаусдорфово; см. с. 167). Поскольку пространство  $Y$  по условию связно, для доказательства предложения 3 достаточно поэтому установить, что множество  $Y'$  также и открыто.

Пусть  $y \in Y'$ , и пусть  $U$  — окрестность точки  $f(y) \in X$ , ровно накрытая отображением  $\pi$ . Тогда точка  $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$  обладает в  $\tilde{X}$  окрестностью  $\tilde{U}$ , на которой  $\pi$  является гомеоморфизмом  $\tilde{U} \rightarrow U$ . Поскольку отображения  $\tilde{f}$  и  $\tilde{f}'$  непрерывны, точка  $y$  обладает в  $Y$  такой окрестностью  $V$ , что  $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$  и  $\tilde{f}'(V) \subset \tilde{U}$ . Так как на  $\tilde{U}$  отображение  $\pi$  гомеоморфно и так как  $\pi \circ \tilde{f} = \pi \circ \tilde{f}'$ , то  $\tilde{f} = \tilde{f}'$  на  $V$ , т. е.  $V \subset Y'$ . Следовательно, множество  $Y'$  открыто.  $\square$

Здесь нам удобно ввести одно общетопологическое определение.

**Определение 3.** Топологическое пространство  $X$  называется *пунктированным*, если в нем отмечена некоторая точка  $x_0$ . Отображением  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  пунктированного пространства  $(X, x_0)$  в пунктированное пространство  $(Y, y_0)$  называется непрерывное отображение  $X \rightarrow Y$ , переводящее точку  $x_0$  в точку  $y_0$ .

Ясно, что пунктированные пространства и их отображения составляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом  $\text{TOP}^*$ .

*Пунктированным накрытием* называется отображение  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  категории  $\text{TOP}^*$ , являющееся накрытием как отображение  $\tilde{X} \rightarrow X$  категории  $\text{TOP}$ .

В этой терминологии предложение 3 утверждает, что *произвольное отображение  $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  связного пунктированного пространства  $(Y, y_0)$  в хаусдорфово пунктированное пространство  $(X, x_0)$  допускает по отношению к пунктированному накрытию  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  не более одного поднятия  $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ .*

В дальнейшем для упрощения обозначений мы будем вместо  $(X, x_0)$ ,  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  и т. п. писать просто  $X$ ,  $\tilde{X}$  и т. п., явно указывая отмеченные точки только тогда, когда без этого нельзя обойтись.

Пусть снова  $f: Y \rightarrow X$  и  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  — морфизмы произвольной категории  $C$ , и пусть эти морфизмы включены в коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} Y_f & \xrightarrow{f^*} & \tilde{X} \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi^* \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Эта диаграмма называется *универсальным квадратом*, а морфизм  $\pi_f: Y_f \rightarrow Y$  (или объект  $Y_f$ ) — *коамальгамой* морфизмов  $f$  и  $\pi$  (или объектов  $Y$  и  $\tilde{X}$  над объектом  $X$ ), если для любого объекта  $Z$  и любых морфизмов  $g_1: Z \rightarrow Y$  и  $g_2: Z \rightarrow \tilde{X}$ , удовлетворяющих соотношению

$$(1) \quad f \circ g_1 = \pi \circ g_2,$$

существует единственный морфизм  $g: Z \rightarrow Y_f$ , для которого

$$2) \quad \pi_f \circ g = g_1, \quad f^* \circ g = g_2,$$

т. е., другими словами, если любая коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccc} Y_f & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X} & \xleftarrow{\quad} & \\ \downarrow & & \swarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & X \end{array}$$

единственным образом дополняется до коммутативной диаграммы вида

$$\begin{array}{ccccc} Y_f & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X} & \xleftarrow{\quad} & \\ \downarrow & \nearrow & \nearrow & \searrow & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & X \end{array}$$

Любые две коамальгамы  $Y_f$  и  $Y'_f$  данных морфизмов  $f$  и  $\pi$  естественным образом изоморфны: существует один и только один изоморфизм  $Y_f \rightarrow Y'_f$ , замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y_f & \xrightarrow{\quad} & Y'_f \\ \pi_f \searrow & & \swarrow \pi'_f \\ & Y & \end{array}$$

Основное свойство коамальгамы  $\pi_f: Y_f \rightarrow Y$  состоит в том, что ее сечения  $g: Y \rightarrow Y_f$  находятся в естественном биективном соответствии с поднятиями  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  морфизма  $f$ . Действительно, каждое сечение  $g$  задает поднятие  $f^* \circ g$  и для каждого поднятия  $\tilde{f}$  морфизмы  $g_1 = \text{id}$ ,  $g_2 = \tilde{f}$  удовлетворяют (при  $Z = Y$ ) условиям (1) и потому определяют морфизм  $g: Y \rightarrow Y_f$ , являющийся (в силу первого из соотношений (2)) сечением морфизма  $\pi_f$ .  $\square$

В этом смысле поднятие сводятся к своему частному случаю — сечениям.

Конечно, это сведение предполагает существование коамальгамы  $\pi_f$ . Оказывается, что в интересующем нас случае категорий ТОР (или ТОР') коамальгама  $\pi_f: Y_f \rightarrow Y$  существует для любых непрерывных отображений  $f: Y \rightarrow X$  и  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ . Соответствующим пространством  $Y_f$  является при этом подпространство прямого произведения  $Y \times \tilde{X}$ , состоящее из таких точек  $(y, \tilde{x})$ , что  $f(y) = \pi(\tilde{x})$ , а отображения  $\pi_f$  и  $f^*$  представляют собой ограничения проекций этого произведения на его сомножители. Тот факт, что это действительно дает коамальгаму, проверяется непосредственно: если  $f \circ g_1 = \pi \circ g_2$ , то отображение  $g = g_1 \times g_2: Z \rightarrow Y \times \tilde{X}$  является отображением в  $Y_f$  и удовлетворяет соотношениям  $\pi_f \circ g = g_1$  и  $f^* \circ g = g_2$ ; с другой стороны, поскольку  $\pi_f$  и  $f^*$  являются проекциями, то эти соотношения однозначно характеризуют отображение  $g$ .  $\square$

**Лемма 1.** Если отображение  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  является (слабым) накрытием, то для любого отображения  $f: Y \rightarrow X$  коамальгама

$$\pi_f: Y_f \rightarrow Y$$

будет слабым накрытием.

