

Лекция 11

ПОДМНОГООБРАЗИЯ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ.— ПОДГРУППЫ ГРУПП ЛИ.— ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПОДРАССЛОЕНИЙ.— МАКСИМАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ.— ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.— ЛОКАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ.— ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТРУКТУРЫ ЛОКАЛЬНО ВЫПРЯМЛЯЕМОГО ПОДМНОГООБРАЗИЯ СО СЧЕТНОЙ БАЗОЙ.— ПОДМНОГООБРАЗИЯ МНОГООБРАЗИЙ СО СЧЕТНОЙ БАЗОЙ.— СВЯЗНЫЕ ГРУППЫ ЛИ ИМЕЮТ СЧЕТНУЮ БАЗУ.— ЛОКАЛЬНАЯ ВЫПРЯМЛЯЕМОСТЬ МАКСИМАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ.— ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Двумерный тор T^2 мы можем представлять себе как факторгруппу аддитивной группы \mathbb{R}^2 по ее решетке \mathbb{Z}^2 , состоящей из точек с целыми координатами. Поэтому любая прямая в \mathbb{R}^2 , проходящая через точку $(0, 0)$, даст нам некоторую подгруппу в T^2 . Если тангенс угла наклона прямой в \mathbb{R}^2 рационален (и равен, скажем, m/n), то ее образ в T^2 будет окружностью, m раз обогающей тор по меридиану и n раз по параллели. Однако если этот тангенс иррационален, то соответствующая подгруппа в T^2 (она называется *иррациональной обмоткой тора*) будет всюду плотна в T^2 и в индуцированной топологии каждая окрестность любой ее точки будет содержать окрестность, являющуюся дизъюнктным объединением счетного числа отрезков. Следовательно, эта подгруппа многообразием не будет.

Этот пример объясняет, почему мы принимаем следующее — на первый взгляд излишне общее — определение:

Определение 1. Гладкое многообразие N называется подмногообразием гладкого многообразия M , если:

а) любая точка из N лежит в M , так что определено отображение вложения $\iota: N \rightarrow M$;

б) отображение $\iota: N \rightarrow M$ гладко (и потому, в частности, непрерывно);

в) дифференциал $(d\iota)_a: T_a(N) \rightarrow T_a(M)$ отображения ι в каждой точке $a \in N$ является мономорфизмом.

Обычно каждый вектор $A \in T_a(N)$ отождествляют с вектором $(d\iota)_a A$, т. е. считают $T_a(N)$ подпространством пространства $T_a(M)$.

Ясно, что любое открытое подмногообразие является подмногообразием в смысле определения 1. Такое подмногообразие является подпространством, т. е. отображение вложения ι является гомеоморфизмом на свой образ. Однако, скажем, для иррациональной обмотки тора это уже не так.

Определение 2. Группа Ли называется подгруппой группы Ли G , если многообразие H_{diff} является подмногообразием многообразия G_{diff} , а группа H_{abstr} — подгруппой группы G_{abstr} . Подгруппа H группы Ли G называется инвариантной подгруппой, если подгруппа H_{abstr} инвариантна.

В частности, иррациональные обмотки тора являются его подгруппами.

Пусть $\mathfrak{g} = I(G)$ и $\mathfrak{h} = I(H)$ — алгебры Ли групп Ли G и H . Если H является подгруппой группы Ли G , то гомоморфизм $I(\iota): \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$, отождествляемый с отображением $d(\iota)_e: T_e(H) \rightarrow T_e(G)$, является мономорфизмом. Обычно алгебру Ли \mathfrak{h} отождествляют с ее образом в алгебре \mathfrak{g} при этом мономорфизме. Таким образом, в силу этого отождествления алгебры Ли подгруппы группы Ли G являются подалгебрами алгебры Ли \mathfrak{g} группы G .

Соответствие $H \mapsto \mathfrak{h}$ между подгруппами $H \subset G$ и подалгебрами $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ мы будем называть соответствием Ли. Поскольку алгебры Ли группы и ее компоненты единицы совпадают, естественно рассматривать только связные подгруппы H . Оказывается, что при ограничении

связными подгруппами соответствие Ли биективно. Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Соответствие Ли $H \mapsto \mathfrak{h}$ является биективным соответствием между связными подгруппами группы Ли G и подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathcal{I}(G)$.

Конечно, в этой теореме группу G можно считать связной.

Доказательство теоремы 1 мы начнем несколько издалека.

Пусть M — гладкое многообразие и E — интегрируемое подрасслоение касательного расслоения $T(M)$ (см. лекцию 7).

Определение 3. Подмногообразие N многообразия M называется *интегральным многообразием* подрасслоения E , если отображение вложения $i: N \rightarrow M$ интегрально по отношению к E , т. е. если

$$E_a = T_a(N)$$

для любой точки $a \in N$.

Легко видеть, что *расслоение E тогда и только тогда интегрируемо* (в смысле определения 10 лекции 7), когда через любую точку a многообразия M проходит хотя бы одно интегральное многообразие этого расслоения. Действительно, ясно, что это условие достаточно для интегрируемости. Обратно, пусть расслоение E интегрируемо. Тогда оно и вполне интегрируемо (следствие из предложения 6 лекции 7), т. е. (определение 13 лекции 7) многообразие M обладает атласом, состоящим из таких карт (U, x^1, \dots, x^n) , что для любой точки $a \in U$ векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$ составляют базис пространства E_a . Для каждой точки $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ обозначим через V_ξ множество точек $a \in U$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$x^{m+1} = \xi^1, \dots, x^n = \xi^{n-m}.$$

Это множество (когда оно не пусто) естественным образом наделяется структурой гладкого многообразия, диффеоморфного некоторому открытому множеству в \mathbb{R}^m . Очевидно, что это многообразие является подмногообра-

зием в U (а значит, и в M), причем в любой точке $a \in V_\xi$ подпространство $T_a(V_\xi)$ натянуто на векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$. Следовательно, $T_a(V_\xi) = E_a$, так что V_ξ является интегральным многообразием подраслоения E . Для завершения доказательства остается заметить, что для любой точки $a \in U$ подмногообразие V_ξ с $\xi = (x^{m+1}(a), \dots, x^n(a))$ содержит a . \square

Подмногообразия вида V_ξ в дальнейшем будут встречаться довольно часто. Мы будем называть их *плоскими подмногообразиями* карты U .

