Лекция 9

ГЛАДКИЕ НАКРЫТИЯ. — ИЗОМОРФИЗМ КАТЕГОРИЙ ГЛАДКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ НАКРЫТИЙ. — СУЩЕСТВОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГЛАДКИХ НАКРЫТИЙ. — НАКРЫТИЯ ГЛАДКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП. — УНИВЕРСАЛЬНЫЕ НАКРЫТИЯ ГРУПП ЛИ. — ЛЕММЫ О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ. — ЛОКАЛЬНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ И НАКРЫТИЯ. — ОПИСАНИЕ ЛОКАЛЬНО ИЗОМОРФНЫХ ГРУПП ЛИ.

Применим результаты предыдущей лекции к гладким многообразиям и к группам Ли. Для произвольного гладкого (связного) многообразия M его накрытия $\tilde{M} \to M$ в смысле определения 1 лекции 8, т. е. его накрытия как топологического пространства, мы будем называть *топологическими накрытиями*, а категорию всех таких накрытий будем обозначать символом $\mathrm{COV}_{\mathrm{top}}(M)$.

Определение 1. Накрытие π: $\tilde{M} \to M$, где $\tilde{M}$ и M — связные гладкие многообразия, называется *гладким накрытием*, если оно является гладким отображением многообразия $\tilde{M}$ на многообразие M и для любого связного открытого множества $U \subset M$, ровно накрытого отображением π, ограничение отображения π на каждой компоненте $\tilde{U}$ множества $\pi^{-1}(U)$ является диффеоморфизмом $\tilde{U} \to U$.

Последнее условие означает, в частности, что любое гладкое накрытие этально (является локальным диффеоморфизмом).

Тривиальное накрытие $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$, дает пример негладкого накрытия, являющегося гладким отображением.

Категорию, объектами которой являются гладкие накрытия гладких многообразий, а морфизмами — их морфизмы $(\tilde{f}, f)$ как топологических накрытий, состоящие из гладких отображений $\tilde{f}$ и f, мы будем обозначать символом COV-DIFF, а ее подкатегорию, состоящую из накрытий данного многообразия M и их морфизмов над M, — освободившимся символом $\mathrm{COV}(M)$. Символы $\mathrm{COV}^{\bullet}$-DIFF и $\mathrm{COV}^{\bullet}(M)$ будут обозначать пунктированные варианты этих категорий.

Игнорирование гладкостей определяет нам для любого гладкого многообразия M некоторый функтор

$$\mathrm{COV}(M) \to \mathrm{COV}_{\mathrm{top}}(M). \tag{1}$$

Предложение 1. *Функтор* (1) *является изоморфизмом категорий, т. е. на объектах и морфизмах представляет собой биективное отображение.*

Доказательство. Биективность функтора (1) на объектах означает, что для любого топологического накрытия $\pi\colon \tilde{M} \to M$ на $\tilde{M}$ существует единственная гладкость, по отношению к которой π является гладким накрытием. Для доказательства мы рассмотрим на M произвольную карту (U, h), для которой множество U связано и ровно накрыто отображением π. Пусть $\tilde{U}$ — произвольная компонента множества $\pi^{-1}(U)$, и пусть $\tilde{h} = h \circ \left(\pi\big|_{\tilde{U}}\right)$. Ясно, что пара $(\tilde{U}, \tilde{h})$ является картой на $\tilde{M}$. Если $(\tilde{V}, \tilde{k})$ — другая карта такого рода, то поскольку на множестве $\tilde{k}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = k(U \cap V)$ имеет место равенство $\tilde{h} \circ \tilde{k}^{-1} = h \circ k^{-1}$, карты $(\tilde{U}, \tilde{h})$ и $(\tilde{V}, \tilde{k})$ друг с другом согласованы. Это показывает, что всевозможные карты вида $(\tilde{U}, \tilde{h})$ составляют атлас на $\tilde{M}$. В соответствующей гладкости на $\tilde{M}$ отображение π будет, очевидно, гладким накрытием. Единственность этой гладкости немедленно вытекает из того, что в любой гладкости на $\tilde{M}$, по отношению к которой π является гладким накрытием, пары $(U, \tilde{h})$ являются гладкими картами.