**Доказательство.** Отображение  $\pi_f$  надъективно, поскольку для любой точки  $y \in Y$  существует такая точка  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , что  $\pi(\tilde{x}) = f(y)$ . Пусть  $U$  — произвольное открытое подмножество пространства  $X$ , ровно накрытое отображением  $\pi$ , и пусть  $V = f^{-1}(U)$  — прообраз множества  $U$  при отображении  $f$ . Ясно, что

$$\pi_f^{-1}(V) = Y_f \cap (V \times \pi^{-1}(U)).$$

Поэтому, если

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} \tilde{U}_{\alpha},$$

где  $\tilde{U}_{\alpha}$  — открытые непересекающиеся подмножества пространства  $\tilde{X}$ , гомеоморфно отображающиеся на  $U$ , то

$$\pi_f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha},$$

где

$$V_{\alpha} = Y_f \cap (V \times \tilde{U}_{\alpha}).$$

Множества  $V_{\alpha}$  открыты, не пересекаются и гомеоморфно отображаются посредством  $\pi_f$  на  $V$ . Следовательно, множество  $V$  ровно накрыто отображением  $\pi_f$ . Для завершения доказательства остается заметить, что множества вида  $V$  покрывают все  $Y$ .  $\square$

Таким образом, если мы хотим получить накрытие, то нам достаточно перейти от пространства  $Y_f$  к некоторой его компоненте. То, что мы при этом действительно получаем накрытие, показывает следующая общая лемма:

**Лемма 2.** *Если пространство  $X$  связно и локально связно, то для любого слабого накрытия  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  и любой компоненты  $\tilde{X}_0$  пространства  $\tilde{X}$  отображение*

$$\pi_0 = \pi|_{\tilde{X}_0}: \tilde{X}_0 \rightarrow X$$

*является накрытием.*

**Доказательство.** Пусть  $U$  — связное открытое подмножество пространства  $X$ , ровно накрытое отображением  $\pi$ . Тогда из компонент множества  $\pi^{-1}(U)$ , которые пересекают  $\tilde{X}_0$ , необходимо лежат в  $\tilde{X}_0$  (в силу связности). Поэтому, если  $\pi_0(\tilde{X}_0) \cap U \neq \emptyset$ , то  $U \subset \pi_0(\tilde{X}_0)$ . Поскольку множества вида  $U$  образуют базу простран-

ства  $X$ , это показывает, что непустое множество  $\pi(X_0)$  одновременно открыто и замкнуто. Следовательно, оно исчерпывает все  $\tilde{X}$ , так что отображение  $\pi_0$  надъективно. Поскольку  $\pi_0^{-1}(U)$  является объединением компонент множества  $\pi^{-1}(U)$ , лежащих в  $\tilde{X}_0$ , отображение  $\pi_0$  ровно накрывает множество  $U$ . Следовательно,  $\pi_0$  является накрытием.  $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании поднятий (и сечений). Здесь мы должны начать довольно издалека.

Ясно, что любой гомеоморфизм  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  является накрытием.

**Определение 4.** Накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ , являющееся гомеоморфизмом пространства  $\tilde{X}$  на пространство  $X$ , называется *тривиальным*.

**Предложение 4.** Накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  локально связного (и связного) пространства  $X$  тогда и только тогда тривиально, когда оно обладает сечением  $\sigma: X \rightarrow \tilde{X}$  над всем пространством  $X$ .

**Доказательство.** Если накрытие  $\pi$  тривиально, то сечением  $\sigma$  будет обратный гомеоморфизм  $X \rightarrow \tilde{X}$  (безотносительно к тому, локально связно или нет пространство  $X$ ).

Обратно, пусть накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  обладает сечением  $\sigma: X \rightarrow \tilde{X}$ . Согласно предложению 2 это сечение является гомеоморфизмом пространства  $X$  на открытое подмножество  $\sigma(X)$  пространства  $\tilde{X}$  с обратным гомеоморфизмом  $\pi|_{\sigma(X)}: \sigma(X) \rightarrow X$ . Поэтому для доказательства предложения 4 достаточно доказать, что  $\sigma(X) = \tilde{X}$ . Поскольку пространство  $\tilde{X}$  связно, а множество  $\sigma(X)$  открыто и не пусто, это будет доказано, если мы покажем, что множество  $\sigma(X)$  замкнуто в  $\tilde{X}$ .

Пусть  $\tilde{x}$  — произвольная точка замыкания  $\overline{\sigma(X)}$  множества  $\sigma(X)$ , и пусть  $U$  — окрестность точки  $x = \pi(\tilde{x})$ , ровно накрытая отображением  $\pi$ . Рассмотрим открытое множество  $U$ , содержащее точку  $\tilde{x}$  и гомеоморфно отображающееся на окрестность  $U$ . Так как  $\tilde{x} \in \overline{\sigma(X)}$ , то пересечение  $U \cap \sigma(X)$  не пусто. Пусть  $\tilde{y} \in U \cap \sigma(X)$ . Так как отображение  $\pi|_{\sigma(X)}: \sigma(X) \rightarrow X$  является гомеоморфизмом, то в  $\sigma(X)$  существует открытое множество  $U'$ ,

гомеоморфно отображающееся на  $U$  и содержащее точку  $\tilde{y}$ . Поскольку  $U$  ровно накрыто, множества  $U$  и  $U'$  либо совпадают, либо не пересекаются. Но они имеют общую точку  $\tilde{y}$ . Следовательно,  $U' = U$ , и потому  $\tilde{x} \in \tilde{U} = U' \subset \sigma(X)$ . Таким образом, множество  $\sigma(X)$  замкнуто.  $\square$

**Определение 5.** Связное пространство  $X$  называется *односвязным*, если любое его накрытие три-вально.

Значение односвязных пространств для задачи о существовании поднятий определяется следующей теоремой:

**Теорема 1.** Пусть  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  — пунктированное накрытие пунктированного хаусдорфова пространства  $(X, x_0)$ , и пусть  $(Y, y_0)$  — связное, локально связное и односвязное пунктированное пространство. Тогда для любого отображения  $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  существует единственное поднятие  $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ .

