

## Лекция 14

УДВОЕНИЕ АЛГЕБР.— МЕТРИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ.— НОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ.— АВТОМОРФИЗМЫ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБР.— ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ УДВОЕННОЙ АЛГЕБРЫ.— ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ  $\mathbb{H}$  — АЛГЕБРА ОКТАВ.— АЛГЕБРА ЛИ  $g_2$ .— СТРУКТУРНЫЕ КОНСТАНТЫ АЛГЕБРЫ ЛИ  $g_2^C$ .— ЗАДАНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ  $g_2^C$  ОБРАЗУЮЩИМИ И СООТНОШЕНИЯМИ.

Конструкция кватернионов из комплексных чисел вполне аналогична конструкции комплексных чисел из вещественных. Более того, обе эти конструкции являются частными случаями одной общей конструкции.

Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольная (но, как всегда, конечно-мерная) алгебра над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , в которой задано *сопряжение*, т. е. некоторый инволютивный антиавтоморфизм  $(a \mapsto \bar{a})$  (случай, когда  $\bar{a} = a$  для всех  $a \in \mathcal{A}$  не исключается).

Рассмотрим линейное пространство  $\mathcal{A}^2$ , являющееся прямой суммой двух экземпляров линейного пространства  $\mathcal{A}$ , т. е. состоящее из пар вида  $(a, b)$ , где  $a, b \in \mathcal{A}$ . Мы введем в  $\mathcal{A}^2$  умножение по формуле

$$(a, b)(u, v) = (au - \bar{v}b, bu + va).$$

Автоматическая проверка показывает, что относительно этого умножения линеал  $\mathcal{A}^2$  является алгеброй (размерности  $2n$ , где  $n = \dim \mathcal{A}$ ). Мы будем называть эту алгебру *удвоением* алгебры  $\mathcal{A}$ .

Ясно, что соответствие  $a \mapsto (a, 0)$  является мономорфизмом алгебры  $\mathcal{A}$  в алгебру  $\mathcal{A}^2$ . Мы будем отождеств-

влять элементы  $a$  и  $(a, 0)$  и, таким образом, считать алгебру  $\mathcal{A}$  подалгеброй алгебры  $\mathcal{A}^2$ . Если алгебра  $\mathcal{A}$  унитальна, то элемент  $1 = (1, 0)$  будет, очевидно, единицей и алгебры  $\mathcal{A}^2$ .

Пусть  $e = (0, 1)$ . Тогда  $be = (0, b)$  и, следовательно,  $(a, b) = a + be$  для любых элементов  $a, b \in \mathcal{A}$ . Таким образом, каждый элемент алгебры  $\mathcal{A}^2$  единственным образом записывается в виде  $a + be$ . При этом

$$(1) \quad \begin{aligned} a(be) &= (ba)e, & (ae)b &= (a\bar{b})e, \\ (ae)(be) &= -\bar{b}a, \end{aligned}$$

что вместе с требованием дистрибутивности однозначно определяет умножение в  $\mathcal{A}^2$ . В частности,  $e^2 = -1$ .

Удвоением  $\mathbb{R}^2$  поля  $\mathbb{R}$  является алгебра  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, а удвоением  $\mathbb{C}^2$  алгебры  $\mathbb{C}$  — алгебра кватернионов  $\mathbb{H}$ . Первое утверждение очевидно, а для доказательства второго следует в каждом элементе  $\xi = a + be$  алгебры  $\mathbb{C}^2$  выписать комплексные числа  $a$  и  $b$  явном виде, т. е. положить  $a = a_0 + a_1i$ ,  $b = a_2 + a_3i$ , и обозначить  $e$  через  $j$ , а  $ie$  через  $k$ . В результате мы получим для  $\xi$  обычную кватернионную запись

$$\xi = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k.$$

Тот факт, что элементы  $i, j$  и  $k = ij$  удовлетворяют обычным кватернионным тождествам, проверяется автоматически.

Так как для любого элемента  $a$  алгебры  $\mathcal{A}$  имеет место равенство  $ea = \bar{a}e$ , то, подобно алгебре кватернионов  $\mathbb{H}$ , алгебра  $\mathcal{A}^2$  заведомо некоммутативна, если сопряжение в алгебре  $\mathcal{A}$  не является тождественным отображением. Аналогично, так как  $a(be) = (ba)e$ , то алгебра  $\mathcal{A}^2$  неассоциативна, если алгебра  $\mathcal{A}$  некоммутативна. В частности, *удвоение  $\mathbb{H}^2$  алгебры  $\mathbb{H}$  неассоциативно*.

Таким образом, мы видим, что при итерировании конструкции удвоения алгебраические свойства умножения постепенно ухудшаются.

Конечно, для итерации конструкции удвоения нужно определить в алгебре  $\mathcal{A}^2$  сопряжение. Мы сделаем это по формуле

$$\overline{a + be} = \bar{a} - be,$$

переходящей при  $A = \mathbb{R}$  в обычную формулу комплексного сопряжения (конечно, после замены  $e$  на  $i$ ). Ясно, что это отображение инволютивно и линейно. Автоматическая выкладка показывает, что оно является и антиавтоморфизмом. При  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$  оно представляет собой обычное сопряжение в алгебре  $\mathbb{H}$ .

Унитальную алгебру  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{R}$  мы будем называть *метрической алгеброй*, если в ней задано такое сопряжение  $a \mapsto \bar{a}$ , что для любого элемента  $a \in \mathcal{A}$  элемент  $a\bar{a}$  принадлежит пространству  $\mathbb{R}$  (т. е., точнее, подпространству  $\mathbb{R} \cdot 1$ ), и при  $a \neq 0$  положителен:  $a\bar{a} > 0$ . Вещественное число  $|a| = \sqrt{a\bar{a}}$  мы будем называть *нормой* элемента  $a$ . По определению  $|a| = 0$  тогда и только тогда, когда  $a = 0$ .

Непосредственная проверка показывает, что в любой метрической алгебре  $\mathcal{A}$  формула

$$(x, y) = \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{2}$$

определяет некоторое скалярное произведение. Таким образом, по отношению к этому произведению любая метрическая алгебра является евклидовым пространством. Норма  $|a|$  элемента  $a \in \mathcal{A}$  является при этом не чем иным, как его длиной.

Ортогональное дополнение единицы в метрической алгебре  $\mathcal{A}$  мы будем обозначать символом  $\mathcal{A}'$ .

Любой элемент  $a \in \mathcal{A}$  единственным образом представляется в виде  $a = \lambda + a'$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $a' \in \mathcal{A}'$ . При этом  $\bar{a} = \lambda - a'$ , так что, в частности,  $a \in \mathcal{A}'$  тогда и только тогда, когда  $\bar{a} = -a$ , и  $a \in \mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда  $\bar{a} = a$ .

