Лекция 13

АЛГЕБРА КЛИФФОРДА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА.— Z_2-ГРАДУИРОВКА АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.— ЕЩЕ О ТЕНЗОРНОМ УМНОЖЕНИИ ЛИНЕАЛОВ И АЛГЕБР.— РАЗЛОЖЕНИЕ АЛГЕБР КЛИФФОРДА В КОСОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ.— БАЗИС АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.— СОПРЯЖЕНИЕ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА.— ЦЕНТР АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА. — ГРУППА ЛИ Spin (n). — ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА ГРУППЫ $SO(n)$. — ГРУППЫ Spin(n) ПРИ $n \leqslant 4$. — ГОМОМОРФИЗМ χ. — ГРУППА Spin(6). — ГРУППА Spin(5).— МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР КЛИФФОРДА.— МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП Spin(n). — МАТРИЧНЫЕ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНЫ ГРУППЫ Spin(n). — РЕДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП Spin(n). — ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

Вычисление фундаментальной группы $\pi_1 SO(n)$ группы $SO(n)$ мы начнем несколько издалека.

Пусть Q — произвольный (но раз и навсегда фиксированный) квадратичный функционал, заданный в (конечномерном) линейном пространстве $\mathscr{V}$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Мы будем рассматривать пары вида $(\mathscr{A}, \alpha)$, где $\mathscr{A}$ — произвольная унитальная алгебра над полем $\mathbb{R}$ (не обязательно конечномерная), а α — такое линейное отображение $\mathscr{V} \to \mathscr{A}$, что $\alpha(x)^2 = Q(x)1$ для любого элемента $x \in \mathscr{V}$, где 1 — единица алгебры $\mathscr{A}$. (В дальнейшем мы во всех такого рода равенствах будем, как правило, опу-

скать единицу 1, т. е. будем отождествлять элементы вида $\lambda 1 \in \mathscr{A}$ с соответствующими числами $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Замечание 1. Для проверки на практике условия $\alpha(x)^2 = Q(x)$ полезно иметь в виду, что оно выполнено для всех $x \in \mathscr{V}$, если выполнено для элементов некоторого базиса пространства $\mathscr{V}$.

Морфизмом пары $(\mathscr{A}, \alpha)$ в пару $(\mathscr{B}, \beta)$ мы будем называть гомоморфизм Φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{V} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathscr{A} \arrow[rr, "\Phi"'] & & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

т. е. такой, что $\beta = \Phi \circ \alpha$. Ясно, что все пары $(\mathscr{A}, \alpha)$ и все их морфизмы $(\mathscr{A}, \alpha) \to (\mathscr{B}, \beta)$ составляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом $\mathrm{CLIFF}(Q)$.

Напомним, что объект A_0 некоторой категории $\mathbf{G}$ называется *инициальным* (в другой терминологии — *универсальным*), если для любого объекта $A \in \mathbf{G}$ существует единственный морфизм $A_0 \to A$. Ясно, что инициальный объект (если он существует) с точностью до изоморфизма единствен.

Предложение 1. *В категории* $\mathrm{CLIFF}(Q)$ *существует инициальный объект.*

Доказательство. Пусть

$$\mathsf{T}_0(\mathscr{V}) = \mathsf{T}_0^0(\mathscr{V}) \oplus \ldots \oplus \mathsf{T}_0^q(\mathscr{V}) \oplus \ldots,$$

где $\mathsf{T}_0^q(\mathscr{V})$ — линейное пространство полилинейных функционалов типа $(0, q)$ на $\mathscr{V}$ (см. II, 5, с. 48). Ясно, что относительно операции тензорного умножения прямая сумма $\mathsf{T}_0(\mathscr{V})$ является алгеброй (бесконечномерной).

В алгебре $\mathsf{T}_0(\mathscr{V})$ мы рассмотрим идеал $I(Q)$, порожденный всеми элементами вида $x \otimes x - Q(x)$, где $x \in \mathscr{V} = \mathsf{T}_0^1(\mathscr{V})$. Пусть $\mathrm{Cl}(Q)$ — факторалгебра алгебры $\mathsf{T}_0(\mathscr{V})$ по этому идеалу, и пусть ι: $\mathscr{V} \to \mathrm{Cl}(Q)$ — ограничение на $\mathscr{V} = \mathsf{T}_0^1(\mathscr{V})$ естественного эпиморфизма $\mathsf{T}_0(\mathscr{V}) \to \mathrm{Cl}(Q)$. Оказывается, что *пара* $(\mathrm{Cl}(Q), \iota)$ *является инициальным объектом категории* $\mathrm{CLIFF}(Q)$.

Действительно, по построению $\iota(x)^2 = Q(x)$, так что $(\mathbb{C}l(Q), \iota) \in \mathrm{CLIFF}(Q)$. С другой стороны, ясно, что алгебра $\mathbf{T}_0(\mathscr{V})$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ многочленов от n некоммутирующих неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ (изоморфизм определяется произвольным базисом $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ и осуществляется соответствием $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q} \longmapsto x_{i_1} \ldots x_{i_q}$). Поэтому для каждой унитальной и ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ любое линейное отображение $\alpha\colon \mathscr{V} \to \mathscr{A}$ единственным образом распространяется до некоторого гомоморфизма $\bar{\alpha}\colon \mathbf{T}_0(\mathscr{V}) \to \mathscr{A}$. При этом, если $\alpha(x)^2 = Q(x)$ для каждого элемента $x \in \mathscr{V}$, т. е. если $(\mathscr{A}, \alpha) \in \mathrm{CLIFF}(Q)$, то $\bar{\alpha} = 0$ на $I(Q)$ и потому гомоморфизм $\bar{\alpha}$ индуцирует некоторый гомоморфизм $\alpha_{\#}\colon \mathbb{C}l(Q) \to \mathscr{A}$, обладающий, очевидно, тем свойством, что $\alpha^{\#} \circ \iota = \alpha$, т. е. являющийся морфизмом $(\mathbb{C}l(Q), \iota) \to (\mathscr{A}, \alpha)$. Поскольку линеал $\mathscr{V}$ порождает алгебру $\mathbf{T}_0(\mathscr{V})$, а значит, линеал $\iota\mathscr{V}$ — алгебру $\mathbb{C}l(Q)$, этот морфизм единствен. Следовательно, пара $(\mathbb{C}l(Q), \iota)$ является инициальным объектом категории $\mathrm{CLIFF}(Q)$. □

Определение 1. Построенная алгебра $\mathbb{C}l(Q)$ называется *алгеброй Клиффорда* квадратичного функционала Q.

По определению алгебра $\mathbb{C}l(Q)$ обладает тем свойством, что для любого объекта $(\mathscr{A}, \alpha)$ категории $\mathrm{CLIFF}(Q)$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\alpha^{\#}\colon \mathbb{C}l(Q) \to \mathscr{A}$, для которого $\alpha^{\#} \circ \iota = \alpha$, причем с точностью до изоморфизма алгебра $\mathbb{C}l(Q)$ этим свойством полностью характеризуется.

В частном случае, когда $\mathscr{V}$ является евклидовым пространством, а Q — соответствующим метрическим функционалом (сопоставляющим каждому вектору $x \in \mathscr{V}$ квадрат $|x|^2$ его длины), алгебру $\mathbb{C}l(Q)$ мы будем обозначать символом $\mathbb{C}l_+(\mathscr{V})$. Если же (в прежнем предположении, что пространство $\mathscr{V}$ евклидово) функционал Q определяется формулой $Q(x) = -|x|^2$, то алгебру $\mathbb{C}l(Q)$ мы будем обозначать символом $\mathbb{C}l(\mathscr{V})$. При совместном рассмотрении алгебр $\mathbb{C}l_+(\mathscr{V})$ и $\mathbb{C}l(\mathscr{V})$ мы будем их обозначать символом $\mathbb{C}l_\varepsilon(\mathscr{V})$, где $\varepsilon = \pm 1$, имея в виду при $\varepsilon = +1$ алгебру $\mathbb{C}l_+(\mathscr{V})$, а при $\varepsilon = -1$ — алгебру $\mathbb{C}l(\mathscr{V})$.

В случае, когда в пространстве $\mathscr{V}$ выбран ортонормированный базис и тем самым это пространство отождествлено со стандартным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, мы будем алгебры $\mathbb{C}l_+(\mathscr{V})$ и $\mathbb{C}l(\mathscr{V})$ обозначать соответственно символами $\mathbb{C}l_+(n)$ и $\mathbb{C}l(n)$ (а при совместном рассмотрении — символом $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$).

Пары $(\mathscr{V}, Q)$ образуют, очевидно, категорию $\mathbf{Q}$, морфизмами $(\mathscr{V}, Q) \to (\mathscr{V}_1, Q_1)$ которой являются такие линейные отображения $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}_1$, что $Q(x) = Q_1(\varphi x)$ для любого вектора $x \in \mathscr{V}$. Каждое такое отображение индуцирует, очевидно, гомоморфное отображение $\mathbf{T}_0(\mathscr{V}) \to \mathbf{T}_0(\mathscr{V}_1)$, переводящее идеал $I(Q)$ в идеал $I(Q_1)$ и потому индуцирующее некоторое гомоморфное отображение

$$\mathbb{C}l\,\varphi\colon\ \mathbb{C}l(Q) \to \mathbb{C}l(Q_1).$$

Ясно, что соответствия $(\mathscr{V}, Q) \mapsto \mathbb{C}l(Q)$, $\varphi \mapsto \mathbb{C}l\,\varphi$, составляют функтор $\mathbb{C}l$ из категории $\mathbf{Q}$ в категорию $\mathbf{ALG_0\text{-}ASS}$ ассоциативных унитальных алгебр.

Заметим, что $\mathbb{C}l\,\varphi$ является не чем иным, как отображением $(\iota_1 \circ \varphi)^\#$, где $\iota_1\colon \mathscr{V}_1 \to \mathbb{C}l(Q_1)$ — естественное отображение. Допуская определенную вольность, мы будем на этом основании обозначать гомоморфизм $\mathbb{C}l\,\varphi$ символом $\varphi^\#$.

Так как $\iota(x)^2 = Q(x)$, то из $\iota(x) = \iota(y)$ следует, что $Q(x) = Q(y)$. Поэтому соответствие $\iota(x) \mapsto Q(x)$ корректно определяет на подпространстве $\iota\mathscr{V} \subset \mathbb{C}l(Q)$ некоторый квадратичный функционал. (На самом деле, как мы ниже покажем, из $\iota(x) = \iota(y)$ вытекает, что $x = y$, так что все эти предосторожности фактически излишни).

Для упрощения формул мы будем функционал $\iota(x) \mapsto Q(x)$ обозначать прежним символом Q, а элемент $\iota(x)$ — символом x. В соответствии с этим для любого элемента $x \in \iota\mathscr{V}$ будет иметь место равенство

$$x^2 = Q(x). \tag{1}$$

В частности, $(x + y)^2 = Q(x + y)$, т. е. $x^2 + xy + yx + y^2 = Q(x) + 2Q(x, y) + Q(y)$, и, значит,

$$xy + yx = 2Q(x, y) \tag{2}$$

для любых элементов $x, y \in \iota\mathscr{V}$.

Пусть отображение $-\iota\colon \mathscr{V} \to \mathbb{C}l(Q)$ определено формулой $(-\iota)(x) = -\iota(x)$. Ясно, что пара $(\mathbb{C}l(Q), -\iota)$ принадлежит категории $\mathrm{CLIFF}(Q)$. Поэтому определен гомоморфизм $\alpha = (-\iota)^{\#}$, т. е. гомоморфизм α: $\mathbb{C}l(Q) \to \mathbb{C}l(Q)$, обладающий тем свойством, что $\alpha x = -x$, если $x \in \mathscr{V}$. Очевидно, что $\alpha^2 = \mathrm{id}$, т. е. что гомоморфизм α является инволютивным автоморфизмом. Для каждого элемента $u \in \mathbb{C}l(Q)$ элемент αu мы будем обозначать символом u^*.

Для исследования автоморфизма $u \longmapsto u^*$ мы воспользуемся следующей леммой из линейной алгебры:

Лемма 1. *Если линейный оператор $\boldsymbol{A}$: $\mathscr{W} \to \mathscr{W}$, действующий в вещественном или комплексном линейном пространстве $\mathscr{W}$, инволютивен, т. е. $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$, то его собственные значения равны ± 1 и он диагонализируем, т. е. пространство $\mathscr{W}$ является прямой суммой*

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}_+ \oplus \mathscr{W}_- \tag{3}$$

собственного пространства $\mathscr{W}_+$, отвечающего собственному значению $+1$, и собственного пространства $\mathscr{W}_-$, отвечающего собственному значению -1.

Доказательство. Пусть сначала основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда к оператору $\boldsymbol{A}$ применима теорема о приведении к жордановой нормальной форме (см. II, 16), т. е. $\boldsymbol{A}$ является прямой суммой операторов вида $\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{C}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $\boldsymbol{C}$ — либо нулевой, либо циклический оператор. При этом, если оператор $\boldsymbol{A}$ инволютивен, то каждый из операторов $\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{C}$ также инволютивен. Но $(\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{C})^2 = \lambda^2\boldsymbol{E} + 2\lambda\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^2$, и потому равенство $(\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{C})^2 = \boldsymbol{E}$ возможно только тогда, когда $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$. Это доказывает, что исходной оператор $\boldsymbol{A}$ диагонализируем. Поскольку у инволютивной диагональной матрицы все элементы диагонали равны, очевидно, ± 1, этим лемма 1 в случае основного поля $\mathbb{C}$ полностью доказана.

