Лекция 10

ЛОКАЛЬНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ И ИЗОМОРФИЗМЫ ЛОКАЛИЗАЦИЙ.—ТЕОРЕМА КАРТАНА.—ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ДИАГРАММА КАТЕГОРИЙ И ФУНКТОРОВ.—РЕДУКЦИЯ ТЕОРЕМЫ КАРТАНА.—ГЛОБАЛИЗУЕМОСТЬ ВЛОЖИМЫХ ГРУПУСКУЛ.—СВЕДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАРТАНА К ТЕОРЕМЕ АДО.

Теорема 3 предыдущей лекции дает нам вполне удовлетворительное описание классов локально изоморфных групп Ли, но имеет тот недостаток, что формально это не те классы, которые были введены в лекции 3, т. е. не классы групп Ли, изоморфных в категории GR-LOC групускул. Поэтому мы должны дополнительно доказать совпадение обоих понятий локальной изоморфности. Ключом к этому является следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть G и H — связные группы Ли, U — связная окрестность единицы в группе G и $\varphi\colon U \to H$ — такое гладкое отображение, что $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для любых элементов $x, y \in U$, для которых $xy \in U$. Тогда, если группа G односвязна, то существует единственный гомоморфизм $\Phi\colon G \to H$, продолжающий отображение φ, т. е. такой, что*

$$\Phi\big|_U = \varphi.$$

Для доказательства этого предложения мы рассмотрим подмножество D произведения $G \times G$, состоящее из всех пар $(x_1, x_2) \in G \times G$, для которых $x_1 x_2^{-1} \in U$. Это подмножество, очевидно, открыто и содержит диагональ $\Delta \subset G \times G$. Так как D является объединением связных множеств вида $\{x\} \times Ux$, $x \in G$, каждое из которых пе-

ресекает диагональ Δ, также являющуюся связным множеством (гомеоморфным группе G), то *множество D связно.*

Подмножество V группы G мы назовем *малым*, если $V \times V \subset D$, т. е. если $VV^{-1} \subset U$, а подмножество W произведения $G \times H$ групп G и H мы назовем *отмеченным*, если для любой точки $(x, y) \in W$ существует в G такая малая окрестность V точки x, что

$$(v, \varphi(vx^{-1})y) \in W \text{ для любой точки } v \in V.$$

Ясно, что:

а) пустое множество отмечено;

б) все произведение $G \times H$ отмечено;

в) объединение любого семейства отмеченных множеств отмечено;

г) пересечение любого конечного семейства отмеченных множеств отмечено.

Поэтому отмеченные множества мы можем принять за открытые множества некоторой новой топологии на произведении $G \times H$. Снабженное этой топологией произведение $G \times H$ мы обозначим символом $\tilde{X}$.

Пусть

$$\pi\colon \tilde{X} \to G$$

— отображение, определенное формулой

$$\pi(x, y) = x, \qquad (x, y) \in \tilde{X}.$$

Ясно, что для любого открытого множества $V \subset G$ множество $\pi^{-1}(V)$ отмечено, а для любого отмеченного множества $W \subset X$ множество $\pi(W)$ открыто. Это означает, что отображение π непрерывно и открыто.

Для любого малого открытого множества $V \subset G$, любого элемента $x_0 \in V$ и любого элемента $y_0 \in H$ обозначим символом $W(x_0, V, y_0)$ множество всех пар вида $(x, \varphi(xx_0^{-1})y_0)$, где $x \in V$. Легко видеть, что множество $W(x_0, V, y_0)$ отмечено. Действительно, если $(x, y) \in W(x_0, V, y_0)$, т. е. если $x \in V$ и $y = \varphi(xx_0^{-1})y_0$, то для любой точки $v \in V$ имеет место равенство

$$\varphi(vx^{-1})y = \varphi(vx^{-1})\varphi(xx_0^{-1})y_0 = \varphi(vx_0^{-1})y_0,$$

показывающее, что $(v, \varphi(vx^{-1})y) \in W(x_0, V, y_0)$.