Биективность функтора (1) на морфизмах означает теперь, что для любых двух гладких накрытий $\pi_1\colon \tilde{M}_1 \to M$ и $\pi\colon \tilde{M} \to M$ каждый их морфизм $\tilde{f}\colon \tilde{M}_1 \to \tilde{M}$ как топологических накрытий является гладким отображением. Но после сказанного выше это уже очевидно.

Действительно, поскольку $\tilde{f}$ является накрытием (лемма 3 предыдущей лекции), на M существует атлас из таких карт (U, h), ровно накрытых отображением π, что все соответствующие карты вида $(\tilde{U}, \tilde{h})$ на $\tilde{M}$ ровно накрыты отображением $\tilde{f}$. Это означает, что для любой карты вида $(\tilde{U}, \tilde{h})$ существует на $\tilde{M}_1$ карта $(\tilde{U}_1, \tilde{h}_1)$, накрывающая карту (U, h) и такая, что $\tilde{f}$ гомеоморфно отображает $\tilde{U}_1$ на $\tilde{U}$. Но тогда $\tilde{h}_1 = \tilde{h} \circ \tilde{f}$, и потому в этих картах отображение $\tilde{f}$ задается тождественным (и, значит, гладким) отображением. Поэтому отображение $\tilde{f}$ гладко. □

Замечание 1. Аналогичный функтор игнорирования

$$\text{COV-DIFF} \to \text{COV}$$

изоморфизмом категорий не является. На объектах этот функтор не будет ни надъективным (из-за существования не локально евклидовых топологических пространств), ни инъективным (из-за возможности введения на одном и том же топологическом многообразии многих различных гладкостей), а его образ не будет полной подкатегорией категории COV. Можно лишь утверждать (в порядке прямого обобщения касающегося морфизмов утверждения предложения 1), что *если для морфизма* $(\tilde{f}, f)$ *гладкого накрытия* π_1: $\tilde{M}_1 \to M_1$ *в гладкое накрытие* π: $\tilde{M} \to M$ *отображение* f *гладко, то отображение* $\tilde{f}$ *также гладко.* Действительно (ср. с доказательством предложения 1), для любых двух карт (U_1, h_1) и (U, h) многообразий M_1 и M отображение $\tilde{f}$ задается в соответствующих накрывающих картах $(\tilde{U}_1, \tilde{h}_1)$ и $(\tilde{U}, \tilde{h})$ теми же (и потому гладкими) функциями, что и отображение f в картах (U_1, h_1) и (U, h) (здесь предполагается, конечно, что $\tilde{f}(\tilde{U}_1) \subset \tilde{U}$ и, значит, $f(U_1) \subset U$). □

Любое гладкое многообразие, будучи локально евклидовым топологическим пространством, локально связно. Оказывается, что, кроме того, оно полулокально односвязно и даже *локально односвязно*, т. е. обладает базой, состоящей из односвязных открытых множеств. Это немедленно вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *Единичный куб* Q *пространства* $\mathbb{R}^n$ *(безразлично, открытый или замкнутый) является односвязным пространством.*

Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма 2. *Если односвязные (и связные) пространства X и Y хаусдорфовы и локально связны, то их произведение $X \times Y$ также односвязно.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon \tilde{Z} \to X \times Y$ — произвольное накрытие пространства $X \times Y$. Нам нужно показать, что это накрытие тривиально, т. е. (предложение 4 лекции 8), что оно обладает сечением $\sigma\colon X \times Y \to \tilde{Z}$.

Выберем (и зафиксируем) произвольные точки $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $\tilde{z}_0 \in \pi^{-1}(x_0, y_0)$. Согласно теореме 1 существует единственное отображение

$$\tau\colon (Y, y_0) \to (\tilde{Z}, \tilde{z}_0),$$

обладающее тем свойством, что $(\pi \circ \tau)(y) = (x_0, y)$ для любой точки $y \in Y$ (это отображение является не чем иным, как поднятием отображения $y \mapsto (x_0, y)$ связного локально связного и односвязного пунктированного пространства (Y, y_0) в хаусдорфово пунктированное пространство $(X \times Y, (x_0, y_0))$). По аналогичным соображениям для любой точки $y \in Y$ существует единственное отображение

$$\sigma_y\colon (X, x_0) \to (\tilde{Z}, \tau(y)),$$

обладающее тем свойством, что

$$(\pi \circ \sigma_y)(x) = (x, y)$$

для каждой точки $x \in X$. Но тогда отображение

$$\sigma\colon X \times Y \to \tilde{Z},$$

определенное формулой

$$\sigma(x, y) = \sigma_y(x), \quad (x, y) \in X \times Y,$$

будет, очевидно, удовлетворять соотношению $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$. Поэтому для завершения доказательства нам осталось лишь показать, что отображение σ непрерывно.