В случае, когда линейное пространство $\mathscr{W}$ вещественно, мы перейдем к его комплексификации $\mathscr{W}^{\mathbb{C}}$ (см. II, 17). Так как комплексифицированный оператор $\boldsymbol{A}^{\mathbb{C}}$, очевидно, по-прежнему инволютивен, то по доказанному

$$\mathscr{W}^{\mathbb{C}} = \mathscr{W}^{\mathbb{C}}_+ \oplus \mathscr{W}^{\mathbb{C}}_-.$$

Ограничившись в этом разложении лишь вещественными векторами, мы, как легко видеть, и получим разложение (3). □

Согласно этой лемме, примененной к автоморфизму $u \longmapsto u^*$, линеал $\mathbb{C}l(Q)$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{C}l(Q) = \mathbb{C}l^0(Q) \oplus \mathbb{C}l^1(Q)$$

двух подпространств $\mathbb{C}l^0(Q)$ и $\mathbb{C}l^1(Q)$. Элементы подпространства $\mathbb{C}l^0(Q)$ характеризуются условием $u^* = u$, а элементы подпространства $\mathbb{C}l^1(Q)$ — условием $u^* = -u$.

Мы будем называть элементы из $\mathbb{C}l^0(Q)$ *четными элементами* алгебры Клиффорда $\mathbb{C}l(Q)$, а элементы из $\mathbb{C}l^1(Q)$ — *нечетными элементами* этой алгебры.

Ясно, что произведение двух четных (нечетных) элементов четно, а четного и нечетного нечетно, т. е.

$$\mathbb{C}l^i(Q) \cdot \mathbb{C}l^j(Q) \subset \mathbb{C}l^{i+j}(Q)$$

для любых $i, j = 0, 1$ (имеется в виду суммирование по модулю 2).

В частности, мы видим, что *подпространство* $\mathbb{C}l^0(Q)$ *является подалгеброй алгебры* $\mathbb{C}l(Q)$.

Полученная алгебраическая структура заслуживает специального названия.

Определение 2. Алгебра $\mathscr{A}$ называется *$\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй*, если $\mathscr{A} = \mathscr{A}^0 \oplus \mathscr{A}^1$, причем

$$\mathscr{A}^i \cdot \mathscr{A}^j \subset \mathscr{A}^{i+j \bmod 2}$$

для любых $i, j = 0, 1$. *Морфизмом* $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр называется такой гомоморфизм φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, что $\varphi(\mathscr{A}^i) \subset \mathscr{B}^i$ для любого $i = 0, 1$. Ясно, что все $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры и все их морфизмы составляют категорию. Мы будем обозначать эту категорию символом $\mathbb{Z}_2$-ALG, а ее подкатегорию, состоящую из унитальных ассоциативных алгебр, — символом $\mathbb{Z}_2$-ALG$_0$-ASS.

Согласно сказанному выше функтор $\mathbb{C}l$ мы можем считать функтором из категории $\mathbf{Q}$ в категорию $\mathbb{Z}_2$-ALG$_0$-ASS. При этом, как легко видеть, если для пары $(\mathscr{A}, \alpha) \in$ CLIFF(Q) алгебра $\mathscr{A}$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй, а отображение α: $\mathscr{V} \to \mathscr{A}$ представляет

собой отображение в $\mathscr{A}^1$, то соответствующий гомоморфизм $\alpha^{\#}\colon \mathrm{Cl}(Q) \to \mathscr{A}$ будет морфизмом $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр.

В лекции 5 нами было введено понятие тензорного произведения линеалов и алгебр. Напомним, что элементами линеала $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ являются линейные комбинации символов вида $a \otimes b$, где $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{B}$, причем

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b,$$
$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$$

для любых элементов $a_1, a_2, a \in \mathscr{A}$ и $b, b_1, b_2 \in \mathscr{B}$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис линеала $\mathscr{A}$, а $f_1, \ldots, f_m$ — базис линеала $\mathscr{B}$, то элементы $e_i \otimes f_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, составляют базис линеала $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ (так что, в частности, $\dim(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) = \dim \mathscr{A} \cdot \dim \mathscr{B}$).

Из этого описания линеала $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ непосредственно вытекает, что для любых линеалов $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ имеют место естественные изоморфизмы

(4) $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \approx \mathscr{B} \otimes \mathscr{A}$ (коммутативность),

(5) $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \otimes \mathscr{C} \approx \mathscr{A} \otimes (\mathscr{B} \otimes \mathscr{C})$ (ассоциативность),

(6) $(\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}) \otimes \mathscr{C} \approx (\mathscr{A} \otimes \mathscr{C}) \oplus (\mathscr{B} \otimes \mathscr{C})$ (дистрибутивность)

В случае, когда линеалы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются алгебрами, мы ввели в $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ умножение, для которого

(7) $$(a \otimes b)(a_1 \otimes b_1) = aa_1 \otimes bb_1$$

для любых элементов $a, a_1 \in \mathscr{A}$, $b, b_1 \in \mathscr{B}$. Относительно этого умножения $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ является алгеброй и изоморфизмы (4), (5) и (6) оказываются изоморфизмами алгебр. (Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — алгебры, то в прямую сумму $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ умножение вводится покомпонентно, т. е. по формуле $(a, b)(a_1, b_1) = (aa_1, bb_1)$.) Если алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ ассоциативны и унитальны, то алгебра $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ также ассоциативна и унитальна (с единицей $1 \otimes 1$).

Пусть $\mathscr{A} = \mathscr{A}^0 \oplus \mathscr{A}^1$ и $\mathscr{B} = \mathscr{B}^0 \oplus \mathscr{B}^1$ — произвольные $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры. Тогда, положив

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})^0 = (\mathscr{A}^0 \otimes \mathscr{B}^0) \oplus (\mathscr{A}^1 \otimes \mathscr{B}^1),$$
$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})^1 = (\mathscr{A}^0 \otimes \mathscr{B}^1) \oplus (\mathscr{A}^1 \otimes \mathscr{B}^0),$$

мы ввиду (4) и (6) немедленно получим, что

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = (\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})^0 \oplus (\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})^1.$$

Хотя алгебра $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ и является по отношению к этому разложению $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй, но, как оказывается, целесообразно ввести в $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ другое умножение, для которого

$$(a \otimes b)(a_1 \otimes b_1) = (-1)^{ij}(aa_1 \otimes bb_1), \tag{8}$$

если $b \in \mathscr{B}^i$ и $a_1 \in \mathscr{A}^j$. Ясно, что по отношению к этому умножению линеал $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ также будет $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй, унитальной и ассоциативной, когда алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ унитальны и ассоциативны.

Алгебру $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ с умножением (8) мы будем называть *косым тензорным произведением* $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Когда нужно подчеркнуть отличие этого произведения от обычного (хотя и $\mathbb{Z}_2$-градуированного) тензорного произведения $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, мы будем обозначать его символом $\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{B}$.

Все три тензорных умножения (для линеалов, для алгебр и для $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр) обладают свойством функториальности, т. е. для любых морфизмов φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{A}_1$, ψ: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}_1$ определен морфизм $\varphi \otimes \psi$: $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{B}_1$, удовлетворяющий обычным функторным тождествам. Этот морфизм однозначно характеризуется соотношением

$$(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b),$$

которое должно иметь место для любых элементов $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{B}$.

Кроме того, для любых линеалов $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и любой алгебры $\mathscr{C}$ мы можем произвольным линейным отображениям φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ и ψ: $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ сопоставить линейное отображение $\varphi \otimes \psi$: $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, которое однозначно характеризуется соотношением

$$(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = \varphi(a)\,\psi(b), \qquad a \in \mathscr{A}, \quad b \in \mathscr{B}.$$

Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — алгебры, а φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ и ψ: $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — гомоморфизмы, причем гомоморфизмы φ и ψ *коммутируют*, т. е. для любых элементов $a \in \mathscr{A}$ и $b \in \mathscr{B}$ имеет место равенство $\varphi a \cdot \psi b = \psi b \cdot \varphi a$, то отображение $\varphi \otimes \psi$: $\mathscr{A} \otimes$

$\otimes \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ также будет гомоморфизмом. Аналогично для любых $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ и любых *косокоммутирующих* морфизмов φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$, ψ: $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ (т. е. таких, что $\varphi a \cdot \psi b = (-1)^{ij} \psi b \cdot \varphi a$, если $a \in \mathscr{A}^i$, $b \in \mathscr{B}^j$) отображение $\varphi \otimes \psi$: $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ будет морфизмом косого тензорного произведения $\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{B}$ в алгебру $\mathscr{C}$.

Для каждых двух объектов $(\mathscr{V}_1, Q_1)$ и $(\mathscr{V}_2, Q_2)$ категории $\mathbf{Q}$ формула

$$Q(x_1 + x_2) = Q_1(x_1) + Q_2(x_2), \qquad x_1 \in \mathscr{V}_1, \quad x_2 \in \mathscr{V}_2,$$

определяет на прямой сумме $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2$ квадратичный функционал Q, называемый *прямой суммой* квадратичных функционалов Q_1 и Q_2 (и обозначаемый обычно символом $Q_1 \oplus Q_2$).

На этом языке теорема Лагранжа (см. II, 11) означает, что любой квадратичный функционал является прямой суммой функционалов на одномерных пространствах.

Предложение 2. *Для любых двух квадратичных функционалов Q_1 и Q_2 имеет место естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Cl}(Q_1 \oplus Q_2) \approx \mathrm{Cl}(Q_1) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(Q_2).$$

Доказательство. Положив $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2$, определим линейное отображение

$$\alpha\colon \mathscr{V} \to \mathrm{Cl}(Q_1) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(Q_2)$$

формулой

$$\alpha(x_1 + x_2) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2, \qquad x_1 \in \mathscr{V}_1, \quad x_2 \in \mathscr{V}_2, \tag{9}$$

где, как всегда, $x_1 = \iota x_1$, $x_2 = \iota x_2$. Так как

$$(x_1 \otimes 1)(1 \otimes x_2) = x_1 \otimes x_2$$

и

$$(1 \otimes x_2)(x_1 \otimes 1) = -(x_1 \otimes x_2),$$

то

$$\begin{aligned}\alpha(x)^2 = \alpha(x_1 + x_2)^2 &= (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2)^2 = \\ &= x_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes x_2^2 = Q_1(x_1) + Q_2(x_2) = \\ &= Q(x)\end{aligned}$$

для любого вектора $x = x_1 + x_2 \in \mathscr{V}$, где $x_1 \in \mathscr{V}_1$, $x_2 \in \mathscr{V}_2$, $Q = Q_1 \oplus Q_2$, и, значит, $(\mathrm{Cl}(Q_1) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(Q_2), \alpha) \in \mathrm{CLIFF}(Q)$. Покажем, что *соответствующий морфизм*

$$\alpha^{\#}\colon \mathrm{Cl}(Q) \to \mathrm{Cl}(Q_1) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(Q_2)$$

$\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр является изоморфизмом.

С этой целью мы рассмотрим естественные вложения $\sigma_1\colon \mathscr{V}_1 \to \mathscr{V}$ и $\sigma_2\colon \mathscr{V}_2 \to \mathscr{V}$. Ясно, что они являются морфизмами соответственно пар $(\mathscr{V}_1, Q_1)$ и $(\mathscr{V}_2, Q_2)$ в пару $(\mathscr{V}, Q)$. Поэтому определены гомоморфизмы $\sigma_1^{\#}\colon \mathrm{Cl}(Q_1) \to \mathrm{Cl}\, Q$ и $\sigma_2^{\#}\colon \mathrm{Cl}(Q_2) \to \mathrm{Cl}(Q)$. Так как для любых векторов $x_1 \in \mathscr{V}_1$, $x_2 \in \mathscr{V}_2$ векторы $\sigma_1 x_1$, $\sigma_2 x_2 \in \mathscr{V}$, по определению, Q-ортогональны, то, согласно формуле (2),

$$\sigma_1^{\#} x_1 \cdot \sigma_2^{\#} x_2 = -\sigma_2^{\#} x_2 \cdot \sigma_1^{\#} x_1.$$

Поскольку любой четный (нечетный) элемент алгебры $\mathrm{Cl}(Q_i)$, $i = 1, 2$, является суммой произведений четного (нечетного) числа элементов $x_i \in \iota\mathscr{V}_i$, отсюда непосредственно следует, что отображения $\sigma_1^{\#}$ и $\sigma_2^{\#}$ коскоммутируют, и потому отображение $\sigma_1^{\#} \otimes \sigma_2^{\#}\colon \mathrm{Cl}(Q_1) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(Q_2) \to \mathrm{Cl}(Q)$ будет морфизмом $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры $\mathrm{Cl}(Q_1) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(Q_2)$ в $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру $\mathrm{Cl}(Q)$.

В аккуратной записи (с σ_1 и σ_2) формула (9) имеет вид

$$\alpha(\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2.$$

Поскольку, по определению, $\sigma_1^{\#} x_1 = \iota\sigma_1 x_1$, $\sigma_2^{\#} x_2 = \iota\sigma_2 x_2$ и $\alpha^{\#} \circ \iota = \alpha$, мы получаем отсюда, что

$$\alpha^{\#}(\sigma_1^{\#} x_1 + \sigma_2^{\#} x_2) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$$

для любых элементов $x_1 \in \iota\mathscr{V}_1$, $x_2 \in \iota\mathscr{V}_2$. Здесь $\sigma_1^{\#} x_1 + \sigma_2^{\#} x_2$ есть не что иное, как произвольный элемент x из $\iota\mathscr{V}$. Поэтому

$$\begin{aligned}((\sigma_1^{\#} \otimes \sigma_2^{\#}) \circ \alpha^{\#})\, x &= (\sigma_1^{\#} \otimes \sigma_2^{\#})(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2) = \\ &= \sigma_1^{\#} x_1 \cdot 1 + 1 \cdot \sigma_2^{\#} x_2 = \\ &= \sigma_1^{\#} x_1 + \sigma_2^{\#} x_2 = x,\end{aligned}$$

так что $(\sigma_1^\# \otimes \sigma_2^\#) \circ \alpha^\# = \mathrm{id}$ на подпространстве $\iota\mathscr{V}$. Поскольку отображение $(\sigma_1^\# \otimes \sigma_2^\#) \circ \alpha^\#$ является гомоморфизмом алгебр, а подпространство $\iota\mathscr{V}$ порождает алгебру $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q)$, отсюда следует, что $(\sigma_1^\# \otimes \sigma_2^\#) \circ \alpha^\# = \mathrm{id}$ и на всей алгебре $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q)$.