Ясно, что $(x_0, y_0) \in W(x_0, V, y_0)$, т. е. $W(x_0, V, y_0)$ является окрестностью точки (x_0, y_0) в пространстве $\tilde{X}$. Очевидно, что π гомеоморфно отображает эту окрестность на окрестность V. С другой стороны, легко видеть, что множество $\pi^{-1}(V)$ является объединением всевозможных множеств вида $W(x_0, V, y)$, где $x_0 \in W$ фиксировано, а $y \in H$ пробегает всю группу H, причем никакие два из этих множеств не пересекаются (если существует точка $(x, y) \in W(x_0, V, y_1) \cap W(x_0, V, y_2)$, то $\varphi(xx_0^{-1})y_1 = y = \varphi(xx_0^{-1})y_2$, и потому $y_1 = y_2$).

Все это означает, что каждое малое открытое множество $V \subset G$ ровно накрыто отображением π. Поскольку любой элемент группы G обладает, очевидно, малой окрестностью, тем самым доказано, что *отображение* π: $\tilde{X} \to G$ *является слабым накрытием.* Поэтому, согласно лемме 2, лекции 8 для любой компоненты $\tilde{X}_0$ пространства $\tilde{X}$ *отображение*

$$\pi_0 = \pi\big|_{\tilde{X}_0}: \tilde{X}_0 \to G$$

является накрытием. Мы выберем за $\tilde{X}_0$ компоненту, содержащую точку (e_G, e_H), где e_G и e_H — единицы групп G и H соответственно.

Вспомним теперь, что по условию группа G односвязна, и потому любое ее накрытие тривиально, т. е. является гомеоморфизмом. В частности, гомеоморфизмом является накрытие π_0. Обратный гомеоморфизм π_0^{-1} каждую точку $x \in G$ переводит в некоторую точку пространства $\tilde{X}_0$, имеющую вид (x, y), где $y \in H$. Следовательно, положив $\Phi(x) = y$, мы получим некоторое однозначно определенное непрерывное отображение

$$\Phi: G \to H.$$

Таким образом, для любой точки $x \in G$ точка $\Phi(x) \in H$ однозначно характеризуется тем, что $(x, \Phi(x)) \in \tilde{X}_0$. Поэтому, в частности, $\Phi(e_G) = e_H$.

Пусть D^* — подмножество множества D, состоящее из всех точек $(x_1, x_2) \in D$, для которых

$$\Phi(x_2) = \varphi(x_2 x_1^{-1})\Phi(x_1). \tag{1}$$

Ясно, что $\Delta \subset D^*$, так что множество D^* не пусто. Кроме того, легко видеть, что *для любого малого связного открытого множества $V \subset G$ имеет место включение*

$$V \times V \subset D^*.$$

Действительно, для любой точки $x_0 \in V$ отмеченное множество $W(x_0, V, \Phi(x_0))$ связно (будучи гомеоморфным множеству V) и содержит точку $(x_0, \Phi(x_0)) \in \tilde{X}_0$. Поэтому $W(x_0, V, \Phi(x_0)) \subset \tilde{X}_0$, т. е. для любой точки $x \in V$ точка $(x, \varphi(xx_0^{-1})\Phi(x_0))$ лежит в $\tilde{X}_0$. Но по сказанному выше каждая точка из $\tilde{X}_0$ единственным образом представляется в виде $(x, \Phi(x))$. Поэтому $\Phi(x) = \varphi(xx_0^{-1})\Phi(x_0)$, что равносильно включению $(x_0, x) \in D^*$. Следовательно, $V \times V \subset D^*$. □

Далее, легко видеть, что *если произведение $V \times V'$ двух связных малых открытых множеств V, V' пересекается с D^*, то оно содержится в D^**. Действительно, если $(x, x_0) \in D^*$, $(x_0, x_0') \in D^*$ и $(x_0', x') \in D^*$, то $(x, x') \in D^*$ (ибо $\Phi(x') = \varphi(x'x_0'^{-1})\Phi(x_0') = \varphi(xx_0'^{-1})\varphi(x_0'x_0^{-1})\Phi(x_0) = \varphi(x'x_0^{-1})\varphi(x_0x^{-1})\Phi(x) = \varphi(x'x^{-1})\Phi(x)$). С другой стороны, если $(x_0, x_0') \in V \times V'$ и $(x, x') \in V \times V'$, то по доказанному $(x, x_0) \subset D^*$ и $(x_0', x') \in D^*$. Поэтому, если, кроме того, $(x_0, x_0') \in D^*$, то $(x, x') \in D^*$. □

Поскольку множества вида $V \times V'$ составляют, очевидно, базу подпространства D, отсюда непосредственно вытекает, что множество D^* открыто и замкнуто в D. Поскольку D связно, а D^* не пусто, это возможно только тогда, когда $D^* = D$. Таким образом, *равенство* (1) *имеет место для любой точки* $(x_1, x_2) \in D$.