По определению

$$(2) \quad x\bar{y} + \bar{x}y = 2(x, y)$$

для любых элементов  $x, y$  метрической алгебры  $\mathcal{A}$ . В частности, если  $x, y \in \mathcal{A}'$ , то  $x\bar{y} = -\bar{y}x$  тогда и только тогда, когда  $x \perp y$ .

Легко видеть, что для любой метрической алгебры  $\mathcal{A}$  алгебра  $\mathcal{A}^2$  также метрическая. Действительно,

$$(a + be)(\bar{a} + \bar{b}e) = (a + be)(\bar{a} - b\bar{e}) = a\bar{a} + b\bar{b}$$

для любого элемента  $a + be \in \mathcal{A}^2$ .  $\square$

Скалярное произведение в  $\mathcal{A}^2$  задается, очевидно, формулой

$$(a + be, u + ve) = (a, u) + (b, v),$$

так что прямая сумма  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$  оказывается прямой суммой евклидовых пространств.

Таким образом, все алгебры  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ ,  $\mathbb{H}^2, \dots$  являются метрическими алгебрами.

Конечномерная алгебра  $\mathcal{A}$ , одновременно являющаяся евклидовым пространством (но априори не обязательно метрическая), называется *нормированной алгеброй*, если

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

для любых элементов  $a, b \in \mathcal{A}$ . В такой алгебре для любого элемента  $a \neq 0$  отображения  $x \mapsto \frac{ax}{|a|}$  и  $x \mapsto \frac{xa}{|a|}$  изометричны и, следовательно (в силу конечномерности алгебры  $\mathcal{A}$ ), биективны. Поэтому для каждого элемента  $b \in \mathcal{A}$  уравнения  $ax = b$  и  $xa = b$  однозначно разрешимы в  $\mathcal{A}$ , т. е. *нормированная алгебра  $\mathcal{A}$  является алгеброй с делением*.

Примерами нормированных алгебр являются метрические алгебры  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{H}$ . Как мы ниже увидим, метрическая алгебра  $\mathbb{H}^2$  также нормирована.

**Теорема Гурвица**, которую мы докажем в следующем семестре, утверждает, что этими четырьмя алгебрами исчерпываются все нормированные алгебры (так что, в частности, любая нормированная алгебра необходимо является метрической алгеброй).

Если автоморфизм  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  метрической алгебры перестановочен с сопряжением (т. е. если  $\overline{\Phi a} = \Phi \bar{a}$  для любого элемента  $a \in \mathcal{A}$ ), то он, конечно, является ортогональным оператором. Обратно, если автоморфизм  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  метрической алгебры  $\mathcal{A}$  ортогонален, то, поскольку  $\Phi 1 = 1$ , он переводит в себя подпространство  $\mathcal{A}'$  и потому перестановочен с сопряжением.

При этом легко видеть, что если алгебра  $\mathcal{A}$  нормирована, то любой ее автоморфизм  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  является ортогональным оператором. Действительно, достаточно

доказать, (см. II, 21, условие б) предложения 2), что если  $|a| = 1$ , то  $|\Phi a| = 1$ . Но если  $|\Phi a| < 1$ , то  $|\Phi a^k| = |(\Phi a)^k| = |\Phi a|^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , т. е.  $\Phi a^k \rightarrow 0$  и, значит,  $a^k \rightarrow 0$ . Поэтому  $|a|^k = |a^k| \rightarrow 0$ , что при  $|a| = 1$  невозможно. Аналогично, если  $|\Phi a| > 1$ , то  $|a|^k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , что также невозможно. Следовательно,  $|\Phi a| = 1$ .  $\square$

Как правило, во всех наших алгебрах  $\mathcal{A}$  будет фиксирован некоторый базис. Поэтому группу ортогональных операторов  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  мы можем отождествлять с группой  $O(n)$  ортогональных матриц. В силу этого отождествления для группы  $\text{Aut } \mathcal{A}$  автоморфизмов нормированной алгебры  $\mathcal{A}$  будет иметь место включение

$$\text{Aut } \mathcal{A} \subset O(n), \quad \text{где } n = \dim \mathcal{A}.$$

Более того, поскольку каждый автоморфизм  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  однозначно восстанавливается по индуцированному им линейному отображению  $\Phi': \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}'$  (если  $a = \lambda + a'$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а  $a' \in \mathcal{A}'$ , то  $\Phi a = \lambda + \Phi' a'$ ), мы можем, отождествляя  $\Phi$  с  $\Phi'$ , считать, что

$$(3) \quad \text{Aut } \mathcal{A} \subset O(n - 1).$$

В частности, это верно при  $\mathcal{A} = \mathbb{C}^l$ , когда  $n = 2$ . Следовательно, поскольку  $O(1) = \mathbb{Z}_2$ , группа  $\text{Aut } \mathbb{C}^l$  является группой второго порядка  $\mathbb{Z}_2$ , состоящей из тождественного автоморфизма  $\text{id}$  и автоморфизма комплексного сопряжения  $a \mapsto \bar{a}$ .

Для алгебры Ли  $\text{Der } \mathcal{A} = \text{I}(\text{Aut } \mathcal{A})$  дифференцирований алгебры  $\mathcal{A}$  из включения (3) следует, что

$$(4) \quad \text{Der } \mathcal{A} \subset \mathfrak{so}(n - 1),$$

где  $\mathfrak{so}(n - 1)$  — алгебра Ли кососимметрических матриц порядка  $n - 1$ . Поэтому, в частности,  $\text{Der } \mathbb{C}^l = 0$ .

Впрочем, равенства  $\text{Aut } \mathbb{C}^l = \mathbb{Z}_2$  и  $\text{Der } \mathbb{C}^l = 0$  легко получить и непосредственно. Действительно, являясь линейным оператором над полем  $\mathbb{R}$ , переводящим 1 в 1, любой автоморфизм  $\Phi: \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^l$  однозначно определяется числом  $\Phi i$ . Но поскольку  $i^2 = -1$ , для этого числа должно иметь место равенство  $(\Phi i)^2 = -1$ . Следовательно,  $\Phi i = \pm i$ , что и дает нам тождественный оператор и комплексное сопряжение.

Аналогично, любое дифференцирование  $D: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  однозначно определяется числом  $Di$ , которое должно удовлетворять тождеству

$$Di \cdot i + i \cdot Di = D(i^2) = -D1 = 0,$$

возможному только при  $Di = 0$ .