Аналогично

$$(\alpha^\# \circ (\sigma_1^\# \otimes \sigma_2^\#))(x_1 \otimes x_2) = \alpha^\# (\sigma_1^\# x_1 \cdot \sigma_2^\# x_2) = \\ = \alpha^\# \sigma_1^\# x_1 \cdot \alpha^\# \sigma_2^\# x_2 = (x_1 \otimes 1)(1 \otimes x_2) = x_1 \otimes x_2$$

для любых элементов $x_1 \in \iota\mathscr{V}_1$, $x_2 \in \iota\mathscr{V}_2$, и, значит, $\alpha^\# \circ (\sigma_1^\# \otimes \sigma_2^\#) = \mathrm{id}$, поскольку элементы $x_1 \otimes x_2$, $x_1 \in \iota\mathscr{V}_1$, $x_2 \in \iota\mathscr{V}_2$, порождают алгебру $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q_1) \hat{\otimes} \mathbb{C}\mathrm{l}(Q_2)$.

Таким образом, морфизмы $\alpha^\#$ и $\sigma_1^\# \otimes \sigma_2^\#$ являются взаимно обратными изоморфизмами. □

Пусть $n = \dim \mathscr{V}$. При $n = 1$ имеется (с точностью до изоморфизма) только три квадратичных функционала Q_{+1}, Q_{-1} и Q_0, характеризующихся тем, что на некотором векторе $e \in \mathscr{V}$ (базисе одномерного пространства $\mathscr{V}$) они принимают соответственно значения $+1$, -1 и 0. Так как при $n = 1$ алгебра $\mathsf{T}_0(\mathscr{V})$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}[e]$ (обычных) многочленов от e, отсюда следует, что алгебра $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q_\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1, 0$, получается из алгебры $\mathbb{R}[e]$ наложением соотношения $e^2 = \varepsilon$, т. е. является алгеброй $\mathbb{C}$ комплексных чисел, либо алгеброй $\mathbb{D}$ *двойных чисел* (имеющих вид $a + be$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $e^2 = 1$), либо алгеброй *дуальных чисел* (имеющих вид $a + be$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $e^2 = 0$).

Теорема 1. *Для любого квадратичного функционала Q в n-мерном пространстве $\mathscr{V}$ алгебра Клиффорда $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q)$ изоморфна косому тензорному произведению p алгебр двойных чисел, $r - p$ алгебр комплексных чисел и $n - r$ алгебр дуальных чисел, где r — ранг функционала Q, а p — его положительный индекс инерции. В частности,*

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(n) = \underbrace{\mathbb{C} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathbb{C}}_{n \text{ раз}}, \quad \mathbb{C}\mathrm{l}_+(n) = \underbrace{\mathbb{D} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathbb{D}}_{n \text{ раз}}.$$

Доказательство. Очевидной индукцией следует из предложения 2 и теоремы Лагранжа. □

Поскольку при тензорном умножении размерности алгебр-сомножителей перемножаются, из теоремы 1, в частности, следует, что $\dim \mathbb{C}l(Q) = 2^n$.

Более того, если $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный Q-ортогональный базис пространства $\mathscr{V}$, то, поскольку базис i-го множителя состоит из элементов 1 и e_i, алгебра $\mathbb{C}l(Q)$ будет иметь базис, состоящий из 2^n элементов вида $x_{k_1}^{(1)} x_{k_2}^{(2)} \ldots x_{k_n}^{(n)}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n = 0, 1$, а $x_0^{(i)} = 1$ и $x_1^{(i)} = e_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Введя в рассмотрение подмножество I отрезка $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ натурального ряда, состоящее из индексов i, для которых $k_i = 1$, мы будем элемент $x_{k_1}^{(1)} x_{k_2}^{(2)} \ldots x_{k_n}^{(n)}$ обозначать символом e_I. Таким образом, если $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_m\}$, то $e_I = e_{i_1} \ldots e_{i_m}$.

Число m мы будем обозначать символом $|I|$.

В частности, при $m = 1$ мы получаем элементы $e_{\{1\}} = e_1, \ldots, e_{\{n\}} = e_n$. Поэтому *эти элементы линейно независимы* и, значит, линейное отображение $\iota: \mathscr{V} \to \mathbb{C}l(Q)$ (переводящее, напомним, базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$ в элементы $e_1, \ldots, e_n$) является, как выше и утверждалось, мономорфизмом. Мы, как правило, будем отождествлять каждый вектор $x \in \mathscr{V}$ с соответствующим элементом $x \in \iota\mathscr{V} \in \mathbb{C}l(Q)$. В силу этого соглашения морфизм $\alpha^{\#}: \mathbb{C}l(Q) \to \mathscr{A}$ для любого объекта $(\mathscr{A}, \alpha) \in \mathrm{CLIFF}(Q)$ будет не чем иным, как распространением отображения α с $\mathscr{V}$ на $\mathbb{C}l(Q)$.

При $m = 0$, т. е. при $I = \varnothing$, элемент $e_\varnothing$ (обозначаемый также символом e_0) является единицей 1 алгебры $\mathbb{C}l(Q)$.

Поскольку векторы e_i и e_j при $i \neq j$ по условию Q-ортогональны, то, согласно формуле (2),

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \qquad i \neq j. \tag{10}$$

Кроме того, согласно формуле (1),

$$e_i^2 = \varepsilon_i, \quad \text{где} \quad \varepsilon_i = Q(e_i). \tag{11}$$

Соотношения (10) и (11) позволяют немедленно написать произведение любых базисных элементов e_I и e_J.

Например, при $n = r$ и $p = 0$, т. е. в алгебре $\mathrm{Cl}_+(n)$, имеет место формула

$$e_I e_J = (-1)^{\tau_+(I, J)} e_{I \triangle J}, \tag{12}$$

где $I \triangle J = (I \cup J) \setminus (I \cap J)$ — симметрическая разность множеств I и J, а $\tau_+(I, J)$ — число всех пар $(i, j) \in \in I \times J$, для которых $i > j$.

Аналогично в алгебре $\mathrm{Cl}(n)$

$$e_I e_J = (-1)^{\tau(I, J)} e_{I \triangle J}, \tag{13}$$

где $\tau(I, J)$ — число таких пар $(i, j) \in I \times J$, что $i \geqslant j$.

Линейное отображение $a \longmapsto \bar{a}$ не обязательно ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ в себя называется *инволютивным антиавтоморфизмом*, если $\bar{\bar{a}} = a$ и $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ для любых элементов $a, b \in \mathscr{A}$. Примером является отображение в себя тензорной алгебры $\mathrm{T}_0(\mathscr{V})$, задаваемое на образующих $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$ формулой

$$\overline{x_1 \otimes \ldots \otimes x_p} = x_p \otimes \ldots \otimes x_1.$$

Так как все элементы вида $x \otimes x - Q(x)$ остаются при этом антиавтоморфизме неподвижными, то $\overline{I(Q)} = I(Q)$, и потому рассматриваемый антиавтоморфизм индуцирует некоторый инволютивный антиавтоморфизм алгебры $\mathrm{Cl}(Q)$.

Определение 3. Построенный инволютивный антиавтоморфизм $a \longmapsto \bar{a}$ алгебры $\mathrm{Cl}(Q)$ называется *сопряжением*.

На элементах базиса e_I, $I = \{i_1 < \ldots < i_m\} \subset [n]$, сопряжение действует, как легко видеть, по формуле

$$\bar{e}_I = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} e_I.$$

Таким образом, $\bar{e}_I = e_I$, когда $m = 4p$, $4p + 1$, и $\bar{e}_I = -e_I$, когда $m = 4p + 2$, $4p + 3$.

Напомним, что *центром* ассоциативной алгебры называется ее подалгебра, состоящая из всех элментов, перестановочных с каждым элементом алгебры.

Мы вычислим центр алгебры Клиффорда $\mathbb{C}l(Q)$ для случая, когда функционал Q положительно или отрицательно определен, т. е. для алгебр $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$.

Предложение 3. *Если n четно, то центр алгебры $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$ одномерен (и исчерпывается элементами из $\mathbb{R}$), а если n нечетно, то центр алгебры $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$ двумерен и порождается элементами 1 и $e_{[n]} = e_1e_2\ldots e_n$.*

Доказательство. Так как элементы $e_1, \ldots, e_n$ порождают алгебру $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$, то элемент $x \in \mathbb{C}l_\varepsilon(n)$ тогда и только тогда принадлежит центру этой алгебры, когда $xe_i = e_ix$, т. е. $e_ixe_i = \varepsilon x$, для любого $i = 1, \ldots, n$. Но ясно, что если $i \in I = \{i_1 < \ldots < i_m\}$ и $i = i_t$, то

$$e_ie_I = (-1)^{t-1}\varepsilon e_{I\setminus\{i\}} \quad \text{и} \quad e_Ie_i = (-1)^{m-t}\varepsilon e_{I\setminus\{i\}},$$

а если $i \notin I$ и $i_{t-1} < i < i_t$, то

$$e_ie_I = (-1)^{t-1}e_{I\cup\{i\}} \quad \text{и} \quad e_Ie_i = (-1)^{m-t+1}e_{I\cup\{i\}}.$$

Поэтому, если $x = \sum_I x_Ie_I$, то

$$e_ixe_i = \sum_{i\in I}(-1)^{m+1}\varepsilon x_Ie_I + \sum_{i\notin I}(-1)^m\varepsilon x_Ie_I, \quad \text{где} \quad m = |I|.$$

Следовательно, $e_ixe_i = \varepsilon x_I$ тогда и только тогда, когда $x_I = (-1)^{m+1}x_I$, если $i \in I$, и $x_I = (-1)^m x_I$, если $i \notin I$. Поскольку для любого $I \neq \varnothing$, $[n]$ существует как $i \in I$, так и $i \notin I$, отсюда следует, что если $e_ixe_i = \varepsilon x$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то $(-1)^{m+1}x_I = (-1)^m x_I$ и, значит, $x_I = 0$. Кроме того, $x_{[n]} = (-1)^{n+1}x_{[n]}$ и, значит, $x_{[n]} = 0$, если n четно. Поэтому $x = x_\varnothing e_\varnothing$, если n четно, и $x = x_\varnothing e_\varnothing + x_{[n]}e_{[n]}$, если n нечетно. □

Следствие. *Для любого n и любого ε единственными четными элементами центра алгебры $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$ являются числа из $\mathbb{R}$.* □

Так как $x^2 = \varepsilon|x|^2$ для каждого элемента $x \in \iota\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, то все отличные от нуля элементы из $\mathbb{R}^n$ обратимы в алгебре $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$. В частности, обратимы все элементы, принадлежащие единичной сфере S^{n-1} пространства $\mathbb{R}^n$, причем если $x \in S^{n-1}$, то $x^{-1} = \varepsilon x = \varepsilon\bar{x}$.

Определение 4. Подгруппа $\mathrm{pin}_\varepsilon(n)$ мультипликативной группы всех обратимых элементов алгебры $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$,

порожденная элементами из S^{n-1}, называется *группой Клиффорда* степени n и индекса ε. При $\varepsilon = +1$ эта группа обозначается также символом $\mathrm{pin}_+(n)$, а при $\varepsilon = -1$ — символом $\mathrm{pin}(n)$.

Подгруппа группы $\mathrm{pin}_\varepsilon(n)$, состоящая из четных элементов, обозначается символом $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ (при $\varepsilon = +1$ — также символом $\mathrm{Spin}_+(n)$, а при $\varepsilon = -1$ — символом $\mathrm{Spin}(n)$) и называется *спинорной группой* степени n и индекса ε.

Ясно, что группы $\mathrm{pin}_\varepsilon(n)$ и $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ замкнуты в группе Ли всех обратимых элементов алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n)$. Поэтому эти группы являются группами Ли.

По определению каждый элемент u группы $\mathrm{pin}_\varepsilon(n)$ представляется (вообще говоря, неоднозначно) в виде произведения $x_1 \ldots x_m$, где $x_1, \ldots, x_m \in S^{n-1}$, и этот элемент тогда и только тогда лежит в $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$, когда m четно. При этом, так как оба отображения $u \mapsto u^{-1}$ и $u \mapsto \bar{u}$ являются антиавтоморфизмами и $x^{-1} = \varepsilon\bar{x}$ при $x \in S^{n-1}$, то $u^{-1} = \varepsilon^m \bar{u}$ и, значит,

$$u^{-1} = \bar{u}, \text{ если } u \in \mathrm{Spin}_\varepsilon(n) \quad (\text{или } \varepsilon = +1).$$

Если $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in \mathbb{R}^n$ и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, то

$$ux = -\sum_{i=1}^{n} u_i x_i + \sum_{i \neq j} u_i x_j e_i e_j,$$

и, значит,

$$ux\bar{u} = \sum_{(ijk)} u_i x_j u_k e_i e_j e_k + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены, линейные по $e_1, \ldots, e_n$ (т. е. принадлежащие $\mathbb{R}^n$), а символ (ijk) под знаком суммы означает, что суммирование распространено на все тройки (ijk), состоящие из попарно различных чисел $1, \ldots, n$. Но при перестановке любых множителей произведение $e_i e_j e_k$ меняет знак, а коэффициенты $u_i x_j u_k$ симметричны по i и k. Поэтому эта сумма равна нулю, и значит, $ux\bar{u} \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $(uv)x(\overline{uv}) = u(vx\bar{v})\bar{u}$, отсюда следует, что $ux\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ для любого элемента $u \in \mathbb{C}\mathrm{l}(n)$, представимого в виде произведения элементов из $\mathbb{R}^n$, и, значит, в частности, для любого элемента $u \in$

$\in \mathrm{pin}_\varepsilon(n)$. Это показывает, что, положив

$$\varphi(u)x = ux\bar{u}, \qquad u \in \mathrm{pin}_\varepsilon(n), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

мы получим некоторое (очевидно, линейное) отображение

$$\varphi(u)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Кроме того, мы видим, что $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$, т. е. что отображение $\varphi\colon u \longmapsto \varphi(u)$ является гомоморфизмом группы $\mathrm{pin}_\varepsilon(n)$ в группу обратимых линейных операторов $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которую мы, пользуясь тем, что в $\mathbb{R}^n$ у нас фиксирован базис $e_1, \ldots, e_n$, будем отождествлять с группой $\mathrm{GL}(n)$ обратимых матриц.