Для этого достаточно показать, что образ $A = \sigma(X \times Y)$ пространства $X \times Y$ при отображении σ является открытым подмножеством пространства $\tilde{Z}$. Действительно, тогда любая точка $\tilde{z} \in A$ будет иметь окрестность W, целиком содержащуюся в A, и образ $\pi(W)$ этой окрест-

ности при отображении π будет окрестностью точки $\pi(\tilde{z})$, отображающейся посредством σ на окрестность W.

Выбрав произвольную точку $y_1 \in Y$, рассмотрим подмножество $\sigma_{y_1}(X)$ множества $\tilde{Z}$ (гомеоморфное, как мы знаем, пространству X). Пусть B — множество всех внутренних точек множества A, принадлежащих подмножеству $\sigma_{y_1}(X)$. Нам нужно доказать, что $B = \sigma_{y_1}(X)$. Поскольку B открыто в $\sigma_{y_1}(X)$, для этого достаточно показать, что B не пусто и замкнуто в $\sigma_{y_1}(X)$.

Пусть $\tilde{z}_1 \in \sigma_y\ (X)$, и пусть $\pi(\tilde{z}_1) = (x_1, y_1)$. В X и Y существуют такие связные окрестности U и V точек x_1 и y_1, что $U \times V$ ровно накрыто отображением π. Пусть W — компонента точки $\tilde{z}_1$ в $\pi^{-1}(U \times V)$. Ясно, что

$$W = \bigcup_{y \in V} \tilde{U}(y),$$

где $\tilde{U}(y) = W \cap \pi^{-1}(U \times \{y\})$, причем каждое из множеств $\tilde{U}(y)$, либо не пересекается с A, либо целиком в A содержится.

В случае, когда $x_1 = x_0$, множества $\tilde{U}(y)$ являются не чем иным, как пересечениями с W множеств $\sigma_y(X)$:

$$\tilde{U}(y) = W \cap \sigma_y(X).$$

Поэтому в этом случае $\tilde{U}(y) \subset A$ и, следовательно, $W \subset A$. Поскольку W открыто в $\tilde{Z}$, это означает, что точка $\tilde{z}_1$, для которой $x_1 = x_0$, принадлежит B. Следовательно, множество B не пусто.

Пусть теперь точка $\tilde{z}_1$ принадлежит замыканию $\bar{B}$ множества B. Тогда множество $\tilde{U}(y_1)$ (являющееся окрестностью точки $\tilde{z}_1$ в $\sigma_{y_1}(X)$) пересекается с B. Пусть $\tilde{z}_2 \in B \cap \tilde{U}(y_1)$, и пусть $\pi(\tilde{z}_2) = (x_2, y_2)$. Поскольку точка $\tilde{z}_2$ является внутренней точкой множества A, в пространстве Y существует такая окрестность V' точки y_1, что $V' \subset V$ и пересечение $W \cap \pi^{-1}(\{x_2\} \times V')$ содержится в A. Это означает, что для любой точки $y \in V'$ множество $\tilde{U}(y)$ пересекается с A. Но тогда необходимо $\tilde{U}(y) \subset \subset A$. Следовательно, множество

$$W' = \bigcup_{y \in V'} \tilde{U}(y)$$

содержится в A. Множество W', очевидно, открыто в $\tilde{Z}'$

и содержит точку $\tilde{z}_1$. Поэтому $\tilde{z}_1 \in B$. Следовательно, множество B замкнуто. □

Теперь мы можем доказать и лемму 1.