Эти простые соображения допускают очевидное обобщение на случай любой удвоенной алгебры  $\mathcal{A}^2$ . Именно, каждое дифференцирование  $D$  алгебры  $\mathcal{A}^2$  определяет по формулам

$$Da = D_0a + Fa \cdot e, \quad De = x_0 + y_0e$$

два линейных оператора  $D_0, F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , и два элемента  $x_0, y_0 \in \mathcal{A}$ , причем ввиду равенства

$$D(a + be) = Da + Db \cdot e + b \cdot De,$$

т. е. равенства

$$(5) \quad D(a + be) = (D_0a - Fb + bx_0) + (Fa + D_0b + y_0b)e,$$

дифференцирование  $D$  однозначно восстанавливается по операторам  $D_0, F$  и элементам  $x_0, y_0$ . Поэтому, чтобы описать алгебру Ли  $\text{Der } \mathcal{A}^2$ , достаточно описать четверки  $(D_0, F, x_0, y_0)$ , для которых формула (5) задает дифференцирование алгебры  $\mathcal{A}^2$ . (Аналогично можно описывать и автоморфизмы, но это приводит к слишком сложным выкладкам.)

Чтобы получить условия на  $D_0, F, x_0, y_0$ , обеспечивающие включение  $D \in \text{Der } \mathcal{A}^2$ , нужно в соотношении

$$(6) \quad D(\xi\eta) = D\xi \cdot \eta + \xi \cdot D\eta,$$

где  $\xi = a + be$  и  $\eta = x + ye$  — произвольные элементы из  $\mathcal{A}^2$ , выразить  $D$  по формуле (5), произвести все умножения и сравнить коэффициенты при  $1$  и  $e$  слева и справа. Например, при  $\xi = a$ ,  $\eta = x$  мы получаем тождество

$$D_0(ax) + F(ax)e = (D_0a \cdot x + a \cdot D_0x) + (Fa \cdot x + Fx \cdot a)e,$$

из которого следует, что  $D_0$  является дифференцированием алгебры  $\mathcal{A}$ , а  $F$  удовлетворяет тождеству

$$(7) \quad F(ax) = Fa \cdot x + Fx \cdot a.$$

Аналогичные тождества мы получим при  $\xi = be$ ,  $\eta = x$ , при  $\xi = a$ ,  $\eta = ye$  и при  $\xi = be$ ,  $\eta = ye$ . Впрочем, на

практике оказывается целесообразным найти сначала общее решение функционального уравнения (7), а затем учесть эти дополнительные тождества. Кроме того, полезно с самого начала учитывать соотношения  $x_0 + \bar{x}_0 = 0$ ,  $y_0 + \bar{y}_0 = 0$ , получающиеся при  $\xi = \eta = e$ , и означающие, что  $x_0, y_0 \in \mathcal{A}'$ .

Пусть, например,  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$  и, значит,  $\mathcal{A}^2 = \mathbb{H}$ . Так как  $\text{Der } \mathbb{C} = 0$ , то  $D_0 = 0$ . Что же касается оператора  $F$ , то, пользуясь тем, что  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , для его вычисления можно применить тот же прием, вводя в рассмотрение линейные операторы  $P, Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемые формулой

$$Fx = Px + Qx \cdot i, \quad x \in \mathbb{R}.$$

При  $a, x \in \mathbb{R}$  из тождества (7) следует, что

$$P(ax) = Pa \cdot x + Px \cdot a \quad \text{и} \quad Q(ax) = Qa \cdot x + Qx \cdot a,$$

т. е. что  $P$  и  $Q$  являются дифференцированиями поля  $\mathbb{R}$ . Поэтому  $P = Q = 0$ , т. е.  $Fx = 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ . Следовательно,  $F(x + yi) = F(yi) = Fi \cdot y$ , т. е.

$$Fa = z_0 \cdot \text{Im } a, \quad \text{где } z_0 = Fi.$$

Непосредственная проверка показывает, что соотношение (7) выполнено при каждом  $z_0$ . Этим доказано, что любое дифференцирование  $D: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  должно (см. формулу (5)) иметь вид

$$(8) \quad D(a + bj) = (-z_0 \text{Im } b + bx_0) + (z_0 \text{Im } a + y_0 b)j,$$

где  $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ . Параметры  $x_0$  и  $y_0$  должны при этом принадлежать  $\mathbb{C}'$ , т. е. должны иметь вид  $x_0 = ia_0$ ,  $y_0 = ib_0$ , где  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ . Подставив найденное выражение в общую формулу (6), мы немедленно обнаружим теперь, что отображение  $D: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , даваемое формулой (8), тогда и только тогда является дифференцированием алгебры  $\mathbb{H}$ , когда  $\text{Re } z_0 = -a_0$ , т. е.  $z_0 = -a_0 + ic_0$ , где  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Тем самым доказано, что каждое дифференцирование  $D: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  алгебры  $\mathbb{H}$  задается формулой

$$(9) \quad D(a + bj) = i(a_0 \text{Re } b - c_0 \text{Im } b) + \\ + [-(a_0 \text{Im } a + b_0 \text{Im } b) + i(b_0 \text{Re } b + c_0 \text{Im } a)]j,$$

где  $a_0, b_0, c_0$  — произвольные вещественные числа.

Отображение (9) переводит подпространство  $\mathbb{H}'$  в себя и в базисе  $i, j, k$  этого подпространства задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & -c_0 \\ -a_0 & 0 & -b_0 \\ c_0 & b_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $\text{Der } \mathbb{H} \subset \mathfrak{so}(3)$  в соответствии с общей формулой (4). Более того, мы теперь видим, что

$$\text{Der } \mathbb{H} = \mathfrak{so}(3).$$

Для группы  $\text{Aut } \mathbb{H}$  из этого равенства следует, что эта группа совпадает либо с группой  $SO(3)$ , либо с группой  $O(3)$  (поскольку, согласно общей формуле (3), имеет место включение  $\text{Aut } \mathbb{H} \subset O(3)$ ). Но так как отображение с матрицей  $-E$ , очевидно, автоморфизмом не является, то

$$(10) \quad \text{Aut } \mathbb{H} = SO(3).$$

В частности, мы видим, что, в отличие от группы  $\text{Aut } \mathbb{C}$ , группа  $\text{Aut } \mathbb{H}$  связна.

Кроме того, сопоставив равенство (10) с предложением 4 предыдущей лекции, мы немедленно получим, что любой автоморфизм  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  является *внутренним автоморфизмом* вида  $\eta \mapsto \xi \eta \xi^{-1}$ , где  $\xi \in S^3$ .