Мы будем говорить, что подмногообразия N_1 и N_2 многообразия M , имеющие общую точку $a \in M$, локально совпадают в a , если существует такое подмногообразие N_0 , являющееся открытым подмногообразием как в N_1 , так и в N_2 , что $a \in N_0$.

Легко видеть, что любые два интегральных многообразия N_1 и N_2 интегрируемого подраслоения E , проходящие через точку a , локально совпадают в a . Действительно, пусть $\iota_1: N_1 \rightarrow M$ и $\iota_2: N_2 \rightarrow M$ — отображения вложения. Согласно лемме 2 лекции 7 существуют такие окрестности V_1 и V_2 точки a в многообразиях N_1 и N_2 и такой диффеоморфизм $\beta: V_2 \rightarrow V_1$, что $\iota_2 = \iota_1 \circ \beta$ на V_1 . Но, поскольку ι_1 и ι_2 являются ограничениями тождественного отображения $M \rightarrow M$, равенство $\iota_2 = \iota_1 \circ \beta$ возможно только тогда, когда $\beta = \text{id}$ (и, значит, $V_1 = V_2$). Этим все доказано, поскольку равенство $\iota_1 = \iota_2$ в некоторой окрестности точки a как раз и означает, что многообразия N_1 и N_2 локально совпадают в a . \square

Для произвольного интегрируемого векторного раслоения E рассмотрим совокупность \mathfrak{X} всех его интегральных многообразий. Согласно сказанному выше, если два подмногообразия $N_1, N_2 \in \mathfrak{X}$ пересекаются, то для любой точки $a \in N_1 \cap N_2$ существует такое подмногообразие N_0 , что $a \in N_0 \subset N_1 \cap N_2$ и N_0 открыто как в N_1 так и в N_2 . Поскольку $N_0 \in \mathfrak{X}$ (открытое подмногообразие многообразия из \mathfrak{X} , лежит, очевидно, в \mathfrak{X}), это показывает, что семейство \mathfrak{X} мы можем принять за базу некоторой новой топологии на M (открытыми множествами которой являются объединения подмногообразий из \mathfrak{X}).

Многообразие M , снабженное этой топологией, мы обозначим символом M_E .

Легко видеть, что тождественное отображение $M_E \rightarrow M$ непрерывно, т. е. любое открытое множество $U \subset M$ открыто и в M_E . Действительно, пусть $a \in U$, и пусть $a \in N \in \mathfrak{N}$. Так как N локально связно, то компонента N_0 множества $N \cap U$, содержащая точку a , открыта в N , т. е. является открытым подмногообразием многообразия N . Поэтому $N_0 \in \mathfrak{N}$. Это показывает, что U является объединением многообразий из \mathfrak{N} и потому открыто в M_E . \square

Далее, легко видеть, что топология пространства M_E индуцирует на любом многообразии $N \in \mathfrak{N}$ (являющемся, по определению, открытым подмножеством пространства M_E) исходную топологию многообразия N , так что, иными словами, каждое интегральное многообразие $N \in \mathfrak{N}$ является открытым подпространством пространства M_E . Действительно, любая окрестность точки $a \in N$ в топологии многообразия N является интегральным многообразием из \mathfrak{N} и, значит, открытым множеством в M_E . Обратно, любая окрестность U точки a в топологии, индуцированной топологией пространства M_E , содержит такое интегральное многообразие $N_1 \in \mathfrak{N}$, что $a \in N_1$. Поскольку многообразия N и N_1 локально совпадают в a , существует многообразие $N_0 \in \mathfrak{N}$, содержащее точку a и являющееся открытым подмногообразием как многообразия N , так и многообразия N_1 . Многообразие N_0 и будет окрестностью точки a в топологии многообразия N , содержащейся в окрестности U . Таким образом, исходная топология многообразия N совпадает с топологией, индуцированной на N топологией пространства M_E . \square

Пусть теперь W — произвольная компонента связности пространства M_E (снабженная индуцированной топологией). Тогда для любой точки $a \in W$ каждое связное интегральное многообразие N , содержащее эту точку, содержится в W (ибо N связно и как подпространство в M_E).

В частности, в W содержится произвольная координатная окрестность U точки a в многообразии N . Так как U , являясь интегральным многообразием, открыто в M_E , то U будет окрестностью точки a и в W . Это позволяет каждой карте (U, h) в точке a на многообразии N счи-

тать картой и на W . Тем самым мы, очевидно, получаем на W некоторую гладкость, согласованную с топологией.

Построенное гладкое многообразие \tilde{W} будет, очевидно, связным интегральным многообразием подрасслоения E , содержащим точку a и обладающим тем свойством, что любое связное интегральное многообразие подрасслоения E , содержащее точку a , содержится в \tilde{W} и открыто в W .

Определение 4. Интегральное многообразие подрасслоения E называется *максимальным*, если оно связно и не содержит ни в каком другом связном интегральном многообразии этого подрасслоения.

В частности, мы видим, что построенное интегральное многообразие W максимально.

Этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. Чрез любую точку $a \in M$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие W интегрируемого подрасслоения E . Любое связное интегральное многообразие подрасслоения E , проходящее через точку a , является открытым подмногообразием многообразия W . \square

Возвращаясь к группам Ли, рассмотрим произвольную подалгебру \mathfrak{h} алгебры Ли \mathfrak{g} связной группы Ли G . Напомним, что символом $\mathfrak{a}(G)$ мы обозначаем бесконечномерную алгебру Ли всех векторных полей на G . Она является модулем над алгеброй $\mathcal{F}(G)$ всех гладких функций на G . Для любого подрасслоения $E \subset T(G)$ векторные поля, лежащие в E , образуют подмодуль $\mathfrak{a}(E)$ модуля $\mathfrak{a}(G)$. Вместе с тем алгебра Ли \mathfrak{g} , а потому и алгебра Ли I являются подалгебрами в $\mathfrak{a}(G)$. Поэтому появившийся подалгеброй \mathfrak{h} подмодуль $\mathcal{F}(G)\mathfrak{h}$ будет подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}(G)$. При этом $\mathcal{F}(G)\mathfrak{g} = \mathfrak{a}(G)$.