Доказательство леммы 1. В силу леммы 2 достаточно рассмотреть случай, когда куб Q одномерен, т. е. является отрезком оси $\mathbb{R}$. Пусть сначала этот отрезок замкнут. Тогда для любого накрытия $\pi: \tilde{Q} \to Q$ существует конечное покрытие отрезка Q ровно накрытыми открытыми (в Q) интервалами $I_1, \ldots, I_n$. Ясно, что эти интервалы можно занумеровать последовательно, т. е. так, чтобы для любого $k = 1, \ldots, n$ объединение J_k интервалов $I_1, \ldots, I_k$ было связным, и, значит, тоже было интервалом. Тогда пересечения $J_k \cap I_{k+1}$ будут связны, и потому $(n-1)$-кратное применение следствия 1 из предложения 1 предыдущей лекции даст нам, что интервал $J_n = Q$ ровно накрыт отображением π. Следовательно, накрытие π тривиально, и потому отрезок Q односвязен.

Открытый же отрезок Q является объединением возрастающей последовательности замкнутых отрезков, над каждым из которых накрытие π тривиально, т. е. является гомеоморфизмом. Поэтому π будет гомеоморфизмом и над всем Q. Таким образом, открытый отрезок Q также односвязен. □

Следствие. При $n \geqslant 2$ сфера S^n односвязна.

Доказательство. Пусть p и q — две диаметрально противоположные точки сферы S^n, и пусть $U = S^n \setminus \{p\}$ и $V = S^n \setminus \{q\}$. Открытые множества U и V гомеоморфны открытому n-мерному кубу и потому односвязны. Их пересечение $U \cap V = S^n \setminus (\{p\} \cup \{q\})$ гомеоморфно произведению $S^{n-1} \times (0, 1)$ экватора S^{n-1} сферы S^n на открытый отрезок $(0, 1)$ и потому связно (при $n - 1 \geqslant 1$). Следовательно, согласно следствию 2 теоремы 1 лекции 8, сфера $S^n = U \cup V$ односвязна. □

Пусть H-DIFF — категория пунктированных гладких хаусдорфовых многообразий. По доказанному функтор игнорирования гладкости отображает эту категорию в категорию H-TOP*. Комбинируя этот функтор с функтором из теоремы 3 предыдущей лекции, мы каждому многообразию M сопоставим некоторое односвязное накрытие $\tilde{M} \to M$. Согласно предложению 1 в это накрытие единственным образом вводится структура гладкого накрытия. Ясно, что тем самым мы получаем некоторый функтор из

категории H-DIFF$^\bullet$ в категорию H-COV$^\bullet$ пунктированных накрытий над хаусдорфовыми многообразиями.

Сформулируем этот факт в виде отдельной теоремы:

Теорема 1. *Существует функтор*

$$\text{H-DIFF}^\bullet \to \text{H-COV}^\bullet,$$

сопоставляющий каждому пунктированному хаусдорфовому многообразию M его односвязное универсальное пунктированное накрытие

$$\pi_M\colon \tilde{M} \to M.$$

С точностью до изоморфизма этот функтор единствен. □

Перейдем теперь к группам Ли. Понятие накрытия для групп Ли вводится следующим определением:

Определение 2. Пусть $\tilde{G}$ и G — связные группы Ли. Гладкое накрытие $\pi\colon \tilde{G} \to G$ называется *групповым накрытием*, если оно является гомоморфизмом групп.

Аналогичным образом понятие группового накрытия вводится и для случая, когда $\tilde{G}$ и G являются связными топологическими группами.

Морфизмами групповых накрытий называются их морфизмы $(\tilde{f}, f)$ как гладких (или топологических) накрытий, для которых отображения $\tilde{f}$ и f являются гомоморфизмами.

Поскольку в каждой группе естественным образом выделяется отмеченная точка — ее единица — и поскольку любой гомоморфизм переводит единицу в единицу, все групповые накрытия и все их морфизмы автоматически пунктированы.

Все групповые накрытия групп Ли (или топологических групп) и все их морфизмы составляют категорию COV-GR.

Любая группа Ли G определяет подкатегорию категории COV-GR, объектами которой являются групповые накрытия группы G, а морфизмами — морфизмы из COV-GR вида $(\tilde{f}, \mathrm{id})$. Эту подкатегорию мы, не боясь определенной двусмысленности, будем обозначать символом $\mathrm{COV}(G)$ (а категорию накрытий группы G как гладкого хаусдорфова пунктированного многообразия — символом $\mathrm{COV}_{\mathrm{diff}}(G)$).