Более того, поскольку для каждого элемента $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$|\varphi(u)x|^2 = \varepsilon(\varphi(u)x)^2 = \varepsilon ux\bar{u}ux\bar{u} =$$
$$= \varepsilon uxu^{-1}uxu^{-1} = \varepsilon uxxu^{-1} = |x|^2 uu^{-1} = |x|^2,$$

оператор $\varphi(u)$ для любого элемента $u \in \mathrm{pin}_\varepsilon(u)$ ортогонален, так что φ на самом деле представляет собой гомоморфизм

$$\varphi\colon \mathrm{pin}_\varepsilon(n) \to \mathrm{O}(n).$$

Предложение 4. *Отображение*

$$\varphi\colon \mathrm{pin}_\varepsilon(n) \to \mathrm{O}(n)$$

при $\varepsilon = -1$ *или* n *четном является эпиморфизмом на группу* $\mathrm{O}(n)$, *а при* $\varepsilon = +1$ *и* n *нечетном — эпиморфизмом на группу* $\mathrm{SO}(n)$.

При любых ε *и* n *гомоморфизм* φ *отображает группу* $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ *в группу* $\mathrm{SO}(n)$, *причем индуцированный гомоморфизм*

$$\varphi_0\colon \mathrm{Spin}_\varepsilon(n) \to \mathrm{SO}(n)$$

является эпиморфизмом.

Ядром эпиморфизма φ_0 *является группа второго порядка* $\{1, -1\}$.

Доказательство. Если $u \in S^{n-1}$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то, согласно формуле (2),

$$\varphi(u)x = ux\bar{u} = ux u = (2\varepsilon(x, u) - xu)u =$$
$$= -\varepsilon(x - 2(x, u)u)$$

и, следовательно,

$$\varphi(u) = -\varepsilon u^{\perp},$$

где $u^{\perp}: x \mapsto x - 2(x, u)u$ — симметрия в гиперплоскости, перпендикулярной вектору u. Значит, образу гомоморфизма φ при $\varepsilon = -1$ принадлежит любая симметрия пространства $\mathbb{R}^n$, а при $\varepsilon = 1$ — композиция произвольной симметрии с оператором $x \mapsto -x$, имеющим определитель $(-1)^n$. Это доказывает первые три утверждения предложения 4, поскольку, как мы знаем (см. I, 27), в одномерном и двумерном пространствах любой ортогональный оператор является симметрией или композицией симметрий, а в n-мерном пространстве — прямой суммой ортогональных операторов в одномерных и двумерных подпространствах (см. II, 21, с. 215) и, значит, тоже — симметрией или композицией симметрий. При этом оператор тогда и только тогда лежит в $\mathrm{SO}(n)$, когда он является композицией четного числа симметрий.

Если $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi_0$, то $ue_i = e_i u$ для любого $i = 1, \ldots, n$ (ибо, как выше было замечено, $u^{-1} = \bar{u}$ для любого элемента $u \in \mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$) и, значит, u лежит в центре алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n)$, т. е., являясь четным элементом, представляет собой число из $\mathbb{R}$. Поэтому $\varphi(u)x = u^2 x$, т. е. $\varphi(u) = u^2 \boldsymbol{E}$, и, следовательно, поскольку оператор $\varphi(u)$ ортогонален, $u = \pm 1$. Обратно, ясно, что $\pm 1 \in \mathrm{Ker}\,\varphi_0$. □

Из предложения 4 следует, что если при $n > 1$ группа Ли $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ связна, то эпиморфизм φ_0 является групповым накрытием. В противном же случае группа $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ должна быть прямым произведением $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{Z}_2$ (а отображение φ_0 — проекцией $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{SO}(n)$), и потому ее точки 1 и -1 будут лежать в ее различных компонентах. Но очевидно, что, положив

$$u(t) = \varepsilon\left(\cos\frac{\pi}{2}t \cdot e_1 + \sin\frac{\pi}{2}t \cdot e_2\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}t \cdot e_1 - \sin\frac{\pi}{2}t \cdot e_2\right) = \cos\pi t - \varepsilon \sin\pi t \cdot e_1 e_2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

мы получим в $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ путь $t \mapsto u(t)$, соединяющий точку 1 с точкой -1. Поэтому должен иметь место первый случай. Следовательно, *группа* $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ *при* $n > 1$ *связна и эпиморфизм* φ_0 *является групповым накрытием.*

Прообраз любой точки при накрытии φ_0 состоит из двух элементов. Такого рода накрытия называются *двулистными*.

Факт существования у группы $SO(n)$ нетривиального накрытия означает, что *эта группа не односвязна*.

Чтобы найти ее фундаментальную группу, мы снова воспользуемся предложением 8 из предыдущей лекции. Как уже было замечено в лекции 1, фактормногообразие $SO(n)/SO(n-1)$ естественным образом отождествляется со сферой S^{n-1} и потому при $n \geqslant 3$ односвязно. Поэтому, согласно предложению 8 лекции 12, фундаментальная группа $\pi_1 SO(n)$ группы $SO(n)$ при любом $n \geqslant 3$ является факторгруппой группы $\pi_1 SO(3)$. Поэтому нам достаточно вычислить лишь группу $\pi_1 SO(3)$.

Пусть $\mathbb{H}'$ — линейное пространство «чисто мнимых» кватернионов η (т. е. таких, что $\bar{\eta} = -\eta$), а $\mathbb{S}^3$ — группа «единичных» кватернионов ξ (т. е. таких, что $\bar{\xi} = \xi^{-1}$). Если $\xi \in \mathbb{S}^3$ и $\eta \in \mathbb{H}'$, то $\xi\eta\xi^{-1} = \bar{\xi}^{-1}\bar{\eta}\bar{\xi} = -\xi\eta\xi^{-1}$ и, значит, $\xi\eta\xi^{-1} \in \mathbb{H}'$. Следовательно, для любого кватерниона $\xi \in \mathbb{S}^3$ формула $\varphi(\xi)$: $\eta \longmapsto \xi\eta\xi^{-1}$, $\eta \in \mathbb{H}'$, определяет (очевидно, линейный) оператор $\varphi(\xi)$: $\mathbb{H}' \to \mathbb{H}'$. При этом, поскольку $|\xi\eta\xi^{-1}| = |\eta|$, оператор $\varphi(\xi)$ ортогонален. В силу отождествления $\mathbb{H}' = \mathbb{R}^3$ отображение φ: $\xi \longmapsto \varphi(\xi)$ будет поэтому (очевидно, гомоморфным) отображением группы $\mathbb{S}^3$ в группу $O(3)$. Более того, поскольку группа $\mathbb{S}^3$ связна, гомоморфизм φ является на самом деле отображением в группу $SO(3)$.

Предложение 5. *Гомоморфизм*

$$\psi\colon \mathbb{S}^3 \to SO(3)$$

является эпиморфизмом. Его ядром служит группа второго порядка $\{1, -1\}$.

Для доказательства этого предложения мы воспользуемся следующей общей леммой.

Лемма 2. Гомоморфизм Φ: $G \to H$ *связных групп Ли является групповым накрытием (и, следовательно, эпиморфизмом), если его ядро* $K = \operatorname{Ker}\Phi$ *дискретно и* $\dim G = \dim H$.

Доказательство. Поскольку ядро гомоморфизма Φ дискретно, этот гомоморфизм, рассматриваемый как отображение на свой образ $\Phi(G) \approx G/K$, является

групповым накрытием. Поэтому в доказательстве нуждается лишь равенство $\Phi(G) = H$. Но поскольку $\dim \Phi(G) = \dim G = \dim H$, единица $e \in \Phi(G)$ является внутренней точкой подгруппы $\Phi(G)$, т. е. в H имеется такая окрестность единицы U, что $U \subset \Phi(G)$. Это доказывает лемму, поскольку в силу связности группы H окрестность U порождает группу H. □

Доказательство предложения 4. Так как $\dim \mathbb{S}^3 = \dim \mathrm{SO}(3) = 3$, то в силу леммы 2 достаточно доказать лишь утверждение о ядре. Но если $\xi \in \mathrm{Ker}\,\psi$, то для кватернионных единиц i, j, k будут иметь место равенства $\xi i = i\xi$, $\xi j = j\xi$ и $\xi k = k\xi$, что, как легко видеть, возможно только при $\xi \in \mathbb{R}$, т. е. при $\xi = \pm 1$. □

Предложение 4 означает, что отображение ψ: $\mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ является групповым двулистным накрытием. Поскольку сфера $\mathbb{S}^3$ односвязна, это накрытие универсально. Поэтому $\pi_1\mathrm{SO}(3) = \mathbb{Z}_2$, и, значит, согласно сделанным выше замечаниям, группа $\pi_1\mathrm{SO}(n)$ при любом $n \geqslant 3$ является факторгруппой группы $\mathbb{Z}_2$. Но мы знаем, что эта группа нетривиальна. Поэтому *при* $n \geqslant 3$ *группа* $\pi_1\mathrm{SO}(n)$ *является группой второго порядка* $\mathbb{Z}_2$.

При $n = 2$ группа Ли $\mathrm{SO}(2)$ является окружностью $\mathbb{S}^1$, и потому *группа* $\pi_1\mathrm{SO}(2)$ *изоморфна группе* $\mathbb{Z}$.

При $n = 1$ группа $\mathrm{SO}(1)$ является единичной группой.

Кроме того, мы теперь видим, что *группа* $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n)$ *при* $n \geqslant 3$ *является односвязной группой, а накрытие* φ_0: $\mathrm{Spin}_\varepsilon(n) \to \mathrm{SO}(n)$ — *универсальным накрытием.*

Ввиду единственности универсального накрытия отсюда, в частности, следует, что *группа* $\mathrm{Spin}_+(n)$ *изоморфна группе* $\mathrm{Spin}\,(n)$.

Таким образом, хотя алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}_+(n)$ и $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ не изоморфны, но их подгруппы $\mathrm{Spin}_+(n)$ и $\mathrm{Spin}(n)$ изоморфны.

Замечание 2. Конечно, изоморфизм между группами $\mathrm{Spin}_+(n)$ и $\mathrm{Spin}(n)$ хочется иметь в более явном виде. Хочется также понять алгебраические причины этого изоморфизма. Оба желания будут удовлетворены, если мы построим изоморфизм алгебр $\mathbb{C}\mathrm{l}^0_+(n)$ и $\mathbb{C}\mathrm{l}^0(n)$, отображающий группу $\mathrm{Spin}_+(n)$ на группу $\mathrm{Spin}(n)$. Оказывается, что таким изоморфизмом будет линейный изомор-

физм ρ: $\mathbb{C}l^0_+(n) \to \mathbb{C}l^0(n)$, переводящий базисный элемент e_I алгебры $\mathbb{C}l^0_+(n)$ в базисный элемент $\bar{e}_I$ алгебры $\mathbb{C}l^0(n)$, т. е. в элемент $(-1)^p e_I$, где $2p = |I|$. Действительно, достаточно, очевидно, показать, что ρ является гомоморфизмом алгебр, т. е. что $\rho(e_I e_J) = \rho(e_I)\rho(e_J)$ для любых базисных элементов e_I, e_J алгебры $\mathbb{C}l^0_+(n)$. Пусть $|I| = 2p$, $|J| = 2q$ и $|I \triangle J| = 2r$. Пусть, кроме того, τ_+ — число пар $(i, j) \in I \times J$, для которых $i > j$, а τ — число пар $(i, j) \in I \times J$, для которых $i \geqslant j$. Согласно формулам (12) и (13) $e_I e_J = (-1)^{\tau_+} e_{I \triangle J}$ в $\mathbb{C}l^0_+(n)$ и $e_I e_J = (-1)^{\tau} e_{I \triangle J}$ в $\mathbb{C}l^0(n)$. Поэтому $\rho(e_I e_J) = (-1)^{\tau_+ + s} e_{I \triangle J}$, а $\rho(e_I)\rho(e_J) = (-1)^{\tau + p + q} e_{I \triangle J}$. Это доказывает все, что нужно, поскольку, как легко видеть, $\tau - \tau_+ = |I \cap J| = p + q - s$. □

Замечание 3. Тот факт, что отображение ρ является гомоморфизмом алгебр, можно доказать без всяких вычислений, если заметить, что оно является ограничением изоморфизма комплексифицированных алгебр $\mathbb{C}l_+(n) \otimes \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}l(n) \otimes \mathbb{C}$, порожденного соответствиями $e_1 \mapsto ie_1, \ldots, e_n \mapsto ie_n$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать только группу Spin(n).

Группы Spin(n) для малых n легко описать.

Ясно, что группа Spin(1) подобно группе SO(1) состоит только из единицы.

Алгебра $\mathbb{C}l^0(2)$ двумерна (ее базис состоит из элементов 1 и $e_1 e_2$), а группа Spin(2) является в этом двумерном линеале окружностью. Таким образом,

$$\mathrm{Spin}(2) \approx \mathrm{SO}(2) \approx \mathbb{S}^1 \approx \mathrm{U}(1).$$

Что же касается группы Spin(3), то в силу единственности универсального накрытия эта группа изоморфна группе $\mathbb{S}^3$:

$$\mathrm{Spin}(3) \approx \mathbb{S}^3 \approx \mathrm{Sp}(1).$$

Интересно, что *группа* Spin(3) $\approx \mathbb{S}^3$ *изоморофна также группе* SU(2). Действительно, непосредственное вычисление показывает, что любая матрица из SU(2)

имеет вид

$$(14) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

и что отображение $SU(2) \to S^3$, сопоставляющее матрице (14) кватернион $\xi = a + bj \in S^3$, является изоморфизмом. □

В частности, отсюда следует, что *группа* $SU(2)$ *двулистно накрывает группу вращений* $SO(3)$.

Чтобы получить явное описание накрытия $SU(2) \to SO(3)$, мы каждой матрице (14) отнесем дробно-линейное преобразование

$$(15) \qquad z \mapsto \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

пополненной плоскости $\mathbb{C}^+$ комплексного переменного. При отождествлении посредством стереографической проекции плоскости $\mathbb{C}^+$ со сферой S^2 преобразования (15) перейдут, как известно (см. I, 28), во вращения сферы, т. е. в преобразования из $SO(3)$. Это и дает накрытие $SU(2) \to SO(3)$, поскольку матрицы, отличающиеся знаком, порождают одно и то же вращение (15).