В качестве первого шага в доказательстве теоремы 1 мы покажем, что для любой подалгебры \mathfrak{h} алгебры Ли \mathfrak{g} существует такое подрасслоение $E^{\mathfrak{h}}$ касательного расслоения $T(G)$, что

$$(1) \quad \mathfrak{a}(E^{\mathfrak{h}}) = \mathcal{F}(G)\mathfrak{h}.$$

Действительно, пусть $E_a^{\mathfrak{h}}$ — подпространство пространства $T_a(G)$, состоящее из векторов вида X_a , где $X \in \mathfrak{h}$ (здесь мы пользуемся интерпретацией алгебры \mathfrak{g} как алгебры левоинвариантных векторных полей; в интерпрета-

ции $\mathfrak{g} = T_e(G)$ подпространством $E_a^{\mathfrak{b}}$ является образ пространства $\mathfrak{h} \subset T_e(G)$ при отображении $(dL_a)_e$. Автоматически проверяется, что объединение

$$E^{\mathfrak{b}} = \bigcup_{a \in \alpha} E_a^{\mathfrak{b}}$$

этих подпространств является подрасслоением расслоения $T(G)$, обладающим свойством (1). \square

Мы будем говорить, что подрасслоение $E^{\mathfrak{b}}$ порождено подалгеброй \mathfrak{h} .

Согласно сказанному выше из (1) вытекает, что $\mathfrak{a}(E^{\mathfrak{b}})$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}(G)$, т. е. что подрасслоение $E^{\mathfrak{b}}$ инволютивно. Следовательно, согласно теореме Фробениуса (предложение 5 лекции 7), подрасслоение $E^{\mathfrak{b}}$ интегрируемо.

Если подалгебра \mathfrak{h} является алгеброй Ли связной подгруппы H , то H будет, очевидно, интегральным многообразием подрасслоения $E^{\mathfrak{b}}$, проходящим через точку e (как мы увидим ниже, — максимальным). Поэтому для любой подалгебры \mathfrak{h} естественно ввести в рассмотрение максимальное интегральное многообразие H подрасслоения $E^{\mathfrak{b}}$ и пытаться доказать, что оно является подгруппой Ли с алгеброй Ли \mathfrak{h} .

Для этого в первую очередь нужно доказать, что H_{abstr} является подгруппой группы G_{abstr} , т. е. что $xy \in H$ и $x^{-1} \in H$ для любых элементов $x, y \in H$. Это без труда делается на основании следующих общих соображений.

Пусть $\Phi: M \rightarrow M'$ — произвольный диффеоморфизм, а N — подмногообразие многообразия M . Рассмотрим образ N' подмногообразия N при отображении Φ . Поскольку отображение Φ биективно отображает N на N' , мы можем с помощью этого отображения перенести гладкость с N на N' . Тем самым N' окажется гладким многообразием, а отображение Φ будет индуцировать некоторое диффеоморфное отображение $\Phi_N: N \rightarrow N'$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\Phi_N} & N' \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota' \\ M & \xrightarrow{\Phi} & M' \end{array}$$

вертикальными стрелками которой являются отображения вложения. Коммутативность этой диаграммы означает, что $\iota' = \Phi \circ \iota \circ \Phi_N^{-1}$, откуда непосредственно следует, что отображение ι' гладко, а его дифференциал $(d\iota')_{a'}$ в каждой точке $a' \in N'$ является мономорфизмом. Это означает, что N' является подмногообразием многообразия M . Мы будем называть это подмногообразие *образом подмногообразия N при диффеоморфизме Φ* .

Если теперь E — произвольное интегрируемое подраслоение расслоения $T(M)$, то его с образ E' при диффеоморфизме $T(\Phi)$: $T(M) \rightarrow T(M')$ будет интегрируемым подраслоением расслоения $T(M')$, и *образ при диффеоморфизме Φ любого максимального интегрального многообразия подраслоения E будет максимальным интегральным многообразием подраслоения E'* .

Поскольку при $M = M' = G$, $E = E^\flat$ и $\Phi = L_x$ (или $\Phi = I$, где $I: G \rightarrow G$ — отображение $x \mapsto x^{-1}$) подраслоение E' совпадает, очевидно, с $E = E^\flat$, отсюда следует, что максимальное интегральное подмногообразие H подраслоения E^\flat , проходящее через точку e , диффеоморфизм Φ переводит в максимальное интегральное подмногообразие, проходящее через точку Φe , т. е. при $\Phi e \in H$ — в то же H . Поскольку при $\Phi = I$, а также при $\Phi = L_x$, $x \in H$, условие $\Phi e \in H$, очевидно, выполнено, этим доказано, что $I(H) = H$ и $L_x(H) = H$ при $x \in H$, т. е. что H является подгруппой.

Для завершения доказательства остается показать, что H является группой Ли, т. е. что отображения $(x, y) \mapsto xy$ и $x \mapsto x^{-1}$ гладки. По отношению к отображению $x \mapsto x^{-1}$ это следует из сказанного выше, но по отношению к отображению $(x, y) \mapsto xy$ мы можем пока только утверждать, что это отображение гладко лишь по x или по y в отдельности.

Неожиданно оказывается, что доказательство гладкости отображения $(x, y) \mapsto xy$ в полном объеме является довольно трудной задачей, связанной с тонкими топологическими феноменами и требующей большой предварительной работы. Поэтому мы вынуждены будем опять вернуться к основам теории.