Оказывается, что подобно функтору (1) *функтор игнорирования*

(2) $$\mathrm{COV}(G) \to \mathrm{COV}_{\mathrm{diff}}(G)$$

является изоморфизмом категорий.

Мы докажем это утверждение лишь частично.

Для любого группового накрытия $\pi\colon \tilde{G} \to G$ отображения

(3) $$\tilde{\mu}\colon \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \longmapsto \tilde{x}\tilde{y},$$
$$\tilde{\nu}\colon \tilde{G} \to \tilde{G}, \quad \tilde{x} \longmapsto \tilde{x}^{-1},$$

являются поднятиями (относительно π) отображений

$$\mu\colon \tilde{G} \times \tilde{G} \to G, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \longmapsto \pi\tilde{x} \cdot \pi\tilde{y},$$
$$\nu\colon \tilde{G} \to G, \quad \tilde{x} \to (\pi\tilde{x})^{-1}.$$

Так как эти поднятия однозначно характеризуются (предложение 3 предыдущей лекции) условиями

(4) $$\tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}, \quad \tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e},$$

где $\tilde{e}$ — единица группы $\tilde{G}$, то функтор (2) на объектах является инъективным отображением.

Чтобы доказать его биективность, нужно для любого пунктированного накрытия $\pi\colon (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (G_{\mathrm{diff}}, e)$, где G_{diff} — группа G, рассматриваемая как гладкое многообразие, а e — ее единица, показать, что в многообразие $\tilde{G}$ можно ввести строение группы Ли, по отношению к которому π будет групповым накрытием. Ясно, что для этого следует рассмотреть отображения μ и ν (построение которых не предполагает, что $\tilde{G}$ является группой) и их поднятия $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$, удовлетворяющие соотношениям (4). *Предположим, что поднятия $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ существуют.*

Так как отображения $\tilde{\mu} = \pi \circ \tilde{\mu}$ и $\nu = \pi \circ \tilde{\nu}$ гладки, а π является локальным диффеоморфизмом, то отображения $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ также гладки. Кроме того, ясно, что по отношению к операциям

$$\tilde{x}\tilde{y} = \tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad \text{и} \quad \tilde{x}^{-1} = \tilde{\nu}(\tilde{x})$$

отображение π является гомоморфизмом. Поэтому π будет групповым накрытием, если мы покажем, что эти операции удовлетворяют аксиомам группы.

Так как $(\pi \circ \tilde{\mu})(\tilde{x}, \tilde{e}) = \pi(\tilde{x})$ и $(\pi \circ \tilde{\mu})(\tilde{e}, \tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$, то отображения $\tilde{x} \longmapsto \tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{x})$ и $\tilde{x} \longmapsto \tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{e})$ являются

поднятиями отображения $\pi\colon \tilde{G} \to G$, обладающими тем свойством, что $\tilde{e} \mapsto \tilde{e}$. Но тем же свойством обладает и тождественное отображение $\mathrm{id}\colon \tilde{G} \to \tilde{G}$ (также являющееся поднятием отображения π). Поэтому в силу единственности поднятий (предложение 3 лекции 8) имеют место равенства $\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{x}) = \tilde{x}$, т. е. равенства $\tilde{x}\tilde{e} = \tilde{e}\tilde{x} = x$, означающие, что точка $\tilde{e}$ является единицей умножения μ.

Аналогично оба отображения $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto (\tilde{x}\tilde{y})\tilde{z}$ и $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto \tilde{x}(\tilde{y}\tilde{z})$ являются поднятиями одного и того же отображения $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto \pi\tilde{x} \cdot \pi\tilde{y} \cdot \pi\tilde{z}$, причем точку $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ оба эти отображения переводят в одну и ту же точку $\tilde{e}$. Поэтому $(\tilde{x}\tilde{y})\tilde{z} = \tilde{x}(\tilde{y}\tilde{z})$ для любых элементов $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{G}$, так что умножение μ ассоциативно.