Далее, легко видеть, что *группа* $\mathrm{Spin}(4)$ *изоморфна прямому произведению* $S^3 \times S^3$ *групп* $S^3 \approx \mathrm{Spin}(3)$. Проще всего это установить, заметив, во-первых, что для любых двух кватернионов $\xi, \eta \in S^3$ формула

$$\zeta \mapsto \xi\zeta\bar{\eta}, \qquad \zeta \in \mathbb{H},$$

определяет изометричное (ибо $|\xi\zeta\bar{\eta}| = |\xi| \cdot |\zeta| \cdot |\bar{\eta}| = |\zeta|$) отображение алгебры $\mathbb{H}$ в себя, т. е. некоторый элемент группы $SO(4)$, во-вторых, что получающееся отображение $S^3 \times S^3 \to SO(4)$ является гомоморфизмом (ибо $\xi_1(\xi_2\zeta\bar{\eta}_2)\bar{\eta}_1 = (\xi_1\xi_2)\zeta(\eta_1\eta_2)$), и, в-третьих, что ядро этого гомоморфизма состоит только из двух элементов $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ (если $\xi\zeta\bar{\eta} = \zeta$ для всех ζ, то, в частности, $\xi\bar{\eta} = 1$ и, значит, $\xi = \eta$; следовательно, $\xi\zeta = \zeta\xi$, откуда, как мы уже знаем, вытекает, что $\xi = \pm 1$). Это означает (см. лемму 1), что группа $S^3 \times S^3$ двулистно накрывает группу $SO(4)$. Следовательно, это накрытие

универсально и потому группа $S^3 \times S^3$ изоморфна группе Spin(4). □

Оказывается, что аналогичные результаты имеют место и для групп Spin(5) и Spin(6). Чтобы их получить, мы начнем с группы $SL(4; \mathbb{C})$ унимодулярных линейных операторов комплексного четырехмерного пространства $\mathbb{C}^4$. Каждый оператор $A \in SL(4; \mathbb{C})$ очевидным образом индуцирует некоторый линейный оператор $\hat{A}: \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \to \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ в линейном пространстве $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ билинейных кососимметрических функционалов на $\mathbb{C}^4$ типа (0, 2). На бивекторах этот оператор действует по формуле

$$\hat{A}(x \wedge y) = Ax \wedge Ay, \qquad x, y \in \mathbb{C}^4.$$

Так как $\dim \Lambda^2(\mathbb{C}^4) = 6$, то, выбрав в пространстве $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ базис, состоящий из бивекторов $e_i \wedge e_j$, $i < j$, где e_1, e_2, e_3, e_4 — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^4$, мы можем считать оператор $\hat{A}$ элементом группы $GL(6; \mathbb{C})$. Более того, рассмотрев на пространстве $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ квадратичный функционал Q, сопоставляющий каждому вектору $p^{ij} e_i \wedge e_j$ этого пространства число $p^{12}p^{34} + p^{23}p^{14} + p^{13}p^{42}$, мы после нетрудного вычисления обнаружим, что каждый оператор $\hat{A}$ сохраняет этот квадратичный функционал. (Впрочем, это можно доказать и геометрически без каких-либо вычислений. Действительно, оператор $\hat{A}$ переводит бивекторы в бивекторы и потому сохраняет равенство $Q = 0$, равносильное соотношению Плюккера, характеризующему бивекторы среди всех функционалов из $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$; см. II, 10, с. 87. Это означает, что оператор $\hat{A}$ переводит в себя гиперповерхность второго порядка $Q = 0$. Но тогда в силу теоремы об единственности, с точностью до пропорциональности, уравнений гиперповерхностей второго порядка, оператор $\hat{A}$ должен переводить функционал Q в пропорциональный функционал $\lambda_A Q$. Поэтому нужно только доказать, что $\lambda_A = 1$ для любого оператора $A \in SL(4; \mathbb{C})$. Но соответствие $A \mapsto \lambda_A$ является, очевидно, гомоморфизмом группы $SL(4; \mathbb{C})$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}^*$ отличных от нуля комплексных чисел, а любой такой гомоморфизм, как нетрудно показать, тривиален.)

Если мы от базиса $e_i \wedge e_j$, $i < j$, перейдем к базису

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
f_1 &= e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, & f_2 &= ie_1 \wedge e_2 - ie_3 \wedge e_4,\\
f_3 &= e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4, & f_4 &= ie_2 \wedge e_3 - ie_1 \wedge e_4,\\
f_5 &= e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, & f_6 &= ie_1 \wedge e_3 - ie_4 \wedge e_2,
\end{aligned}
$$

в котором функционал Q записывается в виде суммы квадратов, то каждый оператор $\hat{A}$ будет в этом базисе выражаться ортогональной матрицей. Обозначив эту матрицу символом $\chi(A)$, мы тем самым получим некоторое (очевидно, гомоморфное) отображение

$$\chi\colon \mathrm{SL}(4;\ \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(6;\ \mathbb{C}).$$

Ядро гомоморфизма χ состоит из матриц A, столбцы a_1, a_2, a_3, a_4 которых удовлетворяют соотношению $a_i \wedge \wedge a_j = e_i \wedge e_j$ для любых i, j и потому обладают тем свойством, что для каждой пары (i, j) векторы a_i и a_j линейно выражаются через векторы e_i и e_j, что, очевидно, возможно только тогда, когда $a_i = \lambda_i e_i$ для каждого i. Кроме того, для любых i и j должно иметь место равенство $\lambda_i \lambda_j = 1$, что возможно только тогда, когда либо $\lambda_i = 1$, либо $\lambda_i = -1$ для каждого i. Этим доказано, что *ядром гомоморфизма χ является группа второго порядка* $\{E, -E\}$.

Рассмотрим теперь в группе $\mathrm{SL}(4;\ \mathbb{C})$ подгруппу, состоящую из матриц A, для которых матрица $\chi(A)$ имеет вещественные коэффициенты, т. е. лежит в группе $\mathrm{O}(6) = \mathrm{O}(6,\ \mathbb{R})$. Ясно, что матрица A тогда и только тогда принадлежит этой подгруппе, когда оператор $\hat{A}$ перестановочен с полулинейным преобразованием S: $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \to \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, заменяющим все координаты каждого элемента линеала $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ относительно базиса (16) на комплексно сопряженные числа. Но если функционал из $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ имеет в базисе (16) координаты $z_1, \ldots, z_6$, то в базисе, состоящем из бивекторов $e_i \wedge e_j$, $i < j$, он будет, очевидно, иметь координаты

$$
\begin{aligned}
p_{12} &= z_1 + iz_2, & p_{34} &= z_1 - iz_2,\\
p_{23} &= z_3 + iz_4, & p_{14} &= z_3 - iz_4,\\
p_{13} &= z_5 + iz_6, & p_{24} &= -z_5 + iz_6,
\end{aligned}
$$

и потому преобразование S будет переводить его в функционал с координатами

$$\bar{p}_{34}, \quad \bar{p}_{12}, \quad \bar{p}_{14}, \quad \bar{p}_{23}, \quad -\bar{p}_{24}, \quad -\bar{p}_{13}.$$

Это означает, что $S = T \circ \hat{\sigma}$, где T — линейный оператор $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \to \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, действующий на базисных бивекторах по формулам

$$(17) \quad \begin{aligned} &T(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4, && T(e_3 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_2, \\ &T(e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_4, && T(e_1 \wedge e_4) = e_2 \wedge e_3, \\ &T(e_1 \wedge e_3) = -e_2 \wedge e_4, && T(e_2 \wedge e_4) = -e_1 \wedge e_3, \end{aligned}$$

а σ: $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ — полулинейный изоморфизм, заменяющий компоненты каждого вектора комплексно сопряженными числами. Таким образом, $\chi(A) \in O(6)$ тогда и только тогда, когда

$$\hat{A} \circ T \circ \hat{\sigma} = T \circ \hat{\sigma} \circ \hat{A}.$$

Ниже мы покажем, что для любого оператора $A \in SL(4; \mathbb{C})$ имеет место соотношение

$$(18) \qquad \hat{A} \circ T = T \circ \hat{A}^c,$$

где A^c — оператор на $\mathbb{C}^4$, матрица которого получается из матрицы оператора A транспонированием и переходом к обратной матрице. Отсюда следует, что $\chi(A) \in O(6)$ тогда и только тогда, когда $\hat{A}^c \circ \hat{\sigma} = \hat{\sigma} \circ \hat{A}$, т.е. когда $\widehat{A^c \circ \sigma} = \widehat{\sigma \circ A}$. В частности, $\chi(A) \in O(6)$, если $A^c \circ \sigma = \sigma \circ A$, т. е. если $A^* = A^{-1}$, где A^* — сопряженный (относительно стандартного скалярного умножения в $\mathbb{C}^4$) оператор (матрица которого получается из матрицы оператора A транспонированием и комплексным сопряжением). Поскольку равенство $A^* = A^{-1}$ характеризует унитарные операторы, принадлежащие подгруппе $SU(4)$ группы $SL(4; \mathbb{C})$, этим доказано, что гомоморфизм χ отображает группу $SU(4)$ в группу $O(6)$ и, значит — ввиду связности группы $SU(4)$ — в группу $SO(6)$. Поэтому он индуцирует гомоморфизм

$$\chi_0\colon\ SU(4) \to SO(6).$$

Поскольку ядро гомоморфизма χ_0 совпадает, очевидно, с ядром гомоморфизма χ и потому является группой

второго порядка, а $\dim SU(4) = \dim SO(6) = 15$, гомоморфизм χ_0 представляет собой двулистное накрытие. Тем самым доказано, что *группа* $SU(4)$ *двулистно накрывает группу* $SO(6)$ *и потому изоморфна группе* $Spin(6)$.

В группе $SU(4)$ содержится подгруппа $Sp(2)$, элементы A которой характеризуются тем, что оставляют инвариантным кососимметрический билинейный функционал с матрицей

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или, что равносильно, тем, что $A^c J = JA$, где J — линейный оператор на $\mathbb{C}^4$ с матрицей J (ср. с формулой (5) лекции 1). Поэтому, если $A \in Sp(2)$, то $\widehat{A}^c \circ \widehat{J} = \widehat{J} \circ \widehat{A}$ и, значит (см. формулу (18)), $\widehat{A} \circ T \circ \widehat{J} = T \circ \widehat{J} \circ \widehat{A}$. Но очевидное вычисление показывает, что $T \circ \widehat{J} = -I$, где I — линейный оператор $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \to \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, оставляющий все векторы (16) на месте, кроме вектора f_3, который переходит в вектор $-f_3$. Таким образом, $\widehat{A} \circ I = I \circ \widehat{A}$, что равносильно равенству $\widehat{A} f_3 = f_3$. Поскольку последнее равенство означает, что $\chi(A)$ содержится в подгруппе группы $SO(6)$, изоморфной группе $SO(5)$, и поскольку $\dim Sp(2) = \dim SO(5) = 10$, тем самым доказано, что *группа* $Sp(2)$ *двулистно накрывает группу* $SO(5)$ *и потому изоморфна группе* $Spin(5)$.

Собирая вместе все доказанные факты, мы получаем следующее предложение:

Предложение 6. *Группы*

$$S^1, \quad S^3 = Sp(1) = SU(2), \quad S^3 \times S^3, \quad Sp(2), \quad SU(4)$$

двулистно накрывают группы

$$SO(2), \quad SO(3), \quad SO(4), \quad SO(5), \quad SO(6)$$

и потому изоморфны группам

$$Spin(2), \quad Spin(3), \quad Spin(4), \quad Spin(5), \quad Spin(6)$$

соответственно. □

Тем самым группы $\mathrm{Spin}(n)$ при $n \leqslant 6$ нам удалось представить в виде матричных групп. Аналогичные результаты имеют место и при $n > 6$, но с тем отличием, что группы $\mathrm{Spin}(n)$, $n > 6$, отождествляются только с некоторыми подгруппами соответствующих ортогональных групп.

Ясно, что для доказательства этого утверждения достаточно получить матричные представления полных алгебр Клиффорда $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n)$. В этих представлениях мы будем пренебрегать $\mathbb{Z}_2$-градуировкой, и потому, в частности, все тензорные произведения будем считать обычными (не косыми).