Теперь у нас все уже готово для доказательства предложения 1.

Доказательство предложения 1. Единственность гомоморфизма Φ немедленно вытекает из того, что (см. лемму 3 лекции 9) группа G порождается окрестностью U. Поэтому нам нужно доказать лишь его существование.

Покажем, что искомым гомоморфизмом является построенное выше отображение Φ.

Положив в равенстве (1) $x_1 = e_G$ и $x_2 = x$, мы немедленно получим, что $\Phi(x) = \varphi(x)$ для любого элемента $x \in U$. Поэтому предложение 1 будет доказано, если мы

покажем, что отображение Φ является гомоморфизмом, т. е. что для любых элементов $x, x' \in G$ имеет место формула

(2) $$\Phi(x, x') = \Phi(x) \cdot \Phi(x').$$

С этой целью мы заметим, что при $x \in U$ равенство (2) имеет место при любом $x' \in G$ (ибо $(x', xx') \in D$, и потому $\Phi(xx') = \varphi(x)\Phi(x') = \Phi(x)\Phi(x')$). С другой стороны, поскольку группа G связна, она порождается окрестностью единицы $U \cap U^{-1}$, и потому каждый элемент $x \in G$ может быть представлен в виде

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in U$. Поэтому очевидная индукция показывает, что

(3) $$\Phi(xx') = \Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n)\Phi(x')$$

для любого элемента $x' \in G$. В частности, при $x' = e_G$

$$\Phi(x) = \Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n),$$

что вместе с (3) доказывает (2). □

Фигурирующее в предложении 1 отображение φ представляет собой не что иное, как гомоморфизм групускулы G_{loc} в групускулу H_{loc}, где G_{loc} и H_{loc} — образы групп G и H при функторе локализации

(4) $$\mathrm{GR}_0\text{-DIFF} \to \mathrm{GR\text{-}LOC},$$

а отображение Φ — гомоморфизм группы G в группу H, переходящий под воздействием функтора (4) в гомоморфизм φ. Следовательно, предложение 3 является не чем иным, как утверждением, что — в случае, когда группа G односвязна, — для групп G и H выполнено условие полной унивалентности функтора (4). Поэтому, если мы ограничимся полной подкатегорией GR_{00}-DIFF категории GR_0-DIFF, состоящей из односвязных групп Ли, то это условие будт выполнено без всяких оговорок. Таким образом, *на категории* GR_{00}-DIFF *функтор локализации*

(5) $$\mathrm{GR}_{00}\text{-DIFF} \to \mathrm{GR\text{-}LOC}$$

вполне унивалентен.

Но легко видеть, что любой вполне унивалентный функтор устанавливает биективное соответствие между

изоморфизмами и потому, в частности, только изоморфные объекты переводит в изоморфные. Применительно к функтору (5) это означает, что *односвязные группы Ли тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны их локализации.*

Отсюда непосредственно вытекает утвердительный ответ на вопрос, поставленный в начале лекции: *связные группы Ли тогда и только тогда локально изоморфны в смысле лекции* 3 (*т. е. имеют изоморфные локализации*), *когда они локально изоморфны в смысле теоремы* 3 *лекции* 9. Действительно, каждый локальный изоморфизм в смысле определения 3 лекции 9 будет, очевидно, изоморфизмом локализаций. Поэтому, в частности, локализации любой группы Ли G и ее универсальной накрывающей группы $\tilde{G}$ изоморфны:

$$G_{\mathrm{loc}} \approx \tilde{G}_{\mathrm{loc}}.$$

Следовательно, если $G_{\mathrm{loc}} \approx H_{\mathrm{loc}}$, то $\tilde{G}_{\mathrm{loc}} \approx \tilde{H}_{\mathrm{loc}}$ и, значит, по сказанному выше, $\tilde{G} \approx \tilde{H}$, так что группы G и H будут локально изоморфны. □

Таким образом, *в теореме* 3 *лекции* 9 *под «локальной изоморфностью» групп Ли можно понимать изоморфность их локализаций.*

Это означает, что эта теорема дает полный ответ на вопрос об обратимости функтора локализации (4):

$$G_{\mathrm{loc}} \approx H_{\mathrm{loc}} \text{ тогда и только тогда, когда } \tilde{G} \approx \tilde{H}.$$

В частности, *на категории* GR_{00}-DIFF *односвязных групп Ли функтор* (5) *обратим* (с точностью до изоморфизма).