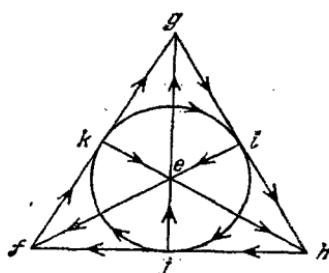
**Замечание 1.** На самом деле равенство (10) может быть доказано без всяких вычислений, если воспользоваться предложением 4 предыдущей лекции. Действительно, это предложение означает, что группа внутренних автоморфизмов  $\eta \mapsto \xi \eta \xi^{-1}$ ,  $\xi \in S^3$ , алгебры  $\mathbb{H}$  совпадает с группой  $SO(3)$ . Следовательно,  $\text{Aut } \mathbb{H} \supseteq SO(3)$ . С другой стороны, как мы только что показали, равенство  $\text{Aut } \mathbb{H} = O(3)$  невозможно. Поэтому  $\text{Aut } \mathbb{H} = SO(3)$ . Мы все-таки привели здесь прямое доказательство, поскольку оно послужит нам образцом для более сложного случая алгебры  $\mathbb{H}^2$ .

Алгебра  $\mathbb{H}^2$  называется *алгеброй октав* (или *алгеброй чисел Кэли*), ее элементы называются *октавами* (или *числами Кэли*). В честь Кэли мы будем обозначать эту алгебру символом  $\mathbb{Ca}$ , хотя Кэли и не был первым, кто ее открыл (им был Грэвс).

По определению каждая октава имеет вид  $\xi = a + be$ , где  $a$  и  $b$  — кватернионы, а умножаются октавы по формулам (1). Базис алгебры  $\mathbb{C}a$  состоит из 1 и семи элементов

$$(11) \quad i, j, k, e, f = ie, \quad g = je, \quad h = ke,$$

квадрат каждого из которых равен  $-1$ , а их попарные произведения схематически изображаются следующим рисунком:



Произведение любых двух элементов (11) равняется с точностью до знака элементу, расположенному на той же прямой (или окружности), а знак определяется ориентацией этой прямой. Например,  $eh = k$ , а  $fj = -h$ .

Как уже отмечалось, алгебра  $\mathbb{C}a$  неассоциативна. Однако алгебра  $\mathbb{C}a$  альтернативна, т. е. для любых двух ее элементов  $\xi$  и  $\eta$  выполнены тождества

$$(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta), \quad \xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta.$$

Действительно, пусть  $\xi = a + be$ ,  $\eta = u + ve$ . Тогда

$$\xi\eta = (au - \bar{v}b) + (b\bar{u} + vu)e,$$

$$(\xi\eta)\eta = [(au - \bar{v}b)u - \bar{v}(b\bar{u} + vu)] + \\ + [(b\bar{u} + vu)\bar{u} + v(au - \bar{v}b)]e,$$

$$\eta\eta = (u^2 - \bar{v}v) + (v\bar{u} + vu)e,$$

$$\xi(\eta\eta) = [a(u^2 - \bar{v}v) - (v\bar{u} + vu)b] + \\ + [b(u^2 - \bar{v}v) + (v\bar{u} + vu)a]e,$$

а так как числа  $\bar{v}v = v\bar{v}$  и  $u + \bar{u}$  вещественны и потому

перестановочны с любым кватернионом, то

$$\begin{aligned} a(u^2 - \bar{v}v) - (\bar{v}\bar{u} + vu)b &= au^2 - a\bar{v}v - (u + \bar{u})\bar{v}b = \\ &= au^2 - \bar{v}va - \bar{v}b(u + \bar{u}) = \\ &= (au - \bar{v}b)u - \bar{v}(b\bar{u} + va) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b(\bar{u}^2 - \bar{v}v) + (v\bar{u} + vu)a &= b\bar{u}^2 - b\bar{v}v + v(\bar{u} + u)a = \\ &= b\bar{u}^2 - v\bar{v}b + va(\bar{u} + u) = \\ &= (b\bar{u} + va)\bar{u} + v(au - \bar{v}b). \end{aligned}$$

Поэтому  $(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta)$ .

Равенство  $\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$  доказывается аналогично.  $\square$

Согласно общей теории сопряжение в  $\mathbb{C}a$  задается формулой

$$\overline{a + be} = \bar{a} - be.$$

Оно оставляет элемент 1 неподвижным и меняет знак каждого элемента (11), так что элементы (11) составляют базис подпространства  $\mathbb{C}a'$ .

Как показал Артин, в альтернативной алгебре любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. Поэтому то же рассуждение, что и для кватернионов показывает, что *алгебра октав  $\mathbb{C}a$  нормирована*. Однако доказательство теоремы Артина в достаточной мере громоздко и у нас нет на него времени. Поэтому мы докажем нормированность алгебры  $\mathbb{C}a$  прямым вычислением.

Пусть  $\xi = a + be$  и  $\eta = u + ve$  — две октавы. Нам надо доказать, что  $|\xi\eta| = |\xi| \cdot |\eta|$ . Но, согласно сказанному выше,

$$\begin{aligned} |\xi\eta|^2 &= |au - \bar{v}b|^2 + |b\bar{u} + va|^2 = \\ &= (au - \bar{v}b)(\bar{u}\bar{a} - \bar{b}\bar{v}) + (b\bar{u} + va)(u\bar{b} + \bar{a}\bar{v}) \end{aligned}$$

и

$$|\xi|^2|\eta|^2 = (a\bar{a} + b\bar{b})(u\bar{u} + v\bar{v}).$$

Поэтому, полагая  $v = \lambda + v'$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а  $v' \in \mathbb{C}a'$  и, значит,  $\bar{v}' = -v'$ , мы получаем, что

$$\begin{aligned} |\xi\eta|^2 - |\xi|^2|\eta|^2 &= \lambda(a\bar{u}b + b\bar{u}\bar{a} - b\bar{u}a - au\bar{b}) + \\ &\quad + (au\bar{b} + b\bar{u}\bar{a})v' - v'(a\bar{u}\bar{b} + b\bar{u}\bar{a}) = 0, \end{aligned}$$

ибо число  $a\bar{b} + b\bar{a}$  вещественно и потому перестановочно с кватернионом  $v'$ .  $\square$

В частности, отсюда следует, что алгебра  $\mathbb{C}a$  является алгеброй с делением. Впрочем, как и в случае кватернионов, непосредственно проверяется (с помощью свойства альтернативности), что уравнения  $\xi x = \eta$  и  $x\xi = \eta$  удовлетворяются (при  $\xi \neq 0$ ) соответственно октавами  $x = \xi^{-1}\eta$  и  $x = \eta\xi^{-1}$ , где  $\xi^{-1} = \frac{\bar{\xi}}{|\xi|^2}$ .  $\square$

**Замечание 2.** Поскольку конструкцию удвоения можно неограниченно итерировать, возникают метрические алгебры  $\mathbb{C}a^2$ ,  $(\mathbb{C}a^2)^2$ , ... и т. д. Но эти алгебры мало интересны, не будучи ни нормированными (в силу теоремы Гурвица), ни альтернативными (в силу так называемой обобщенной теоремы Фробениуса каждая альтернативная конечномерная алгебра над полем  $\mathbb{R}$  изоморфна одной из алгебр  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  или  $\mathbb{C}a$ ; см., например, [11]). Более того, эти алгебры не являются даже алгебрами с делением, поскольку, пользуясь очень сильными средствами современной алгебраической топологии, можно доказать (впервые это сделал Адамс), что размерность алгебры с делением над полем  $\mathbb{R}$  может иметь только значения 1, 2, 4 и 8 (при этом в размерностях 4 и 8 существуют алгебры с делением, отличные от алгебр  $\mathbb{H}$  и  $\mathbb{C}a$ ).