**Доказательство.** По определению  $(y_0, \tilde{x}_0) \in Y_f$ . Пусть  $(Y_f)_0$  — компонента пространства  $Y_f$ , содержащая точку  $(y_0, \tilde{x}_0)$ . Согласно лемме 2 отображение  $(\pi_f)_0 = \pi_f|_{(Y_f)_0}: (Y_f)_0 \rightarrow Y$  является накрытием. Следовательно, в силу односвязности пространства  $Y$  это отображение представляет собой гомеоморфизм. Если  $(\pi_f)_0^{-1}: Y \rightarrow (Y_f)_0$  — обратный гомеоморфизм, то отображение

$$\tilde{f} = f^* \circ (\pi_f)_0^{-1}: Y \rightarrow \tilde{X}$$

будет поднятием отображения  $f$ , удовлетворяющим соотношению  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ . Единственность поднятия  $\tilde{f}$  обеспечивается предложением 3.  $\square$

**Следствие 1.** Произвольное накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  связного, локально связного и хаусдорфова пространства  $X$  ровно накрывает каждое открытые односвязные подмножество  $U \subset X$ .

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться предложением 1.  $\square$

**Следствие 2.** Связное и локально связное хаусдорфово пространство  $X$  односвязно, если оно является объединением двух связных и односвязных открытых множеств  $U$  и  $V$ , пересечение  $U \cap V$  которых связно.

**Доказательство.** Согласно следствию 1 каждое накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  ровно накрывает как  $U$ , так и  $V$ . Поэтому (следствие 1 предложения 1) оно ровно накрывает  $X = U \cup V$  и потому тривиально.  $\square$

**Определение 6.** Морфизмом накрытия  $\pi_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  в накрытие  $\pi_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  называется такое непрерывное отображение  $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ , что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

Ясно, что все накрытия (данного связного пространства  $X$ ) и все их морфизмы составляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом  $\text{COV}(X)$ .

Аналогично определяется категория *пунктирных накрытий*  $\text{COV}(X, x_0)$ , морфизмами которой являются морфизмы категорий  $\text{COV}(X)$ , являющиеся одновременно отображениями пунктирных пространств.

Категорию  $\text{COV}(X, x_0)$  мы будем обозначать также символом  $\text{COV}^*(X)$ .

Ясно, что морфизм  $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  категории  $\text{COV}(X)$  (или категории  $\text{COV}(X, x_0)$ ) тогда и только тогда является изоморфизмом (обладает обратным морфизмом), когда он представляет собой гомеоморфизм пространства  $\tilde{X}_1$  на пространство  $\tilde{X}_2$ .

Накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  тогда и только тогда тривиально (в смысле определения 4), когда оно изоморфно в категории  $\text{COV}(X)$  тождественному накрытию  $\text{id}: X \rightarrow X$ .

**Лемма 3.** Если связное пространство  $X$  локально связно, то любой морфизм  $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  категории  $\text{COV}(X)$  (или категории  $\text{COV}(X, x_0)$ ) сам является накрытием (пространства  $\tilde{X}_2$ ).

**Доказательство.** Пусть  $\{U_\alpha\}$  — база пространства  $X$ , состоящая из связных открытых множеств, ровно накрытых отображениями  $\pi_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  и  $\pi_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  одновременно, и пусть  $\tilde{U}_{\alpha, \beta}^{(1)}$  — компоненты прообраза  $\pi_1^{-1}(U_\alpha)$  множества  $U_\alpha$  при отображении  $\pi_1$ , а  $\tilde{U}_{\alpha, \gamma}^{(2)}$  —

компоненты прособраза  $\pi_2^{-1}(U_\alpha)$  множества  $U_\alpha$  при отображении  $\pi_2$ . Так как  $\pi_1 = \pi_2 \circ f$ , то каждое из множеств  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(1)}$  гомеоморфно отображается посредством  $f$  на некоторое множество  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(2)}$ . Поэтому, если для некоторых  $\alpha$  и  $\gamma$  множество  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(2)}$  пересекает подпространство  $f(\tilde{X}_1)$ , то оно обязательно содержится в нем:  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(2)} \subset f(\tilde{X}_1)$ . Поскольку множества вида  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(2)}$  составляют базу пространства  $X_2$ , это возможно только тогда, когда подпространство  $f(\tilde{X}_1)$  одновременно замкнуто и открыто. Следовательно,  $f(\tilde{X}_1) = \tilde{X}_2$ , так что отображение  $f$  надъективно.

Кроме того, мы видим, что для любого множества  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(2)}$  его прообраз  $f^{-1}(\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(2)})$  при отображении  $f$  является объединением некоторых (на самом деле всех) множеств вида  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(1)}$ , причем на каждом из этих множеств отображение  $f$  является гомеоморфизмом. Таким образом, каждое из множеств  $\tilde{U}_{\alpha,\gamma}^{(2)}$  ровно накрыто отображением  $f$ . Следовательно,  $f$  является накрытием.  $\square$

Каждый морфизм  $f$  накрытия  $\pi_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  в накрытие  $\pi_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$  является не чем иным, как поднятием отображения  $\pi_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  по отношению к отображению  $\pi_2$ . Поэтому ввиду предложения 3, если пространство  $X$  хаусдорфово, то для любых двух пунктированных накрытий  $\pi_1: (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$  и  $\pi_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$  в категории  $\text{COV}(X, x_0)$  существует не более одного морфизма накрытия  $\pi_1$  в накрытие  $\pi_2$ .