Мы уже знаем, что $\mathbb{C}\mathrm{l}(1) \approx \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}\mathrm{l}_+(1) \approx \mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ — алгебра двойных чисел $a + be$, $e^2 = 1$. Впрочем, легко видеть, что соответствие $a + be \mapsto (a + b, a - b)$ представляет собой изоморфизм $\mathbb{D} \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(1) \approx \mathbb{C}, \qquad \mathbb{C}\mathrm{l}_+(1) \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Далее, автоматическая проверка показывает, что соответствия $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$, $e_1e_2 \mapsto k$ определяют изоморфизм алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}(2)$ с алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$, а соответствия

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

— изоморфизм $\mathbb{C}\mathrm{l}_+(2) \approx \mathbb{R}(2)$. Таким образом,

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(2) \approx \mathbb{H}, \qquad \mathbb{C}\mathrm{l}_+(2) \approx \mathbb{R}(2).$$

Предложение 7. *Для любого $n \geqslant 0$ имеет место изоморфизм*

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n+2) \approx \mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2),$$

т. е. два изоморфизма

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(n+2) \approx \mathbb{C}\mathrm{l}_+(n) \otimes \mathbb{H},$$
$$\mathbb{C}\mathrm{l}_+(n+2) \approx \mathbb{C}\mathrm{l}(n) \otimes \mathbb{R}(2).$$

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение

$$\alpha\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2),$$

для которого

$$\alpha(e_i) = e_i \otimes e_1 e_2 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\alpha(e_{n+1}) = 1 \otimes e_1, \qquad \alpha(e_{n+2}) = 1 \otimes e_2$$

(мы обозначаем одними и теми же символами e_i образующие всех трех алгебр $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n+2)$, $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n)$ и $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2)$). Очевидная проверка показывает, что $\alpha(x)^2 = \varepsilon|x|^2$ для любого $x \in \mathbb{R}^{n+2}$. Поэтому отображение α распространяется до некоторого гомоморфизма $\alpha^\#\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n+2) \to \mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2)$ алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n+2)$ в алгебру $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2)$. Аналогичное рассуждение дает нам гомоморфизмы $\beta^\#\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n) \to \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n+2)$ и $\gamma^\#\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2) \to \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n+2)$, для которых

$$\beta^\#(e_i) = -e_i e_{n+1} e_{n+2}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$\gamma^\#(e_1) = e_{n+1}, \qquad \gamma^\#(e_2) = e_{n+2}.$$

Поскольку, как легко видеть, $\beta^\#(e_i)\gamma^\#(e_j) = \gamma^\#(e_j)\beta^\#(e_i)$ для любых $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, 2$, гомоморфизмы $\beta^\#$ и $\gamma^\#$ коммутируют и, следовательно, отображение

$$\beta^\# \otimes \gamma^\#\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2) \to \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n+2)$$

является гомоморфизмом алгебр. При этом для каждого $i = 1, \ldots, n$ будет иметь место равенство

$$[(\beta^\# \otimes \gamma^\#) \circ \alpha^\#](e_i) = \beta^\#(e_i) \cdot \gamma^\#(e_1 e_2) = \\ = -e_i (e_{n+1} e_{n+2})^2 = e_i$$

(ибо $(e_1, e_2)^2 = -1$ при любом ε), и для каждого $j = 1, 2$ —

$$[(\beta^\# \otimes \gamma^\#) \circ \alpha^\#](e_{n+j}) = 1 \otimes \gamma^\#(e_j) = 1 \otimes e_{n+j},$$

так что $(\beta^\# \otimes \gamma^\#) \circ \alpha^\# = \mathrm{id}$. Аналогично для любого $i = 1, \ldots, n$

$$[\alpha^\# \circ (\beta^\# \otimes \gamma^\#)](e_i \otimes 1) = \alpha^\#(\beta^\#(e_i)) = \alpha^\#(-e_i e_{n+1} e_{n+2}) = \\ = -\alpha^\#(e_i)\,\alpha^\#(e_{n+1})\,\alpha^\#(e_{n+2}) = \\ = -(e_i \otimes e_1 e_2)(1 \otimes e_1)(1 \otimes e_2) = \\ = -e_i \otimes (e_1 e_2)^2 = e_i$$

и для любого $j=1, 2$

$$[\alpha^{\#}\circ(\beta^{\#}\otimes\gamma^{\#})](1\otimes e_j)=\alpha^{\#}(\gamma^{\#}(e_j))=$$
$$=\alpha^{\#}(e_{n+j})=1\otimes e_j,$$

откуда непосредственно вытекает, что $\alpha^{\#}\circ(\beta^{\#}\otimes\gamma^{\#})=\mathrm{id}$. Таким образом, отображения $\alpha^{\#}$ и $\beta^{\#}\otimes\gamma^{\#}$ являются взаимно обратными изоморфизмами. □

Из этого предложения немедленно следует, что

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(3)\approx(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\approx\mathbb{H}\oplus\mathbb{H},\qquad \mathbb{C}\mathrm{l}_+(3)\approx\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}(2)\approx\mathbb{C}(2),$$
$$\mathbb{C}\mathrm{l}(4)\approx\mathbb{R}(2)\otimes\mathbb{H}\approx\mathbb{H}(2),\qquad \mathbb{C}\mathrm{l}_+(4)\approx\mathbb{H}\otimes\mathbb{R}(2)\approx\mathbb{H}(2).$$

Чтобы идти дальше, нам понадобится следующая лемма:

Лемма 3. *Имеют место изоморфизмы*

$$\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\approx\mathbb{C}\oplus\mathbb{C},\qquad \mathbb{C}\otimes\mathbb{H}\approx\mathbb{C}(2),\qquad \mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\approx\mathbb{R}(4).$$

Доказательство. Ясно, что $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}(n)\approx\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_+(n)$. Поэтому

$$\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\approx\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}(1)\approx\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_+(1)\approx\mathbb{C}\otimes(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\approx\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}.$$

Аналогично

$$\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}\approx\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}(2)\approx\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}_+(2)\approx\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}(2)\approx\mathbb{C}(2).$$

Впрочем, эти изоморфизмы легко устанавливаются и непосредственно. Например, изоморфизм $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\approx\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ определяется соответствиями $1\otimes 1\mapsto(1, 1)$, $i\otimes 1\mapsto(i, i)$, $1\otimes i\mapsto(i, -i)$, $i\otimes i\mapsto(-1, 1)$.

Изоморфизм $\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\approx\mathbb{R}(4)$ мы установим, отождествив $\mathbb{H}$ с $\mathbb{R}^4$ и сопоставив любому элементу из $\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$ вида $\xi\otimes\eta$, где $\xi, \eta\in\mathbb{H}$, линейный оператор $\omega(\xi\otimes\eta)$: $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, действующий по формуле

$$\omega(\xi\otimes\eta)\zeta=\xi\zeta\bar{\eta},\qquad \zeta\in\mathbb{H}.$$

Автоматическая проверка показывает, что оператор $\omega(\xi\otimes\eta)$ корректно определен (т. е. если $\xi\otimes\eta=\xi'\otimes\eta'$, то $\omega(\xi\otimes\eta)=\omega(\xi'\otimes\eta')$) и что по линейности отображение ω корректно распространяется до некоторого гомоморфизма ω алгебры $\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$ в алгебру линейных операторов $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, т. е., ввиду отождествления

$\mathbb{H}$ с $\mathbb{R}^4$, — в алгебру матриц $\mathbb{R}(4)$. При этом, так как $i\bar{i} = 1$, $i\bar{i}i = i$, $ij\bar{i} = -j$, $ik\bar{i} = -k$, то

$$\omega(i \otimes i) = E_{11} + E_{22} - E_{33} - E_{44},$$

а так как $i\bar{1}\bar{j} = -k$, $i\bar{i}\bar{j} = j$, $ij\bar{j} = i$, $ik\bar{j} = -1$, то

$$\omega(i \otimes j) = -E_{14} + E_{23} + E_{32} - E_{41}.$$

Аналогично вычисляются все 16 матриц $\omega(\xi \otimes \eta)$, где $\xi, \eta = 1, i, j, k$ (при этом, конечно, $\omega(1 \otimes 1)$ является единичной матрицей $E = E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44}$). Проделав эти вычисления, мы сразу же обнаружим, что любая матричная единица $E_{\alpha\beta}$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 4$, может быть представлена в виде линейной комбинации матриц $\omega(\xi \otimes \eta)$. Например,

$$E_{11} = \frac{1}{4}\omega(1 \otimes 1 + i \otimes i + j \otimes j + k \otimes k)$$

и

$$E_{12} = \frac{1}{4}\omega(i \otimes 1 - 1 \otimes i + k \otimes j - j \otimes k).$$

Следовательно, отображение ω является эпиморфизмом, а значит, ввиду равенства размерностей алгебр $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ и $\mathbb{R}(4)$, и изоморфизмом. $\square$

Для произвольной алгебры $\mathscr{A}$ мы будем символом $\mathscr{A}(n)$ обозначать алгебру квадратных матриц порядка n над $\mathscr{A}$, т. е. с элементами из $\mathscr{A}$. Если $E_{\alpha\beta}$, — как всегда, матричные единицы, то соответствие $a \otimes E_{\alpha\beta} \longmapsto aE_{\alpha\beta}$ распространяется, как легко видеть, до изоморфизма

$$\mathscr{A} \otimes \mathbb{R}(n) \approx \mathscr{A}(n).$$

Поскольку алгебра $\mathbb{R}(n)(m)$ матриц порядка m, элементами которых являются матрицы порядка n, естественным образом отождествляется с алгеброй $\mathbb{R}(mn)$ матриц порядка mn, отсюда, в частности, следует, что

$$\mathbb{R}(m) \otimes \mathbb{R}(n) \approx \mathbb{R}(mn)$$

для любых чисел $m, n \geqslant 0$. Поэтому

$$\mathscr{A}(m) \otimes \mathscr{B}(n) \approx (\mathscr{A} \otimes \mathbb{R}(m)) \otimes (\mathscr{B} \otimes \mathbb{R}(n)) \approx$$
$$\approx (\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \otimes (\mathbb{R}(m) \otimes \mathbb{R}(n)) \approx (\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})(mn)$$

для любых алгебр $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и любых чисел $m, n \geqslant 0$.

Следовательно, в силу леммы 3

$$\mathbb{C}(m)\otimes\mathbb{H}(n)\approx\mathbb{C}(2mn),\qquad \mathbb{H}(m)\otimes\mathbb{H}(n)\approx\mathbb{R}(4mn).$$

Возвращаясь к алгебрам Клиффорда мы в первую очередь получаем, что

$$\mathrm{Cl}_+(2)\otimes\mathrm{Cl}(2)\approx\mathbb{H}\otimes\mathbb{R}(2)\approx\mathbb{H}(2).$$

Поэтому, дважды применив предложение 7, мы получим изоморфизмы

$$\mathrm{Cl}(n+4)\approx\mathrm{Cl}(n)\otimes\mathbb{H}(2)\quad\text{и}\quad\mathrm{Cl}_+(n+4)\approx\mathrm{Cl}_+(n)\otimes\mathbb{H}(2),$$

из которых ввиду изоморфизма $\mathbb{H}(2)\otimes\mathbb{H}(2)\approx\mathbb{R}(16)$ далее следует, что

$$\mathrm{Cl}(n+8)\approx\mathrm{Cl}(n)\otimes\mathbb{R}(16)\approx\mathrm{Cl}(n)(16)$$

и

$$\mathrm{Cl}_+(n+8)\approx\mathrm{Cl}_+(n)\otimes\mathbb{R}(16)\approx\mathrm{Cl}_+(n)(16).$$

Поскольку алгебры $\mathrm{Cl}_\varepsilon(n)$ при $n\leqslant 4$ нами уже вычислены, это дает алгебры $\mathrm{Cl}_\varepsilon(n)$ для всех n. Мы сформулируем окончательный результат в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *Имеют место изоморфизмы*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cl}(8m-3)\approx\mathbb{C}(2^{4m-2}), && \mathrm{Cl}_+(8m-3)\approx\\
&&&\approx\mathbb{H}(2^{4m-3})\oplus\mathbb{H}(2^{4m-3}),\\
&\mathrm{Cl}(8m-2)\approx\mathbb{R}(2^{4m-1}), && \mathrm{Cl}_+(8m-2)\approx\mathbb{H}(2^{4m-2}),\\
&\mathrm{Cl}(8m-1)\approx && \mathrm{Cl}_+(8m-1)\approx\mathbb{C}(2^{4m-1}),\\
&\quad\approx\mathbb{R}(2^{4m-1})\oplus\mathbb{R}(2^{4m-1}), &&\\
&\mathrm{Cl}(8m)\approx\mathbb{R}(2^{4m}), && \mathrm{Cl}_+(8m)\approx\mathbb{R}(2^{4m}),\\
&\mathrm{Cl}(8m+1)\approx\mathbb{C}(2^{4m}), && \mathrm{Cl}_+(8m+1)\approx\\
&&&\approx\mathbb{R}(2^{4m})\oplus\mathbb{R}(2^{4m}),\\
&\mathrm{Cl}(8m+2)\approx\mathbb{H}(2^{4m}), && \mathrm{Cl}_+(8m+2)\approx\mathbb{R}(2^{4m+1}),\\
&\mathrm{Cl}(8m+3)\approx && \mathrm{Cl}_+(8m+3)\approx\mathbb{C}(2^{4m+1}),\\
&\quad\approx\mathbb{H}(2^{4m})\oplus\mathbb{H}(2^{4m}), &&\\
&\mathrm{Cl}(8m+4)\approx\mathbb{H}(2^{4m+1}), && \mathrm{Cl}_+(8m+4)\approx\mathbb{H}(2^{4m+1}).\ \square
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathbb{C}l(8m) \approx \mathbb{C}l_+(8m), \qquad \mathbb{C}l(8m+4) \approx \mathbb{C}l_+(8m+4).$$

Никакие другие алгебры $\mathbb{C}l(n)$ и $\mathbb{C}l_+(n)$ друг другу не изоморфны.

Полезно также иметь в виду, что

$$\mathbb{R}(2^n) = \begin{cases} \mathbb{C}l(2n), & \text{если} \quad n = 4m-1,\ 4m, \\ \mathbb{C}l_+(2n), & \text{если} \quad n = 4m+1, \end{cases}$$

и аналогично для $\mathbb{C}(2^n)$ и $\mathbb{H}(2^n)$. Интересно, что алгебра $\mathbb{R}(2^{4m+2})$ не изоморфна никакой алгебре $\mathbb{C}l_\varepsilon(n)$.

Для групп $\mathrm{Spin}(n)$ (и $\mathrm{pin}_\varepsilon(n)$) из теоремы 2 вытекает, что они вкладываются в соответствующие матричные группы или их прямые суммы. Однако поскольку любая пара (A, B) матриц порядка n отождествляется с матрицей

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{19}$$

порядка $2n$, вложения в прямые суммы можно заменить вложениями в группы матриц вдвое большего порядка. Таким образом, *элементы групп* $\mathrm{Spin}(n)$ *представляются матрицами некоторого порядка* N *над алгебрами* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *или* $\mathbb{H}$. *При этом* $N = 2^{\alpha(n)}$, *где*

$$\alpha(n) = \begin{cases} 4m-2, & \text{если } n = 8m-3, \\ 4m-1, & \text{если } n = 8m-2, \\ 4m, & \text{если } n = 8m-1,\ 8m,\ 8m+1,\ 8m+2, \\ 4m+1, & \text{если } n = 8m+3,\ 8m+4, \end{cases}$$

а матрицы получаются вещественными при $n = 8m-2$, $8m-1$, $8m$, *комплексными при* $n = 8m-3$, $8m+1$ *и кватернионными при* $n = 8m+2$, $8m+3$, $8m+4$.