По причинам, в которые здесь мы входить не можем, группа автоморфизмов  $\text{Aut } \mathbb{C}a$  алгебры  $\mathbb{C}a$  обозначается символом  $G_2$ , а ее алгебра Ли  $\text{Der } \mathbb{C}a$  — соответственно символом  $g_2$ . Поскольку алгебра  $\mathbb{C}a$  нормирована и  $\dim \mathbb{C}a = 8$ , то, согласно (3),

$$G_2 \subset O(7)$$

и, значит,

$$g_2 \subset so(7),$$

где  $so(7)$  — алгебра Ли кососимметрических матриц седьмого порядка.

Однако, в отличие от предыдущего случая, алгебра  $g_2$  не совпадает с алгеброй  $so(7)$ , так что теперь мы имеем дело с некоторой новой, пока у нас еще не встречавшейся алгеброй Ли (и новой группой Ли). Мы докажем

это, вычислив размерность алгебры Ли  $g_2$ , которая окажется равной 14 (тогда как  $\dim \mathfrak{so}(7) = 21$ ).

Вычисление алгебры  $g_2$  производится уже известным нам методом. Каждое дифференцирование  $D \in g_2$  задается формулой (5), где теперь  $x_0$  и  $y_0$  — кватернионы,  $D_0$  — некоторое дифференцирование алгебры  $H$ , а  $F$  — линейный оператор  $H \rightarrow H$ , удовлетворяющий тождеству (7). Полагая  $Fx = Px + Qx \cdot j$ , где теперь  $x \in \mathbb{C}$  и  $P, Q$  — линейные операторы  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , мы получим для  $P$  и  $Q$  уравнения

$$P(xy) = Px \cdot \bar{y} + Py \cdot x, \quad Q(xy) = Qx \cdot y + Qy \cdot \bar{x},$$

общее решение которых имеет вид

$$Px = a_0 \operatorname{Im} x, \quad Qx = b_0 \operatorname{Im} x,$$

где  $a_0, b_0 \in \mathbb{C}$ . Следовательно, положив  $Fj = z_0 + w_0 j$ , где  $x_0, w_0 \in \mathbb{C}$ , мы получим, что общее решение функционального уравнения (5) в алгебре  $H$  имеет вид

$$(12) \quad F\xi = (a_0 \operatorname{Im} x + b_0 \operatorname{Im} y + z_0 y) + \\ + (b_0 \operatorname{Im} x - a_0 \operatorname{Im} y + w_0 \bar{y}) j, \quad \xi = x + yj,$$

где  $a_0, b_0, z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ . Автоматическое, хотя и довольно утомительное вычисление показывает теперь, что отображение  $D: \mathbb{C}a \rightarrow \mathbb{C}a$ , определенное формулой (5), где  $D_0$  — некоторое дифференцирование алгебры  $H$ ,  $F$  — отображение (12), а  $x_0$  и  $y_0$  — кватернионы из  $H'$ , тогда и только тогда является дифференцированием алгебры  $\mathbb{C}a$ , т. е. лежит в  $g_2$ , когда  $x_0 = -i \operatorname{Re} a_0 - (\bar{z}_0 + i \operatorname{Re} b_0) j$ .

Этим доказана следующая лемма:

**Лемма 1.** Каждое дифференцирование  $D$  алгебры октав  $\mathbb{C}a$  задается:

а) произвольным дифференцированием  $D_0$  алгебры кватернионов  $H$ ;

б) кватернионом  $y_0$ , удовлетворяющим соотношению  $\bar{y}_0 = -y_0$ ;

в) четырьмя комплексными числами  $a_0, b_0, z_0, w_0$ .

Это дифференцирование действует по формуле

$$D(\xi + \eta e) = (D_0 \xi - F\eta + \eta x_0) + (F\xi + D_0 \eta + y_0 \eta) e,$$

где  $F$  — отображение  $H \rightarrow H$ , определенное формулой (12), а  $x_0 = -i \operatorname{Re} a_0 - (\bar{z}_0 + i \operatorname{Re} b_0) j$ .  $\square$

Дифференцирование  $D_0$  задается кососимметрической матрицей третьего порядка, и, следовательно, зависит от трех вещественных параметров, кватернион  $y_0$  также зависит от трех параметров, а четверка  $a, b, x_0, y_0$  — от восьми. Поэтому дифференцирование  $D$  определяется заданием  $14 = 3 + 3 + 8$  независимых вещественных параметров. Следовательно,  $\dim \mathfrak{g}_2 = 14$ .

В базисе (11) дифференцирование  $D$  задается матрицей, которую можно изобразить в следующем условном, но понятном виде

	$i$	$j$	$k$	$e$	$f$	$g$	$h$
$i$				$-a_0$		$-b_0$	
$j$		$D_0$		$-z_0$		$-w_0$	
$k$				$-c_0$		$d_0$	
$e$	$a_0$	$z_0$	$c_0$	0		$-y_0$	
$f$							
$g$	$b_0$	$w_0$	$-d_0$	$y_0$		$D_0 + y_0$	
$h$							

где  $c_0 = b_0 + z_0 i$ ,  $d_0 = a_0 + w_0 i$ , а  $y_0$  означает оператор (из  $H'$  в  $H$ ) умножения на  $y_0$ . (Этот оператор имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $b_1 i + b_2 j + b_3 k = y_0$ .) Отсюда видно, что матрицы из  $\mathfrak{g}_2$  характеризуются среди всех кососимметрических

матриц  $(a_{ij})$  седьмого порядка следующими семью условиями:

$$(13) \quad \begin{aligned} a_{32} + a_{45} + a_{76} &= 0, \\ a_{13} + a_{64} + a_{75} &= 0, \quad a_{21} + a_{65} + a_{47} = 0, \\ a_{14} + a_{36} + a_{27} &= 0, \quad a_{51} + a_{26} + a_{73} = 0, \\ a_{17} + a_{42} + a_{53} &= 0, \quad a_{61} + a_{52} + a_{34} = 0. \end{aligned}$$