Определение 5. Рангом гладкого отображения $\Phi: N \rightarrow M$ многообразия N в многообразие M в точке $a \in N$ называется ранг его дифференциала

$$(d\Phi)_a: T_a(N) \rightarrow T_a(M)$$

как линейного отображения линеала $T_a(N)$ в линеал $T_a(M)$.

Пусть y^1, \dots, y^m — локальные координаты на многообразии N в точке a , а x^1, \dots, x^n — локальные координаты на многообразии M в точке Φa . Пусть, далее,

$$\varphi^1(y), \dots, \varphi^n(y), \quad y = (y^1, \dots, y^m),$$

— функции, выражающие в этих координатах отображение Φ . Так как матрицей линейного отображения $(d\Phi)_a$ в базисах $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_a$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\Phi a}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{\Phi a}$ является якобиева матрица, элементами которой являются частные производные

$$(2) \quad \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j}\right)_a, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

вычисленные в точке $(y^1(a), \dots, y^m(a)) \in \mathbb{R}^m$, то *ранг отображения Φ в точке a равен рангу матрицы с элементами (2).*

По соображениям непрерывности отсюда следует, что ранг r' отображения Φ в любой точке $a' \in U$ некоторой окрестности U точки a не меньше его ранга r в точке a :

$$r' \geq r.$$

Если $r' = r$ для любой точки $a' \in U$, то отображение Φ называется *локально плоским* в точке a .

Можно считать, перенумеровав, если нужно, координаты, что

$$(3) \quad \det \left| \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} \right)_a \right| \neq 0 \quad \text{при } i, j = 1, \dots, r.$$

Рассмотрим функции y'^1, \dots, y'^m , определенные в окрестности точки a формулами

$$y'^j(y^1, \dots, y^m) = \begin{cases} \varphi^j(y^1, \dots, y^m), & \text{если } 1 \leq j \leq r, \\ y^j, & \text{если } r + 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Поскольку в силу условия (3) якобиан $\frac{D(y'^1, \dots, y'^m)}{D(y', \dots, y^m)}$ в точке a отличен от нуля, функции y'^1, \dots, y'^m являются в некоторой окрестности точки a локальными координатами. В этих координатах отображение Φ выражается формулами вида

$$x^i = \begin{cases} y'^i, & \text{если } 1 \leq i \leq r, \\ \varphi'^i(y'^1, \dots, y'^m), & \text{если } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Если отображение Φ локально плоско в точке a , то в этих формулах функции $\varphi'^i(y'^1, \dots, y'^m)$, $r+1 \leq i \leq n$, не зависят, как легко видеть, от координат y'^{r+1}, \dots, y'^m , т. е. имеют вид

$$\varphi'^{r+1}(y'^1, \dots, y'^r), \dots, \varphi'^n(y'^1, \dots, y'^r).$$

Поэтому формулы

$$x'^i = \begin{cases} x^i, & \text{если } 1 \leq i \leq r, \\ x^i - \varphi'^i(x^1, \dots, x^r), & \text{если } r+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

определяют в некоторой окрестности точки Φa локальные координаты x'^1, \dots, x'^n , обладающие тем свойством, что в координатах y'^1, \dots, y'^n и x'^1, \dots, x'^n отображение Φ выражается формулами

$$x'^i = \begin{cases} y'^i, & \text{если } 1 \leq i \leq r, \\ 0, & \text{если } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Тем самым доказано следующее предложение:

Предложение 2. *Если гладкое отображение $\Phi: N \rightarrow M$ локально плоско в точке $a \in N$ и имеет в этой точке ранг r , то на многообразиях N и M существуют такие локальные координаты y^1, \dots, y^m и x^1, \dots, x^n (определенные соответственно в окрестностях точек a и Φa), что*

$$x^i \circ \Phi = \begin{cases} y^i, & \text{если } 1 \leq i \leq r, \\ 0, & \text{если } r+1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \square$$

Применимельно к отображению вложения $i: N \rightarrow M$ подмногообразия N в многообразие M (являющемуся, очевидно, локально плоским отображением) это предло-

жение утверждает, что для любой точки $a \in N$ в многообразии M существует такая карта (U, x^1, \dots, x^n) с $a \in U$, что функции

$$(4) \quad x^1 \circ \iota, \dots, x^m \circ \iota$$

являются локальными координатами в некоторой окрестности V точки a на V , а функции

$$x^{m+1} \circ \iota, \dots, x^n \circ \iota$$

тождественно равны нулю (в V).

Последнее утверждение означает, что подмногообразие N локально совпадает в a с плоским подмногообразием $V_0 = V$ карты U .

Замечание 1. Пример иррациональной обмотки тора показывает, что, вообще говоря, $V_0 \neq U \cap N$.

Поскольку отображение вложения $\iota: N \rightarrow M$ гладко, для каждой гладкой в M функции f ее ограничение $f|_N$ на N гладко в N (конечно, если это ограничение существует, т. е. область $W(f)$ определения функции f пересекается с N). Обратно, рассмотрим произвольную гладкую в N функцию g . Пусть область определения $W(g)$ этой функции содержит построенную выше координатную окрестность V точки a на многообразии N . Тогда

$$g = \hat{g}(x^1 \circ \iota, \dots, x^m \circ \iota) \text{ на } V,$$

где \hat{g} — некоторая гладкая функция от m переменных. Мы определим в координатной окрестности U точки a на многообразии M функцию \hat{f} формулой

$$\hat{f} = \hat{g}(x^1, \dots, x^m).$$

Ясно, что \hat{f} является гладкой функцией и $\hat{f} \circ \iota = g$. Тем самым нами доказана следующая лемма:

Лемма 1. Любая точка произвольного подмногообразия N обладает такой окрестностью V , что каждая гладкая в N функция является на V ограничением некоторой функции, гладкой в M . \square

Следствие. Если на некотором подмножестве N гладкого многообразия M существует структура подмногообразия, то при данной топологии на N эта структура единственна, т. е. любая другая структура подмногообразия на N будет индуцировать на N другую топологию.