В частности, для каждого накрытия  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  существует только один морфизм  $\pi \rightarrow \pi$  — тождественный.

Будем писать  $\pi_1 \geqslant \pi_2$ , если морфизм  $\pi_1 \rightarrow \pi_2$  существует. Ясно, что это отношение на множестве всех пунктированных накрытий пространства  $(X, x_0)$  рефлексивно и транзитивно, т. е. является отношением квазипорядка.

Назовем пунктированные накрытия  $\pi_1$  и  $\pi_2$  эквивалентными, если одновременно  $\pi_1 \geqslant \pi_2$  и  $\pi_2 \geqslant \pi_1$ . Ясно, что на классах эквивалентных накрытий отношение  $\geqslant$  индуцирует отношение порядка. При этом, как легко видеть, если пространство  $X$  хаусдорфово, то на-

крытия  $\pi_1$  и  $\pi_2$  эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Действительно, изоморфные накрытия, очевидно, эквивалентны. Обратно, если накрытия  $\pi_1$  и  $\pi_2$  эквивалентны, т. е. если существуют морфизмы  $f: \pi_1 \rightarrow \pi_2$  и  $g: \pi_2 \rightarrow \pi_1$ , то в силу единственности морфизма  $f \circ g: \pi_2 \rightarrow \pi_2$  и  $g \circ f: \pi_1 \rightarrow \pi_1$  будут тождественными морфизмами  $\text{id}: \pi_2 \rightarrow \pi_2$  и  $\text{id}: \pi_1 \rightarrow \pi_1$  и, значит, морфизмы  $f$  и  $g$  будут взаимно обратными изоморфизмами.  $\square$

Таким образом, если пространство  $X$  хаусдорфово, то отношение порядка  $\leqslant$  определено на классах изоморфных объектов категории  $\text{COV}(X, x_0)$  (при любом выборе отмеченной точки  $x_0$ ).

**Определение 7.** Пунктируванное накрытие  $\pi_0: (\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  пунктируванного хаусдорфова пространства  $(X, x_0)$  называется:

- универсальным, если  $\pi_0 \geqslant \pi$  для любого пунктируванного накрытия  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x_0)$ ;
- максимальным, если  $\pi \geqslant \pi_0$  тогда и только тогда, когда  $\pi_0 \geqslant \pi$ , т. е. когда накрытия  $\pi$  и  $\pi_0$  изоморфны;
- односвязным, если пространство  $\tilde{X}_0$  односвязно.

Очевидно, что:

- любые два универсальных накрытия эквивалентны и, значит, изоморфны;
- каждое универсальное накрытие максимально;
- если пространство  $X$  локально связно, то любое односвязное накрытие универсально.

Заметим, что обратные утверждения, вообще говоря, неверны: существуют локально связные пространства  $X$  с максимальным, но не универсальным, и с универсальным, но не односвязным накрытиями. Существуют также пространства с неизоморфными максимальными накрытиями.

Ясно, однако, что если существует универсальное накрытие  $\pi_0$  пространства  $X$ , то любое максимальное накрытие пространства  $X$  изоморфно накрытию  $\pi_0$ , так что в этом случае максимальные накрытия совпадают с универсальными.

В частности, если для локально связного пространства  $X$  существует односвязное накрытие  $\pi_0$ , то любое его максимальное накрытие изоморфно накрытию  $\pi_0$ , так что

для таких пространств односвязные, универсальные и максимальные накрытия — это одни и те же накрытия.

**Определение 8.** Связное пространство  $X$  называется *полулокально односвязным*, если для него существует открытое покрытие, состоящее из односвязных множеств.

**Теорема 2.** Для любого хаусдорфова связного локально связного и полулокально односвязного пространства  $X$  существует односвязное накрытие.

**Следствие 1.** Для каждого хаусдорфова связного локально связного и полулокально односвязного пространства односвязные, универсальные и максимальные накрытия — это одни и те же накрытия.  $\square$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится одна общая конструкция, являющаяся обобщением конструкции коамальгамы пары отображений.

Пусть  $A$  — некоторое множество индексов, и пусть для любого  $\alpha \in A$  задано некоторое (пока произвольное) непрерывное отображение  $\pi_\alpha: \tilde{X}_\alpha \rightarrow X$ . В произведении  $\prod_\alpha \tilde{X}_\alpha$  пространств  $\tilde{X}_\alpha$  рассмотрим подпространство  $\tilde{X}$ , состоящее из всех точек  $(\tilde{x}_\alpha)$ ,  $\tilde{x}_\alpha \in \tilde{X}_\alpha$ , для которых точка  $\pi_\alpha(\tilde{x}_\alpha) \in X$  — одна и та же при всех  $\alpha$ . Тогда формула

$$\pi(\{\tilde{x}_\alpha\}) = \pi_\alpha(\tilde{x}_\alpha)$$

определит непрерывное отображение

$$\pi: \tilde{X} \rightarrow X,$$

называемое *коамальгамой* отображений  $\pi_\alpha$ . Если все рассматриваемые пространства пунктирены, а отображения  $\pi_\alpha$  являются отображениями пунктиранных пространств, то, приняв за отмеченную точку пространства  $\tilde{X}$  точку  $(\tilde{x}_\alpha^0)$ , где  $\tilde{x}_\alpha^0$  — отмеченные точки пространств  $\tilde{X}_\alpha$ , мы получим, что отображение  $\pi$  также будет отображением пунктиранных пространств.