Наконец, отображение $\tilde{x} \mapsto \tilde{x}\tilde{x}^{-1}$ является непрерывным отображением связного пространства $\tilde{G}$ в дискретное пространство $\pi^{-1}(e)$, переводящим $\tilde{e}$ в $\tilde{e}$. Поэтому $\tilde{x}\tilde{x}^{-1} = \tilde{e}$ для любого $\tilde{x} \in \tilde{G}$.

Следовательно, $\tilde{G}$ является группой. □

Таким образом, вопрос о надъективности функтора (2) на объектах упирается в вопрос о существовании поднятий (3). Мы не будем доказывать их существования в полной общности, а ограничимся случаем, когда многообразие $\tilde{G}$ односвязно.

В этом случае существование поднятий $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ обеспечивается теоремой 1 предыдущей лекции, поскольку, согласно лемме 2, для односвязного многообразия $\tilde{G}$ произведение $\tilde{G} \times \tilde{G}$ также односвязно.

Тем самым нами доказано следующее предложение:

Предложение 2. *Пусть G — группа Ли и $\pi\colon \tilde{G} \to G$ — ее односвязное гладкое накрытие как гладкого пунктированного многообразия. Тогда в гладкое многообразие $\tilde{G}$ можно единственным образом ввести умножение, по отношению к которому оно будет группой Ли, а отображение π будет гомоморфизмом (и, следовательно, групповым накрытием).* □

Что же касается утверждения о биективности функтора (2) на морфизмах, то оно равносильно утверждению, что для любых двух групповых накрытий $\pi\colon \tilde{G} \to G$ и $\pi\colon \tilde{G}_1 \to G$ любой их морфизм $\tilde{f}\colon \tilde{G} \to \tilde{G}_1$ как гладких накрытий является гомоморфизмом $\tilde{G} \to \tilde{G}_1$. Мы

докажем даже более общий результат, относящийся к накрытиям π: $\tilde{G} \to G$ и ρ: $\tilde{H} \to H$ двух, вообще говоря, различных групп Ли G и H и к произвольному морфизму $(\tilde{f}, f)$ категории COV*-DIFF накрытия π в накрытие ρ:

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & G \arrow[d, "f"] \\ \tilde{H} \arrow[r, "\rho"'] & H \end{tikzcd}$$

Оказывается, что *если f является гомоморфизмом групп, то и $\tilde{f}$ будет гомоморфизмом групп.* Действительно, отображения $\tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{H}$, задаваемые формулами $(\tilde{x}, \tilde{y}) \longmapsto \tilde{f}(\tilde{x})\tilde{f}(\tilde{y})$ и $(\tilde{x}, \tilde{y}) \longmapsto \tilde{f}(xy)$, оба являются поднятиями одного и того же отображения

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \longmapsto f(x)f(y) = f(xy), \quad \text{где} \quad x = \pi(\tilde{x}),\ y = \pi(\tilde{y})$$

и поэтому совпадают. □

Отсюда непосредственно следует, что теорема 1 сохраняется и для групп Ли:

Теорема 2. *Существует функтор* GR-DIFF $\to$ GR-DIFF, *сопоставляющий каждой связной группе Ли G ее односвязное групповое накрытие*

$$\pi_G\colon \tilde{G} \to G.$$

С точностью до изоморфизма этот функтор единствен.

Ядро Ker π_G накрытия π_G: $\tilde{G} \to G$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определено группой Ли G. Оно называется *фундаментальной группой* (или *группой Пуанкаре*) этой группы и обозначается символом $\pi_1 G$ (можно показать, что группа $\pi_1 G$ совпадает с известной из топологии фундаментальной группой $\pi_1 G_{\text{top}}$, где G_{top} — группа G, рассматриваемая как топологическое пространство; см. [7]).

Для применений, которые мы имеем в виду, удобно теорему 2 переформулировать в более алгебраических терминах. Для этого нам понадобятся несколько простых лемм о топологических группах.