Доказательство. В силу леммы 1 каждая гладкая карта (W, y^1, \dots, y^m) на N состоит из открытого множества W и функций y^1, \dots, y^m с отличным от нуля якобианом, локально являющихся ограничениями на N гладких в M функций. Поэтому любые две структуры подмногообразия на N , индуцирующие на N одну и ту же топологию, будут иметь идентичные карты и, следовательно, будут совпадать. \square

Конечно, варьируя топологию, мы можем получать на N различные структуры подмногообразия. Например, любое подмножество $N \subset M$ мы можем снабдить дискретной топологией, превратив его тем самым в нульмерное подмногообразие.

Менее тривиальный пример мы получим, рассмотрев в \mathbb{R}^2 открытый квадрат $-1 < x < 1, -1 < y < 1$. В индуцированной топологии он является двумерным открытым подмногообразием. Однако его можно превратить и в одномерное подмногообразие, введя топологию, открытыми множествами которой являются множества, пересекающиеся с каждым вертикальным интервалом $x = x_0, -1 < y < 1$ по открытому (в этом интервале) множеству. Получающееся подмногообразие состоит из несчетного числа компонент, каждое из которых диффеоморфно прямой линии \mathbb{R} . Мы будем называть его *рассеченным квадратом*.

Такого рода патологические возможности будут исключены, если мы наложим на подмногообразия условие существования счетной базы.

Однако имеются возможности варьирования топологии и совсем иного рода. Например, рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 множество, изображенное на рис. А («вось-



А



Б

мерку»). В топологии, индуцированной топологией плоскости, это подмножество подмногообразием не является. Однако его можно сделать подмногообразием и притом

даже двумя способами, введя более сильные топологии условно изображенные на рис. Б. В обоих случаях получающееся подмногообразие диффеоморфно прямой \mathbb{R} и потому, в отличие от предыдущих подмногообразий, связно и обладает счетной базой.

Определение 6. Подмногообразие N (размерности m) многообразия M (размерности n) называется *локально выпрямляемым* в точке $a \in N$, если существует такая карта (U, h) многообразия M и такое подмножество $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-m}$, что $a \in U$ и в топологии, индуцированной топологией подмногообразия N , пересечение $U \cap N$ является объединением плоских (см. с. 219) подмногообразий \mathcal{V}_ξ , $\xi \in \Sigma$, карты (U, h) :

$$U \cap N = \bigcup_{\xi \in \Sigma} V_\xi.$$

Подмногообразие N называем *локально выпрямляемым*, если оно локально выпрямляемо в каждой своей точке.

Подмногообразия рис. Б локально невыпрямляемы.

«Параметризующее» множество Σ может быть, вообще говоря, любым, и факт его существования еще не гарантирует от патологий. Например, рассеченный квадрат локально выпрямляем, и для любой его точки множество Σ является отрезком. Однако в менее патологических ситуациях это множество не может быть слишком большим. Например, из того, что все подмногообразия V_ξ , очевидно, открыты в N , непосредственно вытекает, что *если локально выпрямляемое подмногообразие N обладает счетной базой, то для любой его точки a множество Σ не более чем счетно*.

Стоит также иметь в виду, что, как непосредственно вытекает из определения индуцированной топологии, *если топология подмногообразия N индуцирована топологией объемлющего многообразия M , то многообразие N локально выпрямляемо и для любой его точки множество Σ может быть выбрано состоящим из одной точки*.

Таким образом, локально выпрямляемые подмногообразия можно рассматривать как обобщения подмногообразий с индуцированной топологией.

Во избежание постоянных оговорок мы будем отныне раз навсегда предполагать, что все рассматриваемые карты (U, h) являются *кубическими*, т. е. что множество

$h(U) \subset \mathbb{R}^n$ является кубом

$$|x^1| < c, \dots, |x^n| < c.$$

Число c мы будем называть полушириной карты (U, h) .

Тогда при $|\xi^1| < c, \dots, |\xi^{n-m}| < c$ каждое плоское подмногообразие V_ξ будет связно (и не пусто).

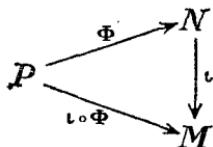
Поэтому, в частности, для локально выпрямляемого в точке a подмногообразия N все плоские многообразия V_ξ , $\xi \in \Xi$, составляющие пересечение $U \cap N$, будут компонентами связности этого пересечения в топологии, индуцированной топологией подмногообразия N . Пример рассеченного квадрата показывает, что по отношению к топологии объемлющего многообразия M это, вообще говоря, неверно. Однако если подмногообразие N обладает счетной базой, то подмногообразия V_ξ будут компонентами пересечения $U \cap N$ и в топологии, индуцированной топологией многообразия M . Действительно, отображение $U \cap N \rightarrow \Xi$, определенное формулой

$$(2) \quad a \mapsto (x^{m+1}(a), \dots, x^n(a)),$$

очевидно, непрерывно (в топологии многообразия M). Поэтому оно переводит каждую компоненту множества $U \cap N$ в компоненту множества Ξ . Но поскольку последнее множество, как было замечено выше, счетно, его компонентами являются точки. Поэтому каждая компонента множества $U \cap N$ содержится в прообразе V_ξ некоторой точки $\xi \in \Xi$ при отображении (2), и, значит, совпадает с V_ξ . \square

Лемма 2. Пусть P и M — гладкие многообразия, N — локально выпрямляемое подмногообразие многообразия M , обладающее счетной базой, $\iota: N \rightarrow M$ — отображение вложения и $\Phi: P \rightarrow N$ — такое отображение многообразия P в многообразие N , что композиция $\iota \circ \Phi: P \rightarrow M$ является непрерывным отображением. Тогда отображение Φ также непрерывно.

Если, кроме того, отображение $\iota \circ \Phi$ гладко, то отображение Φ также гладко.



Доказательство. Пусть $b \in P$ и $a = \Phi(b)$.