Если  $a_0 = b_0 = 0$  и

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. если  $Di = 0$ , то дифференцирование  $D$  будет переводить в себя подпространство  $\mathcal{V}$  алгебры  $\mathbb{C}a$ , ортогональное элементам 1 и  $i$ . Это подпространство выдерживает умножение на  $i$ , и потому его можно рассматривать как линеал над  $\mathbb{C}$  с базисом  $j, e, g$ . Непосредственное вычисление показывает теперь, что в этом базисе дифференцирование  $D$  записывается комплексной матрицей

$$\begin{pmatrix} -pi & -\bar{z}_0 & -v_0 \\ z_0 & b_1 i & -v_0 \\ \bar{v}_0 & \bar{v}_0 & (p - b_1)i \end{pmatrix},$$

где  $v_0 = b_2 + b_3i$ , а  $p$  и  $b_1$  — вещественные числа. Поскольку это в точности общий вид косоэрмитовых матриц третьего порядка со следом, равным нулю, мы получаем, что дифференцирования  $D: \mathbb{C}a \rightarrow \mathbb{C}a$ , для которых  $Di = 0$ , составляют подалгебру алгебры Ли  $g_2$ , изоморфную алгебре Ли  $\mathfrak{su}(3)$ .

Стандартный способ описания любых конечномерных алгебр состоит в задании в некотором базисе их структурных констант, т. е. коэффициентов разложений по базису попарных произведений элементов этого базиса. Таким образом, если  $e_1, \dots, e_n$  — базис алгебры  $\mathcal{A}$ , то ее структурные константы  $c_{ij}^k$  определяются формулой

$$e_i e_j = c_{ij}^k e_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Общее число этих констант равно  $n^3$ .

Применительно к алгебре Ли  $g_2$  этот метод требует указания  $2744 = 14^3$  чисел, что, конечно, на практике

нереально. Положения не спасает и учет кососимметричности констант по  $i$  и  $j$ , поскольку и после этого остается  $1279 = 91 \cdot 14 = \frac{14 \cdot 13}{2} \cdot 14$  констант. Однако можно надеяться, что при целесообразном выборе базиса в этих константах обнаружатся определенные закономерности, позволяющие удовлетворительным образом их описать. Оказывается, что этого можно действительно добиться, причем ситуация делается особенно простой после комплексификации алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2$ , т. е. для алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_2 \otimes \mathbb{C}$  над полем  $\mathbb{C}$ , состоящей из комплексных матриц седьмого порядка, удовлетворяющих условиям (13). Поскольку обратный переход от  $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$  к  $\mathfrak{g}_2$  легко контролируется, это дает нам структурные константы и для алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2$ .

Рассмотрим стандартный базис алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2$  (7), состоящий из матриц

$$E_{\{i, j\}} = \frac{E_{ij} - E_{ji}}{2},$$

где  $i, j = 1, \dots, 7$  и  $i < j$ . Из условий (13) непосредственно вытекает, что все матрицы

$$\begin{array}{ll} P_0 = E_{[3, 2]} + E_{[6, 7]}, & Q_0 = E_{[4, 5]} + E_{[6, 7]}, \\ P_1 = E_{[1, 3]} + E_{[5, 7]}, & Q_1 = E_{[6, 4]} + E_{[5, 7]}, \\ P_2 = E_{[2, 1]} + E_{[7, 4]}, & Q_2 = E_{[6, 5]} + E_{[7, 4]}, \\ P_3 = E_{[1, 4]} + E_{[7, 2]}, & Q_3 = E_{[3, 6]} + E_{[7, 2]}, \\ P_4 = E_{[5, 1]} + E_{[3, 7]}, & Q_4 = E_{[2, 6]} + E_{[3, 7]}, \\ P_5 = E_{[1, 7]} + E_{[3, 5]}, & Q_5 = E_{[4, 2]} + E_{[3, 5]}, \\ P_6 = E_{[6, 1]} + E_{[4, 3]}, & Q_6 = E_{[5, 2]} + E_{[4, 3]}, \end{array}$$

принадлежат алгебре Ли  $\mathfrak{g}_2$ . Поскольку эти матрицы, очевидно, линейно независимы, они составляют базис (над полем  $\mathbb{R}$ ) алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2$ .

Особое внимание мы уделим линейным комбинациям

$$(14) \quad H = aP_0 + bQ_0 = aE_{[3, 2]} + bE_{[4, 5]} + cE_{[7, 6]}$$

матриц  $P_0$  и  $Q_0$ , где  $a + b + c = 0$ . Заметим, что  $[H_1, H_2] = 0$  для любых элементов  $H_1$  и  $H_2$  вида (14).

Непосредственное вычисление с матрицами показывает, что

$$\begin{aligned} [H, P_1] &= aP_2 + cQ_2, & [H, Q_1] &= (c - b)Q_2, \\ [H, P_2] &= -aP_1 - cQ_1, & [H, Q_2] &= (b - c)Q_1, \\ [H, P_3] &= bP_4 + cQ_4, & [H, Q_3] &= (c - a)Q_4, \\ [H, P_4] &= -bP_3 - cQ_3, & [H, Q_4] &= (a - c)Q_3, \\ [H, P_5] &= cP_6 + aQ_6, & [H, Q_5] &= (a - b)Q_6, \\ [H, P_6] &= -cP_5 - aQ_5, & [H, Q_6] &= (b - a)Q_5, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует, что элементы

$$\begin{aligned} U_{\pm 1} &= (2P_2 - Q_2) \pm i(2P_1 - Q_2), & V_{\pm 1} &= Q_2 \pm iQ_1, \\ U_{\pm 2} &= (2P_4 - Q_4) \pm i(2P_3 - Q_3), & V_{\pm 2} &= Q_4 \pm iQ_3, \\ U_{\pm 3} &= (2P_6 - Q_6) \pm i(2P_5 - Q_5), & V_{\pm 3} &= Q_6 \pm iQ_5, \end{aligned}$$

составляющие базис комплексифицированной алгебры  $\mathfrak{g}_2^C$ , удовлетворяют соотношениям

$$(15) \quad \begin{aligned} [H, U_{\pm 1}] &= \pm iaU_{\pm 1}, & [H, V_{\pm 1}] &= \pm i(c - b)V_{\pm 1}, \\ [H, U_{\pm 2}] &= \pm ibU_{\pm 1}, & [H, V_{\pm 2}] &= \pm i(c - a)V_{\pm 2}, \\ [H, U_{\pm 3}] &= \pm icU_{\pm 3}, & [H, V_{\pm 3}] &= \pm i(a - b)V_{\pm 3}. \end{aligned}$$

Чтобы записать эти соотношения более компактно, целесообразно ввести в рассмотрение двумерное вещественное пространство  $\mathbb{H}^*$ , сопряженное к двумерному пространству  $\mathbb{H}$  всех элементов вида (14). Пусть  $e_1, e_2$  — базис пространства  $\mathbb{H}^*$ , сопряженный базису  $P_0, Q_0$  пространства  $\mathbb{H}$ . Тогда для каждого элемента (14) пространства  $\mathbb{H}$  будут иметь место формулы

$$(16) \quad e_1(H) = a, \quad e_2(H) = b, \quad e_3(H) = c,$$

где  $e_3 = -(e_1 + e_2)$ .