Однако этот результат не может считаться полным, поскольку остается неизвестным, является ли каждая групускула Ли локализацией некоторой группы Ли, т. е. осуществляет ли функтор (5) эквивалентность категорий.

Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным:

Теорема 1 (теорема Картана). *Функтор* (5) *осуществляет эквивалентность категории* GR_{00}-DIFF *связных односвязных групп Ли и категории* GR-LOC *групускул Ли.*

Следствие. *Категория связных односвязных групп Ли эквивалентна категории конечномерных алгебр Ли над полем* $\mathbb{R}$. *Эквивалентность осуществляется функтором Ли.*

Это следствие является вершиной всей развиваемой нами теории. Оно позволяет свести любой вопрос, касающийся связных и односвязных групп Ли, к соответствующей проблеме об алгебрах Ли, которая, как правило, существенно проще, являясь «линейным» аналогом исходной задачи.

Все рассмотренные нами категории и функторы составляют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GR}_{00}\text{-DIFF} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathrm{GR}_0\text{-DIFF} \arrow[ur, "2"] & \mathrm{GR\text{-}LOC} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{ALG\text{-}LIE} \\
\mathrm{GR\text{-}DIFF} \arrow[u, "1"] \arrow[ur] & & \mathrm{GRIE} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

в которой утолщенными стрелками обозначены функторы, осуществляющие эквивалентность категорий.

Цифрой 1 в этой диаграмме обозначен функтор перехода к компоненте единицы. Он отождествляет группы, являющиеся расширениями данной связной группы Ли посредством произвольной дискретной группы.

Цифра 2 означает функтор перехода к универсальной накрывающей группе. Он отождествляет группы, являющиеся факторгруппами данной односвязной группы Ли по дискретным (центральным) инвариантным подгруппам.

Построенная диаграмма содержит всю существенную информацию о взаимоотношениях между группами и алгебрами Ли.

Таким образом, для завершения всей теории нам осталось доказать лишь теорему Картана. Однако ситуация с этой теоремой оказывается очень своеобразной и, можно сказать, совершенно неудовлетворительной.

Естественный путь доказательства теоремы Картана состоит в построении некоторого функтора из категории групускул (или, что равносильно, алгебр Ли) в категорию односвязных групп Ли, который был бы квазиобратен к функтору локализации. Однако до сих пор, несмо-

тря на, надо думать, многочисленные попытки (во всяком случае, в Москве этим занимались довольно много), никакой явной «естественной» (опирающейся лишь на основные понятия) конструкции такого функтора никем придумано не было и, скажем, Серр полагает, что ее и не существует (см. [7] с. 259; заметим кстати, что Серр называет теорему Картана «третьей теоремой Ли»). Все известные доказательства (впрочем, по существу, их только два) теоремы Картана не имеют функториального (=«естественного») характера и вызывают внутренний психологический протест. Здесь последнее слово явно еще не сказано.

Упомянутые доказательства теоремы Картана опираются на следующую теоретико-категорную лемму:

Лемма 1. Пусть $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ — *произвольные категории, и пусть* F: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — *вполне унивалентный функтор из категории* $\mathbf{A}$ *в категорию* $\mathbf{B}$. *Если для любого объекта* B *категории* $\mathbf{B}$ *существует такой объект* A *категории* $\mathbf{A}$, *что объект* FA *изоморфен объекту* B, *то функтор* F *квазиобратим (осуществляет эквивалентность категорий).*

Доказательство. Для каждого объекта B категории $\mathbf{B}$ произвольно выберем и зафиксируем предусмотренный условием леммы объект A категории $\mathbf{A}$ и обозначим его символом GB. Зафиксируем также произвольный изоморфизм θ_B: $FGB \to B$. В силу полной унивалентности функтора F для любого морфизма β: $B \to B_1$ существует один и только один морфизм α: $GB \to GB_1$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} FGB \arrow[r, "F\alpha"] \arrow[d, "\theta_B"'] & FGB_1 \arrow[d, "\theta_{B_1}"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

Мы положим $\alpha = G\beta$.