По определению в многообразии M существует такая кубическая карта (U, h) (для которой $h(a) = 0$), что пересечение $U \cap N$ в индуцированной топологии является объединением счетного числа связных плоских подмногообразий V_ξ , $\xi \in \Xi$. Поскольку отображение $\psi \circ \Phi$ непрерывно, в многообразии P существует окрестность W точки b , образ $(\psi \circ \Phi)(W)$ которой содержитсся в U , а значит, и в $U \cap N$. При этом без ограничения общности окрестность W можно предполагать связной. Но тогда (при непрерывном отображении связное множество переходит в связное) образ $(\psi \circ \Phi)(W)$ окрестности W при отображении $\psi \circ \Phi$ также будет связан и потому будет содержаться в одной из компонент V_ξ множества $U \cap N$. Поскольку $\Phi(b) = a$ и $a \in V_0$, этой компонентой необходимо является компонента $V_0 = V$. Таким образом, для окрестности V точки a в многообразии N существует такая окрестность W точки b в многообразии P , что $\Phi(W) \subset V$. Поскольку окрестности вида V составляют фундаментальную систему (базу) окрестностей точки a в многообразии N , этим доказано, что отображение $\Phi: P \rightarrow N$ непрерывно в точке b . Поскольку точка $b \in P$ произвольна, отображение Φ , следовательно, непрерывно.

Пусть теперь отображение $\psi \circ \Phi$ гладко. Чтобы доказать, что гладко отображение Φ , нужно доказать, что для любой гладкой в N функции g функция $g \circ \Phi$ гладка в P . Но, согласно лемме 1, функция g локально имеет вид $f \circ \iota$, где f — некоторая гладкая в M функция. Поэтому функция $g \circ \Phi$ локально совпадает с гладкой функцией $f \circ (\iota \circ \Phi)$ и потому гладка. \square

Пример многообразий на рис. А показывает, что без условия локальной выпрямляемости лемма 2 неверна.

Теперь мы уже можем доказать теорему единственности, к которой мы стремились:

Предложение 3. *Если в подмножество N гладкого многообразия можно ввести структуру локально выпрямляемого подмногообразия со счетной базой, то это можно сделать только единственным образом.*

Доказательство. Пусть N' и N'' — локально выпрямляемые подмногообразия со счетной базой, множеством точек которых служит множество N . Тогда к тождественному отображению $N' \rightarrow N''$ будет применима

лемма 2. Поэтому это отображение будет гладким. По аналогичным соображениям будет гладким и тождественное отображение $N'' \rightarrow N'$. Следовательно, гладкости на N' и N'' совпадают. \square

Следствие. Пусть N — локально выпрямляемое подмногообразие со счетной базой гладкого многообразия M , и пусть $\Phi: M \rightarrow M$ — такой диффеоморфизм многообразия M на себя, что $\Phi a \in N$ и $\Phi^{-1}a \in N$ для любой точки $a \in N$. Тогда индуцированное диффеоморфизмом Φ отображение $N \rightarrow N$ также является диффеоморфизмом.

Доказательство. Пусть N' — образ подмногообразия N при диффеоморфизме Φ . Очевидно, что N' также является локально выпрямляемым подмногообразием со счетной базой. Кроме того, по условию оно как множество совпадает с N . Поэтому, согласно предложению 2, оно будет совпадать с N и как многообразие. Следовательно, индуцированный диффеоморфизмом Φ диффеоморфизм $N \rightarrow N'$ будет на самом деле диффеоморфизмом $N \rightarrow N$. \square

В связи с полученными результатами естественно возникает вопрос об условиях, обеспечивающих существования у подмногообразия счетной базы. Покажем, что если подмногообразие связно, то для этого достаточно, чтобы счетную базу имело объемлющее многообразие M .

Лемма 3. Пусть для связного топологического пространства X существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, что:

1) каждое множество U_α (наделенное топологией подпространства) является пространством со счетной базой;

2) для любого α_0 существует не более счетного числа множеств U_α , пересекающихся с U_{α_0} .

Тогда пространство X имеет счетную базу.

Доказательство. Достаточно показать, что X является объединением счетного (или конечного) подсемейства покрытия $\{U_\alpha\}$. Зафиксирував некоторое $U_{\alpha_0} \neq \emptyset$ рассмотрим всевозможные элементы U_α данного покрытия, для которых существует такая конечная последовательность

$$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$$

элементов покрытия $\{U_\alpha\}$, что $U_{\alpha_n} = U_\alpha$ и $U_{\alpha_{i-1}} \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ для любого $i = 1, \dots, n$. Из условия 2) непосредственно вытекает, что все такие элементы составляют не более чем счетное подсемейство покрытия $\{U_\alpha\}$. Пусть X' — их объединение. Ясно, что X' открыто (и не пусто). Но оно и замкнуто, ибо если $x \in X'$ и $x \in U_\alpha$, то $X' \cap U_\alpha \neq \emptyset$, и потому U_α пересекается с некоторым элементом построенного подсемейства, а значит, и само принадлежит этому подсемейству. Поэтому $U_\alpha \subset X$ и, значит, $x \in X$. Являясь открытым и замкнутым непустым подмножеством связного пространства X , множество X' должно совпадать со всем X . Следовательно, X обладает счетной базой. \square

Лемма 4. Пусть для связного пространства X существует счетное открытое покрытие $\{U_k\}$, каждый элемент U_k которого является объединением непересекающихся открытых множеств U_{k, α_n} , имеющих счетную базу. Тогда пространство X также является пространством со счетной базой.

Доказательство. Достаточно показать, что открытое покрытие $\{U_{k, \alpha_k}\}$ удовлетворяет условию 2) леммы 3. Поскольку покрытие $\{U_k\}$ счетно, для этого достаточно показать, что для любых k, l и α_k существует не более счетного числа множеств U_{l, α_l} , пересекающихся с U_{k, α_k} . Пусть это не так, т. е. пусть существует несчетное семейство множеств U_{l, α_l} , пересекающихся с U_{k, α_k} . Выбрав в каждом пересечении по точке, мы получим в U_{k, α_k} несчетное подмножество, состоящее из изолированных точек (напомним, что множества U_{l, α_l} по условию не пересекаются). Поскольку любое дискретное подмножество пространства со счетной базой не более чем счетно, существование такого несчетного подмножества противоречит тому, что U_{k, α_k} является пространством со счетной базой. Следовательно, с U_{k, α_k} пересекается не более счетного числа множеств U_{l, α_l} . \square

Следствие 1. Любое пространство, накрывающее пространство со счетной базой, также обладает счетной базой.