Предположим теперь, что пространство  $X$  связно, локально связно и хаусдорфово и что все отображения  $\pi_\alpha$  являются (пунктиранными) накрытиями. Тогда, согласно следствию 1 из теоремы 1, любое односвязное открытое подмножество  $U$  пространства  $X$  будет ровно накрыто каждым из отображений  $\pi_\alpha$ . Пусть  $\tilde{U}_{\alpha, \beta_\alpha}$  — компоненты множества  $\pi^{-1}(U_\alpha)$ , где  $\beta_\alpha$  пробегает некоторое

(зависящее от  $\alpha$ ) множество индексов  $B_\alpha$ . По условию каждое отображение

$$\pi_\alpha|_{\tilde{U}_{\alpha, \beta_\alpha}} : \tilde{U}_{\alpha, \beta_\alpha} \rightarrow U$$

является гомеоморфизмом, а множества  $\tilde{U}_{\alpha, \beta_\alpha}$  открыты и не пересекаются.

Пусть  $B = \prod_\alpha B_\alpha$  — произведение всех множеств  $B_\alpha$ . Для любого  $\beta = (\beta_\alpha) \in B$  мы положим

$$\tilde{U}_\beta = \tilde{X} \cap \prod_\alpha \tilde{U}_{\alpha, \beta_\alpha}.$$

Ясно, что множества  $\tilde{U}_\beta \subset \tilde{X}$  не пересекаются и вместе составляют весь прообраз  $\pi^{-1}(U)$  множества  $U$  при отображении  $\pi$ :

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\beta \in B} \tilde{U}_\beta.$$

Столь же ясно, что на любом множестве  $\tilde{U}_\beta$  отображение  $\pi$  представляет собой гомеоморфизм на множество  $U$  (обратным гомеоморфизмом будет отображение  $x \mapsto (\sigma_{\alpha, \beta_\alpha}(x))$ , где  $\sigma_{\alpha, \beta_\alpha} : U \rightarrow U_{\alpha, \beta_\alpha}$  — гомеоморфизм, обратный к гомеоморфизму  $\pi_\alpha|_{\tilde{U}_{\alpha, \beta_\alpha}}$ ). В частности, мы видим, что множества  $\tilde{U}_\beta$  связны и потому являются компонентами множества  $\pi^{-1}(U)$ .

Однако утверждать, что  $\pi$  ровно накрывает множество  $U$  мы не можем, поскольку множества  $\tilde{U}_\beta$ , вообще говоря, не являются открытыми подмножествами пространства  $\tilde{X}$ .

Чтобы поправить дело, мы введем в  $\tilde{X}$  новую более сильную (имеющую больше открытых множеств) топологию. Для задания топологии на некотором множестве достаточно, конечно, задать ее базу и известно (и trivialно доказывается), что семейство тогда и только тогда является базой некоторой топологии, когда для любых двух множеств  $V_1$  и  $V_2$  этого семейства пересечение  $V_1 \cap V_2$  является объединением множеств семейства. Это характеристическое свойство баз очевидным образом выполнено для семейства множеств, являющихся компонентами открытых множеств топологического пространства  $\tilde{X}$  (если  $V_1$  и  $V_2$  — компоненты открытых множеств  $U_1$  и

$U_2$ , то  $V_1 \cap V_2$  состоит из компонент открытого множества  $U_1 \cap U_2$ ). Следовательно, мы можем это семейство принять за базу некоторой топологии на  $\tilde{X}$ . Пространство  $\tilde{X}$ , снабженное этой топологией, мы обозначим через  $\tilde{X}'$ , а отображение  $\pi$ , рассматриваемое как отображение  $\tilde{X}' \rightarrow X$ , — через  $\pi'$ . Так как множества, открытые в  $\tilde{X}$ , открыты, очевидно, и в  $\tilde{X}'$ , отображение  $\pi'$  непрерывно.

Поскольку множества  $U_\beta$  являются компонентами открытого множества  $\pi^{-1}(U)$ , они открыты в  $\tilde{X}'$ . Однако утверждать, что отображение  $\pi'$  ровно накрывает множество  $X$  мы все же еще не можем, поскольку не исключена возможность, что при переходе от  $\tilde{X}$  к  $\tilde{X}'$  испортится свойство отображения  $\pi$  быть гомеоморфизмом на  $U_\beta$ . На самом деле это не происходит, т. е. отображение  $\pi'$  остается на  $U_\beta$  гомеоморфизмом. Иначе говоря, топология на  $U_\beta$ , индуцированная топологией пространства  $X'$  (обозначим эту топологию символом II), совпадает с исходной топологией, индуцированной топологией пространства  $\tilde{X}$  (которую мы будем обозначать символом I). Действительно, в топологии I множество  $U_\beta$ , будучи гомеоморфным открытому множеству  $U$  локально связного пространства  $X$ , само локально связно, т. е. обладает базой, состоящей из связных множеств. С другой стороны, в топологии II любое открытое множество в  $U_\beta$  имеет вид  $C \cap U_\beta$ , где  $C$  — компонента некоторого открытого множества  $V$  из  $\tilde{X}$ . Пусть  $\tilde{x}$  — произвольная точка из  $C \cap U_\beta$ . Пересечение  $V \cap U_\beta$  является окрестностью этой точки в топологии I, и потому содержит некоторую связную (и, значит, содержащуюся в  $C$ ) окрестность  $W$  точки  $\tilde{x}$ . Таким образом, каждая точка  $\tilde{x}$  из  $C \cap U_\beta$  обладает в топологии I окрестностью  $W$ , содержащейся в  $C \cap U_\beta$ . Это означает, что множество  $C \cap U_\beta$  открыто в топологии I. Следовательно, топологии I и II совпадают.