Удобно (хотя и не обязательно) считать, что в пространство  $\mathbb{H}^*$  введена евклидова структура и прямоугольные координаты, в которых векторы  $e_1$  и  $e_2$  имеют соответственно координаты  $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$  и  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Тогда векторы  $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$  вместе с векторами  $\pm f_1, \pm f_2, \pm f_3$ , где

$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = e_3 - e_1, \quad f_3 = e_1 - e_2$$

будут радиус-векторами вершин правильного звездчатого двенадцатиугольника. Совокупность этих двенадцати векторов на плоскости мы назовем конфигурацией  $G_2$ .

Каждому вектору  $\alpha \in G_2$  мы отнесем теперь элемент  $X_\alpha$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2^C$ , положив

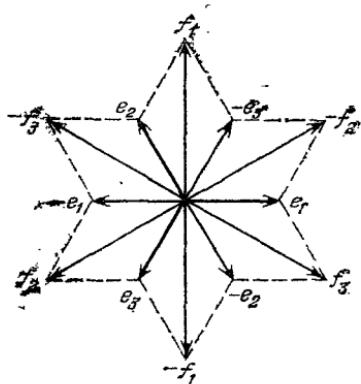
$$X_\alpha = \begin{cases} U_{\pm k}, & \text{если } \alpha = \pm e_k, \\ V_{\pm k}, & \text{если } \alpha = \pm f_k. \end{cases}$$

Тогда ввиду соотношений (16) формулы (15) можно будет записать в виде следующей единой формулы:

$$(17) \quad [H, X_\alpha] = i\alpha(H) X_\alpha.$$

Элементы  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in G_2$ , вместе с любой парой  $H_1, H_2$  линейно независимых элементов из  $\mathfrak{h}$  составляют, очевидно, базис алгебры  $\mathfrak{g}_2^C$ . Поскольку, по построению,  $\bar{X}_\alpha = X_{-\alpha}$ , базис алгебры  $\mathfrak{g}_2$  будут составлять элементы  $H_1, H_2$  и элементы  $X_\alpha + X_{-\alpha}, \frac{1}{i}(X_\alpha - X_{-\alpha})$ . Так как структурные константы последнего базиса очевидным образом выражаются через структурные константы базиса  $H_1, H_2, X_\alpha$ , то нам достаточно найти только последние. Поскольку скобки  $[H_1, X_\alpha]$  и  $[H_2, X_\alpha]$  непосредственно вычисляются по формуле (17), а скобка  $[H_1, H_2]$ , как мы знаем, равна нулю, все сводится, таким образом, к вычислению скобок  $[X_\alpha, X_\beta]$  для всех неупорядоченных пар  $(\alpha, \beta)$  различных векторов конфигурации  $G_2$  (число этих пар равно 66).

Легко видеть, что каждый вектор  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  единственным образом записывается в виде  $\alpha = ae_1 + be_2 + ce_3$ , где  $a + b + c = 0$ , причем изоморфизм  $\mathfrak{h}^* \approx \mathfrak{h}$ , индуцированный введенной нами в  $\mathfrak{h}^*$  евклидовой структурой, переводит этот вектор как раз в элемент (14) пространства  $\mathfrak{h}$ . На этом основании мы можем элемент (14) обозначать



также символом  $\alpha$ . Умноженный на  $\frac{2}{|\alpha|^2}$  элемент  $\alpha$  мы обозначим символом  $H_\alpha$ . Таким образом,  $H_\alpha = \frac{2\alpha}{|\alpha|^2}$ . В явном виде элемент  $H_\alpha$  определяется формулой

$$H_\alpha = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} (aE_{[3, 2]} + bE_{[4, 5]} + cE_{[7, 6]}),$$

поскольку, как легко видеть,  $|\alpha|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .

**Предложение 1.** Для любых векторов  $\alpha, \beta \in G_2$  имеют место соотношения

$$(18) \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = iH_\alpha,$$

$$(19) \quad [X_\alpha, X_\beta] = 0, \text{ если } \beta \neq -\alpha \text{ и } \alpha + \beta \notin G_2,$$

$$(20) \quad [X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}, \text{ если } \alpha + \beta \in G_2 \\ (\text{и потому } \beta \neq -\alpha).$$

Здесь  $N_{\alpha, \beta}$  — некоторые целые числа, для абсолютных величин которых имеет место формула

$$(21) \quad |N_{\alpha, \beta}| = p + 1,$$

где  $p$  — наибольшее целое число, обладающее тем свойством, что для каждого  $j = 0, 1, \dots, p$  вектор  $\beta - j\alpha$  принадлежит конфигурации  $G_2$ .  $\square$

Доказательство этого предложения мы получим в следующем семестре на основе некой общей теории. Пока же мы не можем предложить читателю ничего другого, как честно проверить его непосредственной выкладкой во всех 66 случаях.

**З а м е ч а н и е 3.** Эта выкладка даст нам, конечно, коэффициенты  $N_{\alpha, \beta}$  со знаками (всего получится 30 пар  $(\alpha, \beta)$ , для которых  $N_{\alpha, \beta} \neq 0$ ). Можно сформулировать правило, определяющее эти знаки, но, во-первых, оно довольно сложно, а во-вторых, не имеет инвариантного характера. Дело здесь в том, что соотношения (17), (18) вместе с равенством  $\bar{X}_\alpha = X_{-\alpha}$  характеризуют элементы  $X_\alpha$  с точностью до знака. В этом смысле элементы  $\pm X_\alpha$  задаются в алгебре  $\mathfrak{g}_2^C$  инвариантным образом без всякого произвола. Выбор же знаков, от которых зависят и знаки коэффициентов  $N_{\alpha, \beta}$  никакой инвариантной характеристики не допускает.

С учетом этого замечания можно сказать, что предложение 1 полностью определяет структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2^C$  (а значит, и алгебры Ли  $\mathfrak{g}_2$ ).

Наряду с заданием алгебр структурными константами их можно задавать также образующими и соотношениями.