Доказательство. Прообразы элементов счетного покрытия, состоящего из ровно накрытых множеств, со-

ставляют покрытие накрывающего пространства, удовлетворяющее условиям леммы 4. \square

Следствие 2. Если для связного пространства X существует локально гомеоморфное отображение

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

то X обладает счетной базой.

Доказательство. Пусть $\{U_k\}$ — счетная база пространства \mathbb{R}^m , состоящая из связных открытых множеств (например, параллелепипедов), и пусть $V_{k,\alpha}$ — открытые подмножества пространства X , гомеоморфно отображающиеся посредством f на U_k (здесь α пробегает некоторое множество индексов A , зависящее от k и для некоторых k могущее быть пустым). Локальная гомеоморфность отображения f означает, что множества

$$V_k = \bigcup_{\alpha \in A_k} V_{k,\alpha}$$

покрывают все X . Чтобы применить лемму 4, нам, следовательно, нужно только показать, что связные открытые множества $V_{k,\alpha}$ являются компонентами множеств V_k , т. е. что для любых $\alpha, \beta \in A_k$, если $V_{k,\alpha} \cap V_{k,\beta} \neq \emptyset$, то $V_{k,\alpha} = V_{k,\beta}$.

Пусть $W = V_{k,\alpha} \cap V_{k,\beta} \neq \emptyset$, и пусть

$$g_\alpha: U_k \rightarrow V_{k,\alpha}, \quad g_\beta: U_k \rightarrow V_{k,\beta}$$

— гомеоморфизмы, обратные к гомеоморфизмам $f|_{V_{k,\alpha}}$ и $f|_{V_{k,\beta}}$. Если $x_n \in W$ и $x = \lim x_n$, то $f(x) = \lim f(x_n)$ и $g_\beta(f(x_n)) = x_n$. Поэтому

$$g_\beta(f(x)) = \lim g_\beta(f(x_n)) = \lim x_n = x.$$

Следовательно, если $x \in V_{k,\alpha}$ (и потому $f(x) \in U_k$), то $x \in V_{k,\beta}$, т. е. $x \in W$. Это показывает, что W замкнуто в $V_{k,\alpha}$. Поскольку W , кроме того, открыто в $V_{k,\alpha}$ (и не пусто), а $V_{k,\alpha}$ связно (будучи гомеоморфным связному множеству U_k), это возможно только при $V_{k,\alpha} = W$. Аналогично доказывается, что $V_{k,\beta} = W$. Следовательно, $V_{k,\alpha} = V_{k,\beta}$. \square

Следствие 3. Любое связное подмногообразие N многообразия \mathbb{R}^n обладает счетной базой.

Доказательство. Пусть x^1, \dots, x^n — координаты в \mathbb{R}^n (относительно некоторого базиса), и пусть $i: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение вложения. Рассмотрим для произвольного m -членного (где m — размерность многообразия N) набора $\alpha = (i_1, \dots, i_m)$ индексов $1, \dots, n$ подмножество V_α многообразия N , состоящее из точек $a \in N$, в окрестности каждой из которых функции x^{i_1}, \dots, x^{i_m} являются локальными координатами. Ясно, что V_α открыто в N . Кроме того (см. предложение 3), любая точка $a \in N$ принадлежит хотя бы одному из множеств V_α . Пусть V'_α — произвольная компонента множества V_α . По построению отображение $V'_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$a \mapsto (x^{i_1}(a), \dots, x^{i_m}(a)), \quad a \in V'_\alpha,$$

является локальным гомеоморфизмом. Следовательно, согласно следствию 2, связное множество V'_α обладает счетной базой. Таким образом, конечное открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ многообразия N удовлетворяет условиям леммы 4. Поэтому многообразие N обладает счетной базой. \square

Теперь мы уже можем доказать анонсированное выше утверждение:

Предложение 4. Любое связное подмногообразие N многообразия M со счетной базой само является многообразием со счетной базой.

Доказательство. Пусть $\{U_k\}$ — счетное покрытие многообразия M , состоящее из координатных окрестностей, и пусть $V_k = U_k \cap N$. Множества V_k открыты в N и любая точка $a \in N$ принадлежит хотя бы одному из них. Каждая компонента V'_k множества V_k представляет собой связное гладкое многообразие, диффеоморфное некоторому подмногообразию пространства \mathbb{R}^m . Поэтому, согласно следствию 3, эта компонента обладает счетной базой. Это означает, что открытое покрытие $\{V_k\}$ многообразия N удовлетворяет всем условиям леммы 4. Поэтому многообразие N обладает счетной базой. \square

Применимость полученных выше результатов к группам Ли обеспечивается следующим предложением:

Предложение 5. Любая связная группа Ли G обладает счетной базой.

Доказательство. Пусть U — окрестность единицы группы, диффеоморфная открытому множеству пространства \mathbb{R}^n и обладающая тем свойством, что $U^{-1} = U$. Выбрав в U счетное всюду плотное множество Y , рассмотрим множество Z всех элементов группы G , имеющих вид $y_1 y_2 \dots y_k$, где $y_1, \dots, y_k \in Y$ (а k произвольно). Ясно, что множество Z счетно. Поскольку группа G связана, она порождается окрестностью U , т. е. любой элемент x группы G имеет вид $x_1 x_2 \dots x_k$, где $x_1, x_2, \dots, x_k \in U$. Пусть $x_{(i)} = x_1 x_2 \dots x_i$, $i = 1, \dots, k$ (в частности, $x_{(1)} = x_1$ и $x_{(k)} = x$). Из непрерывности умножения в группе G очевидной индукцией непосредственно выводится, что единица группы G обладает такой окрестностью V , что

$$V \cdot x_{(1)} V x_{(1)}^{-1} \cdot x_{(2)} V x_{(2)}^{-1} \cdot \dots \cdot x_{(k)} V x_{(k)}^{-1} \subset U.$$