Тем самым доказано, что отображение  $\pi': \tilde{X}' \rightarrow X$  ровно накрывает каждое односвязное открытое подмножество  $U \subset X$ . Поэтому, если пространство  $X$  полулокально односвязно, то любая его точка обладает окрестностью, ровно накрытой отображением  $\pi'$ . Следовательно, это отображение будет слабым накрытием и, значит, для любой компоненты  $\tilde{X}_0$  пространства  $\tilde{X}$  отображение

$$\pi'_0 = \pi|_{\tilde{X}_0}: \tilde{X}_0 \rightarrow X$$

будет накрытием. В случае, когда мы рассматриваем пунктированные накрытия, произвол в выборе компоненты  $\tilde{X}_0'$  пропадает, поскольку за эту компоненту следует, очевидно, принять компоненту, содержащую отмеченную точку  $\tilde{x}'_0 = (x_a^{(0)}) \in \tilde{X}$ .

Таким образом, если пространство  $X$  связно, локально связно и полулокально односвязно, то изложенная конструкция позволяет по любому семейству пунктированных накрытий  $\pi_a: (\tilde{X}_a, \tilde{x}_a^{(0)}) \rightarrow (X, x_0)$  единственным образом построить некоторое пунктированное накрытие

$$\pi'_0: (\tilde{X}'_0, \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0).$$

Допуская определенную нечеткость терминологии, мы будем это накрытие называть *коамальгамой* накрытий  $\pi_a$ .

Ясно, что отображение  $f_a: \tilde{X}'_0 \rightarrow \tilde{X}_a$ , определенное формулой

$$f_a((\tilde{x}_a)) = \tilde{x}'_0,$$

непрерывно и удовлетворяет соотношению  $\pi'_0 = \pi_a \circ f_a$ , т. е. является морфизмом накрытия  $\pi'_0$  в накрытие  $\pi_a$ . Таким образом, если накрытие  $\pi'_0$  является *коамальгамой* накрытий  $\pi_a$ , то  $\pi'_0 \geqslant \pi_a$  для любого  $a \in A$ .

Поэтому, если накрытия  $\pi_a: \tilde{X}_a \rightarrow X$  составляют *полное семейство* пунктированных накрытий, т. е. если любое пунктированное накрытие  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  пространства  $X$  изоморфно некоторому накрытию  $\pi_a$  (существование такого семейства очевидно: достаточно в каждом классе изоморфных накрытий пространства  $X$  выбрать по представителю), то накрытие  $\pi'_0: \tilde{X}'_0 \rightarrow X$  универсально. Тем самым доказано, что для любого связного локально связного и полулокально односвязного пространства  $X$  существует *универсальное накрытие*  $\pi'_0: \tilde{X}'_0 \rightarrow X$ .

Теорема 2 будет теперь доказана, если мы покажем, что для хаусдорфова пространства  $X$  это накрытие односвязно. Для этого нам будет нужна следующая лемма:

*Лемма 4.* Если связное локально связное и полулокально односвязное пространство  $X$  хаусдорфово, то композиция

$$\pi \circ \rho: \tilde{X}_1 \rightarrow X$$

любых двух накрытий  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  и  $\rho: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}$  также является накрытием.

**Доказательство.** По условию пространство  $X$  обладает покрытием, состоящим из односвязных открытых множеств  $U$ . Согласно следствию 1 из теоремы 1 множества  $U$  ровно накрыты отображением  $\pi$ , и потому компоненты  $U$  их прообразов  $\pi^{-1}(U)$  являются открытыми множествами, гомеоморфными множествам  $U$ . Следовательно, пространство  $\tilde{X}$  полулокально односвязно. Кроме того, по условию оно связно, а согласно сделанным в начале этой лекции замечаниям локально связно и хаусдорфово. Поэтому к множествам  $U$  снова применимо следствие 1 из теоремы 1 и, значит, каждое из этих множеств ровно накрыто отображением  $\rho$ . Но тогда ясно, что отображение  $\pi \circ \rho$  будет ровно накрывать все множества  $U$  и, следовательно, будет накрытием пространства  $X$ .  $\square$

Теперь мы уже можем завершить доказательство теоремы 2.

**Лемма 5.** Для любого хаусдорфова связного локально связного и полулокально односвязного пространства  $X$  универсальное накрытие

$$\pi'_0: \tilde{X}'_0 \rightarrow X,$$

являющееся коамальгамой полного семейства накрытий  $\pi_\alpha: \tilde{X}_\alpha \rightarrow X$ , односвязно.

**Доказательство.** Пусть  $\rho: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}'_0$  — произвольное пунктирное накрытие пространства  $\tilde{X}'_0$ . Согласно лемме 4 композиция  $\pi'_0 \circ \rho: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  является накрытием и потому (в силу полноты семейства  $\{\pi_\alpha\}$ ) изоморфна некоторому накрытию  $\pi_\alpha: \tilde{X}_\alpha \rightarrow X$ . Пусть  $f: \tilde{X}_\alpha \rightarrow \tilde{X}_1$  — соответствующий изоморфизм. Тогда отображение  $\rho \circ f: \tilde{X}_\alpha \rightarrow \tilde{X}'_0$  будет морфизмом накрытия  $\pi_\alpha$  в накрытие  $\pi'_0$ , так что будет иметь место отношение  $\pi_\alpha \geq \pi'_0$ .

Поскольку в силу универсальности  $\pi'_0 \geq \pi_\alpha$ , этим доказано, что накрытия  $\pi_\alpha$  и  $\pi'_0$  эквивалентны, и, следовательно, изоморфны. Если теперь  $g: \tilde{X}'_0 \rightarrow \tilde{X}_{\alpha_0}$  — изоморфизм накрытия  $\pi'_0$  на накрытие  $\pi_{\alpha_0}$ , то отображение  $\sigma = f \circ g: \tilde{X}'_0 \rightarrow \tilde{X}_1$  будет, очевидно, сечением накрытия  $\rho$ .

Следовательно, в силу предложения 6 накрытие  $\rho$  тривидально.

Таким образом, любое накрытие пространства  $\tilde{X}'_0$  тривидально, т. е. это пространство односвязно.  $\square$

Изложенное доказательство теоремы 2 может вызвать сомнения в связи с понятием полного семейства накрытий, в определении которого фигурируют «все» накрытия, что, как известно, может вести к парадоксам (к слову сказать, это относится и к понятию односвязного пространства, в определении которого также фигурируют «все» накрытия этого пространства, но, чтобы не прерывать изложения, мы предпочли на этом вопросе там не останавливаться).