Лемма 3. *Каждая открытая подгруппа H произвольной топологической группы G замкнута.*

Доказательство. Поскольку подгруппа H открыта, каждый смежный класс Hx группы G по подгруппе H также открыт. Поэтому объединение любого семейства этих смежных классов является открытым множеством. В частности, открытым множеством является объединение всех смежных классов Hx, отличных от самой подгруппы H. Но это объединение является дополнением в G к подгруппе H. Поэтому подгруппа H замкнута. □

Лемма 4. *Каждая окрестность V единицы связной топологической группы G порождает группу G.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа, порожденная окрестностью V. Так как $Vx \subset H$ для любого $x \in H$, то подгруппа H открыта. Но тогда, согласно лемме 3, подгруппа H также замкнута. Следовательно, $H = G$, ибо по условию группа G связна. □

Напомним, что для любой инвариантной подгруппы (нормального делителя) K топологической группы G факторгруппа G/K снабжается *фактортопологией*, в которой множество $V \subset G/K$ открыто тогда и только тогда, когда в G открыт его полный прообраз $\pi^{-1}(V)$ при естественном эпиморфизме π: $G \to G/K$. По отношению к этой топологии факторгруппа G/K является топологической группой.

Лемма 5. *Для любой инвариантной подгруппы $K \subset G$ естественный эпиморфизм π: $G \to G/K$ является открытым отображением. Для любого открытого эпиморфизма Φ: $G \to H$ факторгруппа G/K группы G по ядру $K = \operatorname{Ker} \Phi$ эпиморфизма Φ изоморфна группе H. Изоморфизм φ: $G/K \to H$ можно выбрать так, чтобы имела место коммутативная диаграмма*

(5)
$$\begin{tikzcd} & G/K \arrow[d, "\varphi"] \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "\Phi"'] & H \end{tikzcd}$$

Доказательство. Если U открыто в G, то множество UK, являясь объединением открытых множеств Ux, $x \in K$, также открыто в G. Но ясно, что $UK = \pi^{-1}(\pi U)$. Поэтому множество πU открыто в G/K. Этим первое утверждение доказано.

Ясно, что формула $\varphi(xK) = \Phi(x)$ корректно определяет алгебраический изоморфизм φ: $G/K \to H$, для которой диаграмма (5) коммутативна. Поэтому нам нужно лишь доказать, что φ является гомеоморфизмом.

Но если V открыто в H, то $\Phi^{-1}(V)$ открыто в G (ибо Φ непрерывно), а так как π открыто, то $\pi(\Phi^{-1}(V)) = \varphi^{-1}(V)$ открыто в G/K. Аналогично, если W открыто в G/K, то $\pi^{-1}(W)$ открыто в G, а так как Φ по условию открыто, то $\Phi(\pi^{-1}(W)) = \varphi(W)$ открыто в H. Следовательно, φ является гомеоморфизмом. □

Определение 3. Пусть G и H — связные топологические (или гладкие) группы. Гомоморфизм Φ: $G \to H$ группы G в группу H мы будем называть *локальным изоморфизмом*, если некоторую окрестность U единицы группы G гомоморфизм Φ биективно отображает на некоторую окрестность V единицы группы H.

Поскольку, согласно лемме 4, группа H порождается окрестностью V, каждый локальный изоморфизм Φ является эпиморфизмом, а поскольку этот эпиморфизм, будучи локальным диффеоморфизмом, открыт, к нему применима лемма 5. Поэтому группа H изоморфна факторгруппе G/K, где $K = \operatorname{Ker}\Phi$. При этом по условию $K \cap U = \{e\}$, что по определению означает, что подгруппа K является *дискретной подгруппой* группы G. Обратно, если K — дискретная инвариантная подгруппа группы G, то естественный эпиморфизм π: $G \to G/K$ является, очевидно, локальным изоморфизмом. В силу леммы 5 этим доказано, что *локальный изоморфизм $G \to H$ существует тогда и только тогда, когда группа H изоморфна факторгруппе G/K группы G по некоторой дискретной инвариантной подгруппе K.*

Примером локального изоморфизма будет, очевидно, любое групповое накрытие $G \to H$. Обратно, произвольный локальный изоморфизм Φ: $G \to H$ будет групповым накрытием, поскольку он ровно накрывает предусмотренную определением 3 окрестность V (в силу леммы 5 без ограничения общности можно считать, что $H = G/K$, где $K = \operatorname{Ker}\Phi$, и что Φ является естественным эпиморфизмом π: $G \to G/K$; но тогда

$$\Phi^{-1}(V) = UK = \bigcup_{x \in K} Ux,$$

где открытые множества $Ux \subset G$ не пересекаются и каждое из них гомеоморфно отображается на U) и потому ровно накрывает окрестность Vh произвольного элемента $h \in H$. Таким образом, *групповые накрытия и локальные изоморфизмы — это одно и то же.*