Поскольку множество Y всюду плотно в U , в окрестности Vx_i точки $x_i \in U$ существует точка $y_i \in Y$. Пусть $v_i = y_i x_i^{-1} \in V$. Тогда

$$\begin{aligned} y_1 y_2 \dots y_k &= v_1 x_1 \cdot v_2 x_2 \cdot \dots \cdot v_k x_k = \\ &= v_1 \cdot x_{(1)} v_2 x_{(1)}^{-1} \cdot x_{(1)} v_3 x_{(2)}^{-1} \cdot \dots \cdot x_{(k-1)} v_k x_{(k)}^{-1} \cdot x_{(k)} = ux, \end{aligned}$$

где $u \in U$. Это показывает, что точка $z = y_1 \dots y_k \in Z$ обладает тем свойством, что $x \in Uz$ (вспомним, что по условию $U^{-1} = U$). Тем самым доказано, что открытые множества вида Uz , $z \in Z$, покрывают G . Поскольку Z счетно, а множества Uz (гомеоморфные множеству U) обладают счетной базой, отсюда непосредственно вытекает, что G также обладает счетной базой. \square

Следствие. Любое связное подмногообразие связной группы Ли является многообразием со счетной базой.

В частности, подмногообразием со счетной базой будет интересующее нас в первую очередь максимальное интегральное многообразие H подрасслоения E^\flat . При этом легко видеть, что оно будет локально выпрямляемо. Действительно, в любом многообразии M каждое максимальное интегральное многообразие W произвольного интегрируемого подрасслоения E локально выпрямляемо, поскольку, как мы знаем, многообразие M покрывается картами, обладающими тем свойством, что каждое их плоское подмногообразие V_ξ является интегральным

многообразием подрасслоения E ; поэтому пересечение W с каждой такой картой будет в силу максимальности W объединением некоторых из этих подмногообразий, что, по определению, и означает, что многообразие W локально выпрямляемо. \square

З а м е ч а н и е 2. Локальная выпрямляемость интегрального многообразия H вытекает также из следующей общей леммы:

Лемма 5. Связное подмногообразие H группы Ли G , для которого множество H_{abstr} является подгруппой группы G_{abstr} , локально выпрямляемо.

Доказательство. Как мы знаем, в G существует такая карта (U, x^1, \dots, x^n) в точке e , что плоское подмногообразие

$$V: x^{n+1} = 0, \dots, x^n = 0$$

является окрестностью точки e в подмногообразии H и подгруппускулой группускулы U . В алгебре Ли $I(G) = I(U)$ этой подгруппускуле соответствует подалгебра $\mathfrak{h} = I(V)$.

Без ограничения общности мы можем, очевидно, предполагать координаты x^1, \dots, x^n каноническими координатами, определенными некоторым разложением вида $I(G) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. Тогда (см. лекцию 7) смежными классами $aV = aH \cap U$ подгруппускулы V будут плоские подмногообразия V_ξ карты U . Поскольку пересечение $U \cap H$ является объединением тех из смежных классов aV , для которых $a \in U \cap H$, этим доказано, что пересечение $U \cap H$ является объединением некоторых плоских подмногообразий V_ξ . Следовательно, подмногообразие H локально выпрямляемо в точке e .

Пусть теперь a — произвольный элемент из H . Рассмотрим диффеоморфизм $L_a: G \rightarrow G$. Этот диффеоморфизм отображает H на себя и переводит точку e в точку a . Поэтому подмногообразие H локально выпрямляемо и в точке a . \square

Так как подмногообразие H обладает счетной базой и локально выпрямляемо, то в силу леммы 2 каждое отображение $\Phi: P \rightarrow H$ произвольного гладкого многообразия P в интегральное многообразие H , обладающее тем свойством, что его композиция

$$\iota \circ \Phi: P \rightarrow G$$

с отображением вложения $\iota: H \rightarrow G$ гладка, является гладким отображением.

Мы применим это утверждение к многообразию $P = H \times H$ и к отображению $\mu_H: (x, y) \mapsto xy$. Поскольку имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\mu_H} & H \\ \iota \times \iota \downarrow & & \downarrow \iota \\ G \times G & \xrightarrow{\mu_G} & G \end{array}$$

а отображения $\iota \times \iota$ и μ_G гладки, то отображение $\iota \circ \mu_H$ гладко. Следовательно, гладко и отображение μ_H .

Этим доказано, что *максимальное инвариантное многообразие H подрасслоения E^\flat является группой Ли*, а значит, и подгруппой группы Ли G .

Мы будем обозначать эту подгруппу символом $G(\mathfrak{h})$.

Замечание 3. В силу леммы 5 изложенное рассуждение доказывает также, что *связное подмногообразие H группы Ли G будет ее подгруппой, если множество H_{abstr} является подгруппой группы G_{abstr}* .

Поскольку касательным пространством в точке e к подгруппе $H = G(\mathfrak{h})$ служит подпространство $E_e^\flat = \mathfrak{h}$, алгебра Ли подгруппы H служит данная подалгебра \mathfrak{h} .

Теперь мы уже можем доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Мы уже знаем, что любой подгруппе H группы Ли G отвечает подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$, а любой подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — связная подгруппа $H = G(\mathfrak{h})$, причем $\mathfrak{l}(H) = \mathfrak{h}$. Поэтому для завершения доказательства теоремы 1 нам остается лишь показать, что для каждой связной подгруппы H группы Ли G имеет место равенство $H = G(\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$. Но подгруппы H и $G(\mathfrak{h})$ имеют одну и ту же алгебру Ли \mathfrak{h} и потому, рассматриваемые как группсулы, совпадают (см. лекцию 7). Это означает, что подгруппы H и $G(\mathfrak{h})$ имеют одинаковые окрестности единицы. Следовательно, $H = G(\mathfrak{h})$, так как, будучи связными, группы H и $G(\mathfrak{h})$ порождаются каждой окрестностью единицы. \square