Впрочем, поскольку при отождествлении пары (A, B) с матрицей (19) происходит определенная потеря информации, целесообразнее это отождествление не производить и представлять элементы групп $\mathrm{Spin}(n)$ при $n = 8m-1$ и $n = 8m+3$ парами матриц порядка $2^{\alpha(n)-1}$ (соответственно вещественных и кватернионных).

Определение 5. Два матричных представления группы G, т. е. два вложения (или, более общо, гомоморфизма) группы G в некоторую группу матриц, называются *эквивалентными*, если они отличаются на внутренний автоморфизм этой группы, т. е. получаются из одного и того же представления группы G как группы линейных операторов некоторого линеала различным выбором базиса в этом линеале.

Важно иметь в виду, что *построенные выше представления групп* $\mathrm{Spin}(n)$ *определены только с точностью до эквивалентности*, поскольку изоморфизмы в предложении 7 и в лемме 2 можно строить многими способами, не имеющими друг перед другом никаких внутренних преимуществ (например, можно считать, что $\alpha(e_1) = 1 \otimes e_1$, $\alpha(e_2) = 1 \otimes e_2$ и $\alpha(e_i) = e_{i-2} \otimes e_1 e_2$ при $2 \leqslant i \leqslant n+2$).

Интересно, что это утверждение можно уточнить.

Назовем матрицу (над произвольной унитальной алгеброй $\mathscr{A}$) *мономиальной*, если в каждой ее строке и в каждом столбце все элементы равны нулю, за исключением одного, равного ± 1. Оператор, соответствующий мономиальной матрице, переставляет векторы базиса, одновременно умножая их на ± 1. Поэтому любая мономиальная матрица при $\mathscr{A} = \mathbb{R}$ ортогональна, при $\mathscr{A} = \mathbb{C}$ унитарна, а при $\mathscr{A} = \mathbb{H}$ симплектична.

Поскольку произвол в изоморфизмах из предложения 7 и леммы 2 можно, очевидно, ограничить перестановками элементов базисов, сопровождаемыми умножением их на ± 1, мы видим, что *построенные представления групп* $\mathrm{Spin}(n)$ *можно считать определенными с точностью до эквивалентностей, осуществляемых мономиальными матрицами.*

Ясно, что для любых мономиальных матриц $A \in \mathbb{R}(m)$ и $B \in \mathbb{R}(n)$ матрица из $\mathbb{R}(mn) \approx \mathbb{R}(m) \otimes \mathbb{R}(n)$, соответствующая тензорному произведению $A \otimes B$ матриц A и B (кстати сказать, эта матрица называется *кронекеровым произведением* матриц A и B), также мономиальна.

Кроме того, легко видеть, что при изоморфизмах $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \approx \mathbb{C}(2)$ и $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \approx \mathbb{R}(4)$ из леммы 2 образующие $\xi \otimes \eta$, где $\xi = 1, i$, или $\xi = 1, i, j, k$, а $\eta = 1, i, j, k$, переходят в мономиальные матрицы. Тем же свойством

обладает и изоморфизм $\mathrm{Cl}_+(2) \approx \mathbb{R}(2)$ (по отношению к образующим e_1 и e_2). Посредством очевидной индукции отсюда, поэтому, вытекает, что *при изоморфизмах из теоремы 2 образующие* $e_1, \ldots, e_n$ *алгебр* $\mathrm{Cl}(n)$ *переходят в мономиальные матрицы* $E_1, \ldots, E_n$ (*или пары мономиальных матриц*).

В частности, если матрицы $E_1, \ldots, E_n$ являются вещественными, то они ортогональны, а если комплексными или кватернионными, то они соответственно унитарны или симплектичны. Иными словами, эти матрицы удовлетворяют тождеству $U\bar{U}^{\mathrm{T}} = E$, где E — единичная матрица. Но так как $e_i^2 = -1$, то $E_i^2 = -E$ и потому $E_i^{\mathrm{T}} = -E_i$. Значит, $\bar{U}^{\mathrm{T}} = -U$ для каждой матрицы U вида E_i, а значит, по линейности, и для каждой матрицы U вида $u^i E_i$, представляющей произвольный элемент $u = u^i e_i \in \iota\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(n)$. С другой стороны, так как $u^2 = -|u|^2$, то $U^2 = -|u|^2 E$ и, в частности, $U^2 = -E$ при $u \in S^{n-1}$. Поэтому $U\bar{U}^{\mathrm{T}} = E$, т. е. матрица U ортогональна, или соответственно унитарна, или симплектична.

Полагая для упрощения обозначений

$$\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(n) = \begin{cases} \mathrm{O}(n), & \text{если} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \mathrm{U}(n), & \text{если} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ \mathrm{Sp}(n), & \text{если} \quad \mathbb{K} = \mathbb{H}, \end{cases}$$

мы, таким образом, получаем, что *каждый элемент* $u \in S^{n-1} \subset \mathrm{Cl}(n)$ *представляется матрицей* U, *принадлежащей группе* $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(n)$, *где* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, *или* $\mathbb{H}$ *в зависимости от* n.

Поскольку элементы из S^{n-1} порождают группу $\mathrm{pin}(n)$, этот вывод справедлив и для любого элемента $u \in \mathrm{pin}(n)$, и, в частности, для любого элемента $u \in \mathrm{Spin}(n)$.

Таким образом, *группа* $\mathrm{Spin}(n)$ *оказывается вложенной в группу* $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(2^{a(n)})$, *где*

$$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{при} \quad n = 8m-2,\ 8m-1,\ 8m, \\ \mathbb{C}, & \text{при} \quad n = 8m-3,\ 8m+1, \\ \mathbb{H}, & \text{при} \quad n = 8m+2,\ 8m+3,\ 8m+4. \end{cases}$$

При этом, когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, можно ввиду связности группы $\mathrm{Spin}(n)$ дополнительно утверждать, что $\mathrm{Spin}(n) \subset \subset \mathrm{SO}(n)$.

Конечно, в случае $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ можно посредством отождествлений $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{H}$ с $\mathbb{R}^4$ перейти к вещественным (необходимо ортогональным и унимодулярным) матрицам, но это не только удвоит или учетверит размерность, но и приведет к потере существенной информации.

При $n = 8m - 1$ или $n = 8m + 3$ мы, конечно, на самом деле, осуществляем представление элементов группы $\mathrm{Spin}(n)$ парами матриц вдвое меньшего порядка.

Обратим внимание, что мы проигнорировали возможность получить другую серию представлений, пользуясь алгеброй $\mathbb{C}\mathrm{l}_+(n)$ и изоморфизмом $\mathrm{Spin}(n) \approx \mathrm{Spin}_+(n)$. Причиной является то, что эти представления не дают, по существу, ничего нового, приводя к эквивалентным представлениям или к представлениям, получающимся из них овеществлением, комплексификацией или построением прямой суммы.

Однако существует другая возможность построения представлений групп $\mathrm{Spin}(n)$, которая хотя также фактически не дает ничего нового, но помогает уточнить структуру уже построенных представлений.

Эта возможность основывается на том, что, по определению, группа $\mathrm{Spin}(n)$ содержится в подалгебре $\mathbb{C}\mathrm{l}^0(n)$ алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$, состоящей из четных элементов.

Предложение 8. *Для любого $n \geqslant 1$ алгебра $\mathbb{C}\mathrm{l}^0(n)$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}\mathrm{l}(n-1)$.*

Доказательство. Определим линейное отображение

$$\omega\colon \mathbb{C}\mathrm{l}(n-1) \to \mathbb{C}\mathrm{l}^0(n),$$

положив

$$\omega(e_I) = \begin{cases} e_I, & \text{если } |I| \text{ четно}, \\ e_I e_n, & \text{если } |I| \text{ нечетно}, \end{cases}$$

для любого базисного элемента e_I алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}(n-1)$, где I — произвольное подмножество множества $[n-1] = \{1, \ldots, n-1\}$. Другими словами, $\omega(e_I) = e_{I^+}$, где

$$I^+ = \begin{cases} I, & \text{если } |I| \text{ четно}, \\ I \cup \{n\}, & \text{если } |I| \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Обозначая, как и выше, через $\tau(I, J)$ число пар $(i, j) \in I \times J$, для кторых $i \geqslant j$, мы немедленно получим, что

$$\tau(I^+, J^+) \equiv \tau(I, J) \bmod 2.$$

Кроме того, легко видеть, что $I^+ \triangle J^+ = (I \triangle J)^+$. Поэтому (см. формулу (13))

$$\omega(e_I)\,\omega(e_J) = e_{I^+} e_{J^+} = (-1)^{\tau(I^+, J^+)} e_{I^+ \triangle J^+} = \\ = (-1)^{\tau(I, J)} e_{(I \triangle J)^+} = \omega(e_I e_J)$$

для любых базисных элементов e_I и e_J алгебры $\mathbb{C}l(n-1)$. Поэтому ω является гомоморфизмом алгебр, и, следовательно (осуществляя биективное соответствие между их базисами), и изоморфизмом. □

Заметим, что обратный изоморфизм ω^{-1} действует по формуле

$$\omega^{-1}(u + ve_n) = u + v,$$

где слева u и v — элементы алгебры $\mathbb{C}l(n)$ (из $\mathbb{C}l^0(n)$ и $\mathbb{C}l^1(n)$ соответственно), не содержащие e_n, т. е. разлагающиеся по базисным векторам e_I с $I \subset [n-1]$, а справа — «те же» элементы алгебры $\mathbb{C}l(n-1)$.

Замечание 4. Как мы знаем, алгебры $\mathbb{C}l^0(n)$ и $\mathbb{C}l^0_+(n)$ изоморфны. Поэтому *алгебра* $\mathbb{C}l(n-1)$ *изоморфна также алгебре* $\mathbb{C}l^0_+(n)$. В явном виде изоморфизм ω_+: $\mathbb{C}l(n-1) \to \mathbb{C}l^0_+(n)$ задается, очевидно, формулами

$$\omega_+(e_I) = \begin{cases} \bar{e}_I, & \text{если } |I| \text{ четно}, \\ e_n \bar{e}_I, & \text{если } |I| \text{ нечетно}. \end{cases}$$

В силу предложения 8 мы можем считать, что $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathbb{C}l(n-1)$. Поэтому, снова применив теорему 2, мы получим *представление элементов группы* $\mathrm{Spin}(n)$ *матрицами порядка* $2^{\alpha(n-1)}$ *над алгеброй* $\mathbb{K}$, *где*

$$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{если } n = 8m-1,\ 8m,\ 8m+1, \\ \mathbb{C}, & \textit{если } n = 8m-2,\ 8m+2, \\ \mathbb{H}, & \textit{если } n = 8m+3,\ 8m+4,\ 8m+5. \end{cases}$$

Конечно, при $n = 8m$ и $n = 8m + 4$ речь на самом деле идет о представлении парами матриц порядка $2^{a(n-1)-1}$.

Любой вектор $u \in \mathbb{R}^n$ мы можем записать в виде $u = u' + \lambda e_n$, где $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$, а $\lambda \in \mathbb{R}$, причем $u \in S^{n-1}$ тогда и только тогда, когда $|u'|^2 + \lambda^2 = 1$. По определению группа $\mathrm{Spin}(n)$ порождается всевозможными элементами вида uv, где $u, v \in S^{n-1}$, т. е. элементами вида

$$(u' + \lambda e_n)(v' + \mu e_n) = (u'v' - \lambda\mu) + (\mu u' - \lambda v')\, e_n,$$

и, значит, ее образ в $\mathbb{C}l(n-1)$ — элементами вида $(u'v' - \lambda\mu) + (\mu u' - \lambda v')$. Но, положив $v^* = v' - \mu e_n$, мы получим, что элемент

$$ue_n \cdot v^* e_n = (u'e_n - \lambda)(v'e_n + \mu) = (u'v' - \lambda\mu) + (\mu u' - \lambda v')\, e_n$$

имеет в $\mathbb{C}l^0(n-1)$ тот же образ $(u'v' - \lambda\mu) + (\mu u' - \lambda v')$, что и элемент uv. Это показывает (поскольку $ue_n \in \mathrm{Spin}(n)$ и $v^* \in S^{n-1}$, если $v \in S^{n-1}$), что образ группы $\mathrm{Spin}(n)$ в алгебре $\mathbb{C}l^0(n-1)$ порождается образами элементов вида ue_n, $u \in S^{n-1}$. Так как $ue_n = u'e_n - \lambda$, то эти образы имеют вид $u' - \lambda$ и, значит, представляются матрицами вида $U - \lambda E$. Поскольку $\overline{U}^{\mathrm{T}} = -U$ и, значит,

$$(U - \lambda E)(\overline{U} - \lambda E)^{\mathrm{T}} = -(U - \lambda E)(U + \lambda E) = \\ = -U^2 + \lambda^2 E = (|u'|^2 + \lambda^2)\, E = E,$$

все эти матрицы ортогональны (или соответственно унитарны и симплектичны). Этим доказано, что *вновь построенные представления также являются представлениями в группах* $\mathrm{O}_{\mathbb{K}}(N)$ (*а при* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — *в группах* $\mathrm{SO}(N)$).

Таким образом, например, мы представили теперь группу $\mathrm{Spin}(8m + 1)$ ортогональными матрицами порядка 2^{4m}, тогда как раньше мы представляли ее унитарными матрицами этого же порядка. Однако, внимательно проследив все изоморфизмы, можно показать, что эти *унитарные матрицы на самом деле вещественны* и что получающееся представление вещественными унитарными, т. е. ортогональными, матрицами эквивалентно только что построенному. (Без всяких вычислений это

вытекает из общих результатов о матричных представлениях групп $\mathrm{Spin}(n)$, которые мы докажем в следующем семестре в рамках общей теории представлений компактных групп Ли. Поэтому здесь этот факт мы доказывать не будем.) Следовательно, мы фактически имеем только одно представление группы $\mathrm{Spin}(8m+1)$ ортогональными матрицами. Оно называется *спинорным представлением* этой группы.