Ясно, что последнее утверждение справедливо и для групп Ли. Более того, легко видеть, что если нам дано групповое накрытие (=локальный изоморфизм) $G \to H$, где H — топологическая группа, а G — группа Ли, то в H единственным образом вводится гладкость, по отношению к которой H является группой Ли, а отображение $G \to H$ гладким накрытием. В частности, для любой дискретной инвариантной подгруппы K группы Ли G факторгруппа G/K оказывается, тем самым, группой Ли, и потому для любого локального изоморфизма Φ: $G \to H$ групп Ли коммутативная диаграмма (5) является диаграммой над категорией групп Ли.

Все это означает, что для групп Ли (так же как и для топологических групп) справедливо следующее предложение:

Предложение 3. *Отображение* Φ: $G \to H$ *связных групп тогда и только тогда является групповым накрытием, когда:*

а) *оно представляет собой локальный изоморфизм; или, что равносильно, когда*

б) *имеет место коммутативная диаграмма* (5), *где* K — *дискретная инвариантная подгруппа,* π — *естественный эпиморфизм, а* φ — *некоторый изоморфизм.* □

В связи с этим предложением особый интерес приобретает следующая — несколько неожиданная — лемма:

Лемма 6. *Каждая дискретная инвариантная подгруппа* K *произвольной связной топологической* (*и, в частности, гладкой*) *группы* G *принадлежит центру этой группы* (*и, в частности, абелева*).

Доказательство. Пусть $x \in K$, и пусть U — окрестность элемента x, не содержащая никаких других элементов из K. Рассмотрим окрестность V единицы группы G, обладающую тем свойством, что $VxV^{-1} \subset U$. (Существование такой окрестности немедленно вытекает из непрерывности отображения $y \to yxy^{-1}$.) Так как подгруппа K инвариантна и $U \cap K = \{e\}$, то $yxy^{-1} = x$ для любого элемента $y \in V$. Это означает, что *централизатор*

элемента x (подгруппа всех элементов, перестановочных с x) содержит окрестность V. Следовательно, поскольку V порождает G, этот централизатор совпадает с G и, значит, x лежит в центре группы G. □

Следствие. *Фундаментальная группа $\pi_1 G$ каждой связной группы Ли G является абелевой группой.* □

Теперь мы уже можем сформулировать нашу окончательную теорему. В этой теореме мы называем связные группы Ли G и H *локально изоморфными*, если существуют локальные изоморфизмы вида $P \to G$ и $P \to H$, где P — некоторая связная группа Ли.

Теорема 3. *Для любой связной группы Ли G существует локально изоморфная ее односвязная группа Ли $\tilde{G}$, функториально зависящая от G.*

С точностью до изоморфизма группа $\tilde{G}$ определена единственным образом.

Две связные группы Ли G и H тогда и только тогда локально изоморфны, когда группы $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ изоморфны.

Связная группа Ли тогда и только тогда локально изоморфна группе G, когда она изоморфна факторгруппе $\tilde{G}/K$ группы $\tilde{G}$ по дискретной (и потому центральной) инвариантной подгруппе K.

Доказательство. Первые два утверждения являются, в силу предложения 3, лишь иной формулировкой теоремы 2.

Если $P \to G$ и $P \to H$ — локальные изоморфизмы и $\tilde{P} \to P$ — односвязное универсальное накрытие, то составные отображения $\tilde{P} \to G$ и $\tilde{P} \to H$ также будут универсальными накрытиями. Поэтому $\tilde{P} \approx \tilde{G} \approx \tilde{H}$. Обратно, если $\tilde{G} \approx \tilde{H}$, то имеют место локальные изоморфизмы $P \to G$ и $P \to H$ с $P = \tilde{G}$. Это доказывает третье утверждение.

Четвертое утверждение вытекает из третьего в силу предложения 3. □

Из теоремы 3, в частности, следует, что *отношение локальной изоморфности является отношением эквивалентности.*

Группа $\tilde{G}$ называется *односвязной накрывающей группой* группы G.