В рамках обычной «наивной» теории множеств принято считать, что парадоксы не возникнут; если мы будем работать лишь с подмножествами некоторого фиксированного множества и с их фактормножествами. Имея это в виду (и считая фиксированным данное пунктированное пространство  $(X, x_0)$ ), мы рассмотрим множество  $\Sigma$  всех конечных последовательностей вида

$$(3) \quad (x_1, U_1, \dots, x_n, U_n),$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — точки пространства  $X$ , а  $U_1, \dots, U_n$  — такие его открытые подмножества, что для любого  $i = 1, \dots, n$  точки  $x_{i-1}$  и  $x_i$  принадлежат множеству  $U_i$ . В этом множестве мы рассмотрим подмножество  $\Sigma'$ , обладающие следующими свойствами:

1) в пространстве  $X$  существует такая односвязная окрестность  $U$  точки  $x_0$ , что  $(x_0, U) \in \Sigma'$ ;

2) существует такое фактормножество  $\tilde{X} = \Sigma'/\phi$  множества  $\Sigma'$ , такая топология на этом фактормножестве и такое непрерывное отображение  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ , что:

а)  $\pi$  является накрытием;

б) все точки множества  $\Sigma'$ , имеющие вид  $(x_0, U)$ , где  $U$  — односвязная окрестность точки  $x_0$  в пространстве  $X$ , определяют одну и ту же точку  $\tilde{x}_0$  фактормножества  $\tilde{X}$ , и эту точку отображение  $\pi$  переводит в точку  $x_0$  (так что  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ ).

Пусть  $\pi_\alpha: (\tilde{X}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) \rightarrow (X, x_0)$  — все пунктированные накрытия вида  $\Sigma'/\phi \rightarrow X$ , получающиеся при всевозможных выборах подмножества  $\Sigma'$ , отношения эквивалентности  $\phi$  на  $\Sigma'$ , топологии на  $\Sigma'/\phi$  и отображения  $\pi$ .

**Лемма 6.** Семейство пунктированных накрытий  $\pi_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$  полно.

Доказательство. Пусть  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  — произвольное пунктированное накрытие пространства  $X$ , и пусть

$\Sigma'$  — подмножество множества  $\Sigma$ , состоящее из всех последовательностей (3), для которых все множества  $U_1, \dots, U_n$  ровно накрыты отображением  $\pi$ . Рассмотрим произвольную последовательность (3), принадлежащую подмножеству  $\Sigma'$ . Точке  $x_0$  мы сопоставим отмеченную точку  $\tilde{x}_0$  пространства  $\tilde{X}$ . По условию  $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ . Рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого  $i = 1, \dots, n$  уже построена точка  $\tilde{x}_{i-1} \in \tilde{X}$ , обладающая тем свойством, что  $\pi(\tilde{x}_{i-1}) = x_{i-1}$ . Поскольку множество  $U_i$  ровно накрыто отображением  $\pi$  и поскольку  $x_{i-1} \in U_i$ , в пространстве  $\tilde{X}$  существует единственное открытое множество  $\tilde{U}_i$ , содержащее точку  $\tilde{x}_{i-1}$  и гомеоморфно отображающееся на множество  $U_{i-1}$ . Поскольку  $x_i \in U_i$ , в множестве  $U_i$  существует единственная точка  $\tilde{x}_i$ , для которой  $\pi(\tilde{x}_i) = x_i$ . Тем самым точки  $\tilde{x}_i$  по индукции построены для всех  $i = 1, \dots, n$ . В частности, построена точка  $\tilde{x}_n$ .

Заметим, что точка  $\tilde{x}_n$  однозначно определена последовательностью (3). Поэтому формула

$$\varphi(x_1, U_1, \dots, x_n, U_n) = \tilde{x}_n$$

корректно определяет некоторое отображение множества  $\Sigma'$  в пространство  $\tilde{X}$ . Если это отображение надъективно, то определяемое им фактормножество  $\Sigma'/\varphi$  множества  $\Sigma'$  находится в биективном соответствии с пространством  $\tilde{X}$ . Перенесем с помощью этого соответствия топологию пространства  $\tilde{X}$  и отображение  $\pi$  на фактормножество  $\Sigma'/\varphi$ . Очевидно, что при этом все наложенные выше условия будут выполнены, так что мы получим некоторое накрытие семейства  $\{\pi_\alpha\}$ . Поскольку по построению это накрытие изоморфно данному накрытию  $\pi$ , мы видим, таким образом, что для завершения доказательства леммы 6 нам осталось лишь доказать, что отображение  $\varphi: \Sigma' \rightarrow \tilde{X}$  надъективно.

Рассмотрим с этой целью образ  $\varphi(\Sigma')$  множества  $\Sigma'$  при отображении  $\varphi$ . Если последовательность (3) принадлежит  $\Sigma'$ , то, заменив в ней точку  $x_n$  произвольной точкой множества  $U_n$ , мы снова получим последовательность из  $\Sigma'$ . Это показывает, что вместе с точкой  $\tilde{x}_n$  множество  $\varphi(\Sigma')$  содержит и всю ее окрестность  $\tilde{U}_n$  (см. выше). Следовательно, множество  $\varphi(\Sigma')$  открыто.