Из единственности морфизма α немедленно следует, что построенные соответствия $B \longmapsto GB$ и $\beta \longmapsto G\beta$ составляют функтор G: $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$, причем изоморфизмы θ_B будут, очевидно, составлять изоморфизм функтора FG с тождественным функтором $\mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$. Кроме того, для любого объекта A категории $\mathbf{A}$ равенство $F(\alpha_A) = \theta_{FA}$ определяет

некоторый морфизм α_A: $GFA \to A$, являющийся изоморфизмом, причем, как легко видеть, изоморфизмы α_A составляют изоморфизм функтора GF с функтором Id .

Следовательно, функтор G квазиобратен функтору F. □

В силу этой общей леммы для доказательства теоремы Картана достаточно для любой групускулы Ли построить хотя бы одну группу Ли, окрестностью единицы которой является эта групускула (или групускула, ей изоморфная). При этом (что и определяет успех построения) можно не следить за функториальностью и допускать в конструкции любой произвол.

Определение 1. Мы будем говорить, что групускула Ли *глобализуема*, если она изоморфна локализации некоторой группы Ли (т. е. изоморфна окрестности единицы этой группы).

Таким образом, для доказательства теоремы Картана нам нужно только доказать, что *любая групускула Ли глобализуема.*

Определение 2. Групускула Ли K называется *вложимой*, если она является подгрупускулой некоторой группы Ли G, т. е., точнее, локализации G_{loc} этой группы.

Первым шагом в нашем доказательстве теоремы Картана будет следующее предложение:

Предложение 2. *Любая вложимая групускула Ли K глобализуема.*

Доказательству этого предложения мы предпошлем доказательство его аналога для топологических групп.

Пусть G — связная топологическая группа и K — такое ее подпространство, содержащее единицу e группы G, что $xy \in K$ и $x^{-1} \in K$ для любых элементов $x, y \in K \cap \cap U_0$, где U_0 — некоторая окрестность единицы группы G.

Лемма 2. *Существует топологическая группа H и инъективный гомоморфизм i: $H \to G$, гомеоморфно отображающий некоторую окрестность V_0 единицы группы H на некоторую окрестность единицы e в подпространстве K, т. е. на множество вида $K \cap U_{00}$, где U_{00} — окрестность единицы e в группе G.*

Доказательство. Мы будем говорить, что подмножество $A \subset G$ *отделено от e*, если в G существует та-

кая окрестность U точки e, что $A \cap U = \varnothing$. Ясно, что *если множества A и B отделены от e, то множество $A \cup B$ также отделено от e.*

Для любого элемента $g \in G$ мы символом A^g будем обозначать множество $g^{-1}Ag$ всех элементов вида $g^{-1}ag$, $a \in A$. Очевидно, что *множество A^g тогда и только тогда отделено от e, когда от e отделено множество A.*

Пусть теперь H — множество всех элементов $g \in G$, для которых симметрическая разность

$$K^g \triangle K = (K^g \setminus K) \cup (K \setminus K^g) = (K^g \cup K) \setminus (K^g \cap K)$$

отделена от e. Поскольку $K^{g^{-1}} \triangle K = (K^g \triangle K)^{g^{-1}}$ и $K^{g_1 g_2} \triangle K \subset (K^{g_1} \triangle K)^{g_2} \cup (K^{g_2} \triangle K)$, это множество является подгруппой группы G (или, точнее, соответствующей абстрактной группы G_{abstr}).

Пусть U_{00} — такая окрестность единицы e группы G, что $xy \in U_0$ для любых элементов x, $y \in U_{00}$. Тогда $g^{-1}xg \in K$ и $gxg^{-1} \in K$ для любых элементов x, $g \in K \cap U_{00}$. Поэтому, если $g \in K \cap U_{00}$, $y \in K^g \cap U_{00}^g$, и, значит, $x = gyg^{-1} \in K \cap U_{00}$, то $y = g^{-1}xg \in K$. Следовательно, $K^g \cap U_{00}^g \subset K \cap U_{00}$, и потому $K^g \cap V_0 \subset K \cap V_0$, где $V_0 = U_{00} \cap U_{00}^g$. Обратно, если $x \in K \cap U_{00}$, то $y = gxg^{-1} \in K$ и, значит, $x = g^{-1}yg \in K^g$. Следовательно, $K \cap U_{00} \subset K^g \cap U_{00}$, и потому $K \cap V_0 \subset K^g \cap V_0$. Таким образом, $K \cap V_0 = K^g \cap V_0$, т. е. $(K^g \triangle K) \cap V_0 = \varnothing$. Этим доказано, что *для любого элемента $g \in K \cap U_{00}$ множество $K^g \triangle K$ отделено от e*, т. е. что $g \in H$. Следовательно, $K \cap U_{00} \subset H$.