Для группы же $\mathrm{Spin}(8m)$ мы теперь получаем представление парами (A, B) унимодулярных ортогональных матриц порядка 2^{4m-1}. Оказывается (что опять проще всего доказывать на основе общей теории следующего семестра), что, отождествив эти пары с матрицами (19) порядка 2^{4m}, мы придем к представлению, эквивалентному построенному ранее. Таким образом, и здесь мы получаем лишь некоторое уточнение предыдущего представления.

Впрочем, обычно предпочитают рассматривать не пары матриц, а компоненты этих пар в отдельности, т. е. два гомоморфизма

$$\mathrm{Spin}(8m) \rightrightarrows \mathrm{SO}(2^{4m-1}). \tag{20}$$

Эти гомоморфизмы называются *полуспинорными представлениями* группы $\mathrm{Spin}(8m)$.

Подчеркнем, что *полуспинорные представления мономорфизмами не являются*. Действительно, при изоморфизме $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n) \approx \mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n-2) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2)$ из предложения 7 элемент $e_{[n]} = e_1 \ldots e_n$ алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(n)$ переходит в элемент $e_{[n-2]} \otimes (e_1e_2)^{n-1} = (-1)^{n-1} e_{[n-2]} \otimes 1$ алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-\varepsilon}(n-2) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_\varepsilon(2)$. Поэтому при итерированном изоморфизме $\mathbb{C}\mathrm{l}(n) \approx \mathbb{C}\mathrm{l}(n-4) \otimes \mathbb{H}(2)$ (мы ограничиваемся случаем $\varepsilon = -1$) этот элемент переходит в элемент $e_{[n-4]} \otimes E$, где E — единичная матрица. Очевидная индукция теперь показывает, что при $n = 8m-1$ элементу $e_{[n]}$ соответствует в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{l}(3) \otimes \mathbb{H}(2^{4m-3})$ элемент $e_{[3]} \otimes E$ и, значит, в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{l}_+(1) \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}(2) \otimes \mathbb{H}(2^{4m-3}) \approx (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}(2^{4m-1})$ — элемент $e_1 \otimes 1 \otimes E \approx (E, -E)$. Этим доказано, что при одном полуспинорном представлении (20) в единичную матрицу E переходит элемент $e_{[8m-1]}$, а при другом — элемент $-e_{[8m-1]}$. (Здесь считается, что $\mathrm{Spin}(8m) \subset \mathbb{C}\mathrm{l}(8m-1)$;

при естественном вложении $\mathrm{Spin}(8m) \subset \mathbb{C}l^0(8m)$ вместо элемента $e_{[8m-1]}$ появится элемент $e_{[8m]}$). □

Замечание 5. Можно показать, что элементы $e_{[8m]}$ и $-e_{[8m]}$ являются единственными нетривиальными элементами группы $\mathrm{Spin}(8m)$, переходящими при гомоморфизмах (20) в единичную матрицу.

Ранее построенное «парное» представление для группы $\mathrm{Spin}(8m-1)$ также можно расщепить в два гомоморфизма. Однако эти гомоморфизмы будут точными представлениями (т. е. мономорфизмами) и будут эквивалентны единственному новому представлению группы $\mathrm{Spin}(8m-1)$ в группе $\mathrm{SO}(2^{4m-1})$.

Для группы $\mathrm{Spin}(8m-2)$ мы получаем теперь комплексное представление в группе $\mathrm{U}(2^{4m-2})$. Оказывается, что при вложении $\mathrm{U}(2^{4m-2}) \subset \mathrm{SO}(2^{4m-1})$ оно переходит в представление, эквивалентное построенному ранее представлению в группе $\mathrm{SO}(2^{4m-1})$.

Для группы $\mathrm{Spin}(8m-3)$ построенное ранее комплексное представление аналогичным образом получается из нового кватернионного представления.

Для группы $\mathrm{Spin}(8m+2)$ построенное ранее кватернионное представление оказывается на самом деле комплексным представлением, эквивалентным новому представлению. Это положение дел аналогично ситуации, возникающей при $n = 8m+1$.

Для группы $\mathrm{Spin}(8m+3)$ построенное ранее «парное» кватернионное представление состоит из двух представлений, эквивалентных новому представлению.

Для группы $\mathrm{Spin}(8m+4)$ построенное ранее кватернионное представление оказывается на самом деле «блочным» представлением, сводящимся к «парному» новому.

В последних двух случаях ситуация аналогична положению дел для групп $\mathrm{Spin}(8m-1)$ и $\mathrm{Spin}(8m)$ соответственно.

Как уже отмечалось, все эти утверждения автоматически вытекают из общей теории, которая будет изложена в следующем семестре. Их непосредственная проверка, хотя и утомительна, но вполне возможна. Мы оставим ее инициативе читателя.

Заключим эту лекцию доказательством формулы (18) из линейной алгебры, которая выше была принята без

доказательства. Для матрицы оператора A эта формула равносильна некоторому соотношению между ее минорами второго порядка и может быть поэтому доказана непосредственным, хотя и несколько громоздким, вычислением. Однако чтобы прояснить внутренний смысл этой формулы, мы предпочтем дать здесь ей более концептуальное доказательство в его естественной общности.

Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное конечномерное линейное пространство над произвольным полем $\mathbb{K}$, и пусть, как всегда, $\mathscr{V}'$ — сопряженное пространство. Пусть, далее, $\bigwedge^p(\mathscr{V})$ и $\bigwedge^p(\mathscr{V}')$ — пространства кососимметрических p-линейных функционалов на пространствах $\mathscr{V}'$ и $\mathscr{V}$ соответственно; см. II, 9, стр. 77. Для любого p-вектора $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$ и любого p-ковектора $\xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^p \in \bigwedge^p(\mathscr{V}')$ мы положим

$$\langle x_1 \wedge \ldots \wedge x_p,\ \xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^p \rangle = \det |\, \xi^i(x_j)\, |_{i,\, j=1 \ldots p}.$$

Автоматически проверяется, что функция $\langle\, ,\, \rangle$ по линейности корректно продолжается на любые элементы линеалов $\bigwedge^p(\mathscr{V})$ и $\bigwedge^p(\mathscr{V}')$ и является спариванием (см. II, 4, с. 34) между этими пространствами. Таким образом, *линеалы* $\bigwedge^p(\mathscr{V})$ *и* $\bigwedge^p(\mathscr{V}')$ *естественно двойственны друг другу* и потому линеал $\bigwedge^p(\mathscr{V}') = \bigwedge_p(\mathscr{V})$ может быть отождествлен с линеалом $\bigwedge^p(\mathscr{V})'$, сопряженным с линеалом $\bigwedge^p(\mathscr{V})$.

Для каждого кососимметрического функционала $y \in \bigwedge^q(\mathscr{V})$ (нам теперь удобно несколько изменить принятые в II обозначения) соответствие $x \longmapsto x \wedge y$, где $x \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$, является линейным отображением $\bigwedge^p(\mathscr{V}) \to \bigwedge^{p+q}(\mathscr{V})$ и потому определяет сопряженное отображение $\bigwedge^{p+q}(\mathscr{V}') \to \bigwedge^p(\mathscr{V}')$. Образ функционала $z \in \bigwedge^{p+q}(\mathscr{V}')$ при этом отображении обозначается символом $y \lrcorner z$ и называется *левым внутренним произведением* функционалов y и z. По определению

$$\langle x,\ y \lrcorner z \rangle = \langle x \wedge y,\ z \rangle \quad \text{для любого} \quad z \in \bigwedge^{p+q}(\mathscr{V}').$$

Аналогично, *правое внутреннее произведение* $x \llcorner y$ функционалов $x \in \bigwedge^{p+q}(\mathscr{V})$ и $y \in \bigwedge^q(\mathscr{V}')$ принадлежит $\bigwedge^p(\mathscr{V})$ и характеризуется равенством

$$\langle x \llcorner y,\ z \rangle = \langle x,\ y \wedge z \rangle \quad \text{для любого} \quad z \in \bigwedge^p(\mathscr{V}').$$

Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства $\mathscr{V}$, то для любого подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ множества $[n] = \{1, \ldots, n\}$, где $i_1 < \ldots < i_p$, базисный p-вектор $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ мы будем обозначать символом e_I (см. выше аналогичные обозначения для элементов алгебры Клиффорда). Аналогично символом e^I будем обозначать базисный p-ковектор $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$, где $e^1, \ldots, e^n$ — векторы сопряженного базиса пространства $\mathscr{V}'$. При этом, как непосредственно вытекает из кососкоммутативности внешнего умножения, для любых подмножеств $I, J \subset [n]$ будет иметь место формула

$$e_I \wedge e_J = \begin{cases} (-1)^{\tau(I, J)} e_{I \cup J}, & \text{если} \quad I \cap J = \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\tau(I, J)$, как и в формуле (13), — число пар (i, j), для которых $i \in I$, $j \in J$ и $i \geqslant j$. Та же формула имеет место, конечно, и для поликовектора $e^I \wedge e^J$.

Из этих формул немедленно следует, что

$$e_I \lrcorner e^J = \begin{cases} (-1)^{\tau(K, J)} e^K, & \text{если} \quad I \subset J, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и аналогично

$$e_J \llcorner e_I = \begin{cases} (-1)^{\tau(J, K)} e^K, & \text{если} \quad I \subset J, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $K = J \setminus I$ — дополнение I в J.

Рассмотрим теперь произвольный линейный оператор $A: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$. Положив для любого поливектора $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$

$$A_{[p]}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = Ax_1 \wedge \ldots \wedge Ax_p,$$

и по линейности распространив $A_{[p]}$ на любые элементы линеала $\bigwedge^p(\mathscr{V})$, мы, очевидно, корректно определим некоторый линейный оператор $A_{[p]}: \bigwedge^p(\mathscr{V}) \to \bigwedge^p(\mathscr{V})$, называемый обычно *p-й внешней степенью* оператора A. (Рассмотренный выше оператор $\hat{A}$ является не чем иным, как оператором $A_{[2]}$.)

Ясно, что

$$A_{[p+q]}(x \wedge y) = A_{[p]}x \wedge A_{[q]}y$$

для любых функционалов $x \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$ и $y \in \bigwedge^q(\mathscr{V})$. Кроме того, из определений непосредственно вытекает, что

$$(A')_{[p]} = (A_{[p]})',$$

где штрих означает, как всегда (см. II, 14), переход к сопряженному оператору. Поэтому обозначение $A'_{[p]}$ вполне корректно.

Ключом к формуле (10) является следующая лемма:

Лемма 4. Для любых функционалов $x \in \bigwedge^q(\mathscr{V})$, $y \in \bigwedge^{p+q}(\mathscr{V}')$ и любого оператора A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ справедливо равенство

$$x \lrcorner A'_{[p+q]}y = A'_{[p]}(A_{[q]}x \lrcorner y).$$

Доказательство. Для каждого функционала $z \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$ имеем

$$\begin{aligned}\langle z, x \lrcorner A'_{[p+q]}y\rangle &= \langle z \wedge x, A'_{[p+q]}y\rangle = \\ &= \langle A_{[p+q]}(z \wedge x), y\rangle = \\ &= \langle A_{[p]}z \wedge A_{[q]}x, y\rangle = \\ &= \langle A_{[p]}z, A_{[q]}x \lrcorner y\rangle = \langle z, A'_{[p]}(A_{[q]}x \lrcorner y)\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

Мы применим лемму 4 к случаю, когда $p + q = n$ и $y = e^{[n]} = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$. Поскольку, как показывает непосредственное вычисление,

$$A'_{[n]}e^{[n]} = (\det A)\, e^{[n]},$$

то, согласно лемме 3, для любого функционала $x \in \bigwedge^q(\mathscr{V})$ и любого оператора A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ имеет место формула

$$(\det A)(x \lrcorner e^{[n]}) = A'_{[p]}(A_{[q]}x \lrcorner e^{[n]}).$$

Положив

$$Tx = x \lrcorner e_{[n]}, \qquad x \in \bigwedge^q(\mathscr{V}),$$

мы можем эту формулу переписать в следующем виде:

$$(\det A)\, T = A'_{[p]} \circ T \circ A_{[q]}, \quad \text{где} \quad p + q = n.$$

В явном виде отображение T задается формулой

$$Te_I = (-1)^{\tau(I)} e^J,$$

где $J = [n] \setminus I$ — дополнение I в $[n]$, а $\tau(I) = \tau(J, I)$ — число таких пар (j, i), что $i \in I$, $j \notin I$ и $j \geq i$. В частно-

сти, отсюда видно, что T представляет собой изоморфизм $\Lambda^q(\mathscr{V}) \to \Lambda^{n-q}(\mathscr{V}')$.

В частном случае, когда $\det A = 1$, мы получаем формулу

$$A^c_{[p]} \circ T = T \circ A_{[q]}, \tag{21}$$

где $A^c = (A')^{-1}$.

До сих пор все наши построения были вполне инвариантны (даже изоморфизм T от выбора базиса с точностью до множителя не зависит, поскольку при изменении базиса он умножается на определитель матрицы перехода). Теперь же мы, предполагая базис $e_1, \ldots, e_n$ выбранным (т. е. фактически переходя от линеала $\mathscr{V}$ к линеалу $\mathbf{K}^n$), отождествим линеалы $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ по равенству координат в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $e^1, \ldots, e^n$ (в инвариантных терминах это равносильно заданию в линеале некоторого скалярного произведения, т. е. спаривания этого линеала с самим собой). Тогда T окажется изоморфизмом $\Lambda^q(\mathscr{V}) \to \Lambda^{n-q}(\mathscr{V})$ и будет определяться формулой

$$Te_I = (-1)^{\tau(I)} e_J$$

и, значит, при $n = 4$, $p = q = 2$ будет совпадать с изоморфизмом T, определенным формулами (17) (обобщенными на случай произвольного основного поля $\mathbf{K}$). Таким образом, с точностью до обозначений формула (18) оказывается частным случаем формулы (21).

Тем самым формулу (18) мы можем считать полностью доказанной.

Замечание 6. Записав общую формулу (21) в матричном виде, мы получим формулу, выражающую через миноры порядка $q = n - p$ произвольной невырожденной матрицы миноры порядка p обратной матрицы. Чисто вычислительное доказательство этой формулы в высшей степени громоздко.