Пусть теперь  $\tilde{x}$  — произвольная точка замыкания  $\varphi(\Sigma')$  множества  $\varphi(\Sigma')$ , и пусть  $U$  — окрестность точки

$x = \pi(\tilde{x})$ , ровно накрытая отображением  $\pi$ , а  $\tilde{U}$  — окрестность точки  $\tilde{x}$ , гомеоморфно отображающаяся на окрестность  $U$ . Так как  $\tilde{x} \in \phi(\Sigma')$ , то  $\phi(\Sigma') \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ . Это означает, что в  $\Sigma'$  существует такая последовательность (3), что  $\tilde{x}_n \in \tilde{U}$  и, следовательно,  $x_n \in U$ . Поэтому последовательность

$$(x_1, U_1, \dots, x_n, U_n, x, U)$$

будет принадлежать  $\Sigma'$ , а ее образом при отображении  $\phi$  будет точка  $\tilde{x}$ . Таким образом,  $\tilde{x} \in \phi(\Sigma')$  и, следовательно, множество  $\phi(\Sigma')$  замкнуто.

Являясь открытым и замкнутым (непустым) подмножеством связного пространства  $\tilde{X}$ , множество  $\phi(\Sigma')$  совпадает со всем  $\tilde{X}$ , так что отображение  $\phi$  надъективно.

Тем самым лемма 6 полностью доказана.  $\square$

Вместе с тем, в соответствии с указанным выше общим принципом, полностью обосновано (в рамках наивной теории множеств) и наше построение универсального односвязного накрытия. Тот факт, что построенное полное семейство явно содержит повторения (изоморфные накрытия), ничему не вредит, поскольку отсутствием повторений в полном семействе мы при доказательстве теоремы 2 не пользовались. Впрочем, с помощью аксиомы выбора от повторений можно легко избавиться, но это внесет в конструкцию неприятный элемент неконтролируемого произвола.

Рассмотрим в заключение вопрос о функториальности универсального накрытия.

Для любой категории  $\mathbf{C}$  определена категория  $\text{AR-}\mathbf{C}$ , объектами которой являются морфизмы  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  категории  $\mathbf{C}$ , а морфизмами — коммутативные диаграммы вида

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

где  $\tilde{f}$  и  $f$  — морфизмы категории  $C$ . Морфизм (4) обозначается обыкновенно символом  $(\tilde{f}, f)$  и считается морфизмом объекта  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  в объект  $\rho: \tilde{Y} \rightarrow Y$ . Композиция этих морфизмов определяется очевидным образом.

В частности, при  $C = \text{TOP}$  и  $C = \text{TOP}^*$  мы получаем категории  $\text{AR-TOP}$  и  $\text{AR-TOP}^*$ . Полные подкатегории этих категорий, объектами которых являются накрытия, мы будем обозначать символами  $\text{COV}$  и  $\text{COV}^*$  соответственно и будем называть их *категориями накрытий*. Морфизмами этих категорий являются квадраты вида (4), в которых  $\pi$  и  $\rho$  — накрытия, а  $\tilde{f}$  и  $f$  — непрерывные отображения.

Морфизмы в смысле определения 6, которые мы будем теперь называть *морфизмами над  $X$* , являются частным случаем морфизмов  $(\tilde{f}, f)$ , получающимся при  $f = \text{id}$ . Это означает, что для любого (пунктирного) пространства  $X$  категория  $\text{COV}(X)$  (категория  $\text{COV}^*(X)$ ) является подкатегорией категории  $\text{COV}$  (категории  $\text{COV}^*$ ).

Сопоставив каждому (пунктирному) накрытию  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  пространство  $X$ , а каждому морфизму  $(\tilde{f}, f)$  отображение  $f$ , мы, очевидно, получим некоторый функтор  $\text{COV} \rightarrow \text{TOP}$  (функтор  $\text{COV}^* \rightarrow \text{TOP}^*$ ). Для любого (пунктирного) пространства  $X$  категория  $\text{COV}(X)$  (категория  $\text{COV}^*(X)$ ) является, очевидно, прообразом три-вальной категории  $(X, \text{id}_X)$  при этом функторе.

Пусть  $\text{H-TOP}^*$  — полная подкатегория категории  $\text{TOP}^*$ , состоящая из хаусдорфовых связных локально связных и полулокально односвязных пространств, а  $\text{H-COV}^*$  — ее прообраз при функторе  $\text{COV}^* \rightarrow \text{TOP}^*$ . Другими словами,  $\text{H-COV}^*$  представляет собой полную подкатегорию категории пунктирных накрытий  $\text{COV}^*$ , состоящую из накрытий над пространством из  $\text{H-TOP}$ .

**Теорема 3.** Существует функтор

$$(5) \quad \text{H-TOP}^* \rightarrow \text{H-COV}^*,$$

сопоставляющий каждому пунктируенному пространству  $(X, x_0)$  категории  $\text{H-TOP}^*$  некоторое его односвязное универсальное пунктируенное накрытие

$$(6) \quad \pi_X: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0).$$

С точностью до изоморфизма этот функтор единствен.

**Доказательство.** На объектах мы определим функтор (5), выбрав произвольно для каждого пространства  $(X, x_0)$  накрытие (6). Пусть  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  — произвольное пунктированное отображение. Поскольку пространство  $\tilde{X}$  односвязно, по теореме 1 существует единственное отображение  $\tilde{f}: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ , являющееся поднятием отображения  $\pi_X \circ f$  по отношению к накрытию  $\pi_Y$  и потому составляющее вместе с  $f$  морфизм  $(\tilde{f}, f)$  накрытия  $\pi_X$  в накрытие  $\pi_Y$ . Сопоставив отображению  $f$  морфизм  $(\tilde{f}, f)$ , мы и получим (в силу единственности отображения  $\tilde{f}$ ) требуемый функтор (6).

Выбрав накрытия (6) иначе, мы получим изоморфный функтор (тот факт, что изоморфизм будет функторным, снова вытекает из единственности).  $\square$

**Замечание 1.** Изложенное построение функтора (5) содержит малоприятный элемент произвола. Хотя этот произвол ничему не вредит, приводя к естественно изоморфным функторам, но при желании от него можно избавиться, приняв за (6) коамальгаму полного семейства накрытий из леммы 6. (Заметим, что соответствующая конструкция однозначно определяет не только пространство  $\tilde{X}$ , но и отмеченную точку  $\tilde{x}_0$ .)