Мы введем в H топологию, принимая за окрестности единицы всевозможные множества вида $V = K \cap U$, где $U \subset U_{00}$ — произвольная окрестность единицы в G, содержащаяся в U_{00}. Автоматическая проверка показывает, что тем самым в H действительно вводится топология, по отношению к которой H является топологической группой. При этом отображение вложения i: $H \to G$ будет инъективным гомоморфизмом топологических групп, а на окрестности $V_0 = K \cap U_{00}$ это отображение будет гомеоморфизмом.

Этим лемма 1 полностью доказана. □

Заметим, что, вообще говоря, H не будет подгруппой группы G, т. е. отображение $i\colon H \to G$ не будет гомеоморфизмом на $i(H)$. Например, если $K = \{e\}$, то H является группой G в дискретной топологии.

Теперь мы уже можем доказать предложение 2.

Доказательство предложения 2. Пусть групускула K является подгрупускулой группы Ли G, и, значит, (см. лекцию 7) в G существует такая карта $(U_0, h) = (U_0, x^1, \ldots, x^n)$, что $K \cap U_0$ определяется уравнениями

$$x^{m+1} = 0, \ldots, x^n = 0.$$

Рассматривая G как топологическую группу, мы можем применить к K лемму 2. Таким образом, согласно этой лемме существует топологическая группа H и инъективный непрерывный гомоморфизм $i\colon H \to G$, гомеоморфно отображающий некоторую окрестность V_0 единицы группы H на множество $K \cap U_{00}$, где U_{00} — окрестность единицы в группе G. При этом без ограничения общности мы можем предполагать, что $U_{00} = U_0$.

Тогда пара $(V_0, k) = (V_0, y^1, \ldots, y^m)$, где $y^j(v) = x^j(iv)$, $j = 1, \ldots, n$, будет, очевидно, некоторой картой на H, содержащей элемент $e \in V$, а потому для любого элемента $a \in H$ пара $(aV_0, k \circ L_{a^{-1}})$ — картой на H, содержащей элемент a. Если $aV_0 \cap bV_0 \neq \varnothing$, то на $(k \circ L_{a^{-1}})(aV_0 \cap bV_0) \subset \mathbb{R}^m$ отображение $(k \circ L_{b^{-1}}) \circ (k \circ L_{a^{-1}})^{-1} = k \circ L_{b^{-1}a} \circ k^{-1}$ будет (ввиду того, что $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$) ограничением гладкого отображения $h \circ L_{i(b^{-1}a)} \circ h^{-1}$ и, значит, само будет гладким отображением. Этим доказано, что все карты вида $(aV_0, k \circ L_{a^{-1}})$ согласованы друг с другом и потому составляют некоторый атлас на H. Автоматическая проверка показывает, что по отношению к гладкости, определяемой этим атласом, группа H является группой Ли, а отображение i — гладким гомоморфизмом, диффеоморфно отображающим окрестность V_0 на $K \cap U_0$. Таким образом, $H_{\text{loc}} \approx K$, так что групускула K глобализуема. □

Пусть теперь K — произвольная групускула Ли, и пусть $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}(K)$ — ее алгебра Ли.

В лекции 19 мы докажем следующую теорему:

Теорема Адо. Любая конечномерная алгебра Ли (над произвольным полем $\mathbb{K}$ *характеристики* 0) *изоморфна некоторой матричной алгебре Ли.*

Согласно этой теореме мы без ограничения общности можем считать, что $\mathfrak{k}$ является матричной алгеброй Ли и, следовательно, что соответствующая групускула $E\mathfrak{k} \approx K$ состоит из матриц, т. е. является подгрупускулой группы Ли $\mathrm{GL}(n)$. Таким образом, групускула K вложима и потому глобализуема.

Это рассуждение сводит теорему Картана к теореме Адо. Мы докажем теорему Адо (а, значит, и теорему Картана) в лекциях 17—20, а пока обратимся к изучению подгрупп групп Ли.