*Предложение 2.* Алгебра Ли  $\mathfrak{g}_2^C$  может быть задана четырьмя образующими  $X_1, Y_1, X_2, Y_2$ , удовлетворяющими пятнадцати соотношениям

$$(22) \quad \begin{aligned} & [[X_1, Y_1], [X_2, Y_2]] = 0, \\ & [X_1, Y_2] = 0, \quad [X_2, Y_1] = 0, \\ & [[X_1, Y_1], X_1] - 2X_1 = 0, \quad [[X_1, Y_1], X_2] + X_2 = 0, \\ & [[X_2, Y_2], X_1] + 3X_1 = 0, \quad [[X_2, Y_2], X_2] - 2X_2 = 0, \\ & [[X_1, Y_1], Y_1] + 2Y_1 = 0, \quad [[X_1, Y_1], Y_2] - Y_2 = 0, \\ & [[X_2, Y_2], Y_1] - 3Y_1 = 0, \quad [[X_2, Y_2], Y_2] + 2Y_2 = 0, \\ & [X_1 [X_1, X_2]] = 0, \quad [Y_1, [Y_1, Y_2]] = 0, \\ & [X_2, [X_2 [X_2, X_1]]] = 0, \\ & [Y_2, [Y_2, [Y_2, Y_1]]] = 0. \end{aligned}$$

Формальному доказательству предложения 2 мы предложим содержательное обсуждение соотношений (22).

Полагая, по определению,  $H_1 = -i[X_1, Y_1]$ ,  $H_2 = -i[X_2, Y_2]$  и вводя в рассмотрение числа

$$n_{11} = n_{22} = 2, \quad n_{12} = -1, \quad n_{21} = -3,$$

мы сможем соотношения (22) переписать в следующем, более компактном виде

$$(23) \quad \begin{aligned} & [H_p, H_q] = 0, \\ & [X_p, Y_q] = 0 \text{ при } p \neq q, \\ & [H_p, X_q] = i n_{p,q} X_q, \quad [H_p, Y_q] = -i n_{p,q} Y_q, \\ & (\text{ad } X_p)^{|n_{pq}|+1} X_q = 0, \quad (\text{ad } Y_p)^{|n_{pq}|+1} Y_q = 0. \end{aligned}$$

В этом виде мы и будем их использовать.

Легко видеть, что соотношения (23) выполнены в алгебре  $\mathfrak{g}_2^C$  при  $X_1 = X_{f_1}, Y_1 = X_{-f_1}, X_2 = X_{e_2}, Y_2 = X_{-e_2}$  ( $f_1, f_2, e_1, e_2$  — базисные векторы). Действительно, первое соотношение выполнено потому, что, как уже было выше замечено, скобка Ли равна нулю для любых элементов из  $\mathfrak{h}$ . Второе соотношение вытекает из формулы (19), по-

скольку  $f_1 - e_2 = e_3 - 2e_2 \notin G_2$  и  $e_2 - f_1 = 2e_2 - e_3 \notin G_2$ . Третье и четвертое являются частными случаями формулы (17), поскольку

$$\begin{aligned} a(H_\beta) &= \left( a, \frac{2\beta}{|\beta|^2} \right) = \frac{2(a, \beta)}{|\beta|^2} = \\ &= \begin{cases} 2, & \text{если } a = \beta = f_1, e_2, \\ -3, & \text{если } a = f_1, \beta = e_2, \\ -1, & \text{если } a = e_2, \beta = f_1 \end{cases} \end{aligned}$$

(мы пользуемся здесь отождествлением  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^*$ ), а последние два вытекают из формул (19) и (20) предложения 1, поскольку

$$(24) \quad \begin{aligned} f_1 + e_2 &= e_3 \in G_2, \quad \text{но } f_1 + e_3 \notin G_2, \\ e_2 + f_1 &= e_3 \in G_2, \quad e_2 + e_3 = -e_1 \in G_2, \\ e_2 - e_1 &= -f_3 \in G_2, \quad \text{но } e_2 - f_3 \notin G_2. \quad \square \end{aligned}$$

Если мы введем в рассмотрение свободную алгебру Ли  $I$  с образующими  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  и ее гомоморфизм  $\phi$  в алгебру  $\mathfrak{g}_2^C$ , определенный формулами

$$\begin{aligned} \phi(X_1) &= X_{f_1}, & \phi(X_2) &= X_{e_2}, \\ \phi(Y_1) &= X_{-f_1}, & \phi(Y_2) &= X_{-e_2}, \end{aligned}$$

то доказанное утверждение будет означать, что гомоморфизм  $\phi$  аннулирует левые части всех соотношений (22) и потому индуцирует некоторый гомоморфизм  $\bar{\phi}: I \rightarrow \mathfrak{g}_2^C$  в алгебру Ли  $\mathfrak{g}_2^C$  факторалгебры  $\bar{I}$  алгебры Ли  $I$  по идеалу, порожденному этими левыми частями. Предложение 2 равносильно теперь утверждению, что *гомоморфизм  $\bar{\phi}$  является изоморфизмом*. В этой форме мы и будем его доказывать.

Чтобы не вводить лишних обозначений, мы позволим себе обозначать элементы алгебры  $\bar{I}$  теми же символами, что и соответствующие элементы алгебры  $I$ . Символ  $X \sim Y$  будет означать, что в алгебре  $\bar{I}$  элементы  $X$  и  $Y$  пропорциональны (отличаются друг от друга числовым множителем).

Рассмотрим в алгебре  $\bar{I}$  элементы

$$(25) \quad \begin{aligned} H_1 &= [X_1, Y_1], & H_2 &= [X_2, Y_2], \\ X_1, X_2, X_3 &= [X_2, X_1], & X_4 &= [X_2, X_3], \\ X_5 &= [X_2, X_4], & X_6 &= [X_4, X_3], \\ Y_1, Y_2, Y_3 &= [Y_2, Y_1], & Y_4 &= [Y_2, Y_3], \\ Y_5 &= [Y_2, Y_4], & Y_6 &= [Y_4, Y_3]. \end{aligned}$$

Оказывается, что для любых двух элементов  $U, V$  из списка (25) элемент  $[U, V]$  либо равен нулю, либо пропорционален некоторому элементу того же списка. Действительно, по условию  $[H_1, H_2] = 0$ ,  $[H_i, X_1] \sim X_1$ ,  $[H_i, X_2] \sim X_2$ ,  $i = 1, 2$ . Но если  $[H, U] \sim U$  и  $[H, V] \sim V$ , то в силу тождества Якоби

$$[H, [U, V]] = [[H, U], V] + [U, [H, V]] \sim [U, V].$$

Следовательно, по очевидной индукции

$$[H_p, X_q] \sim X_q$$

для любого  $q$ . Аналогично показывается, что

$$[H_p, Y_q] \sim Y_q.$$

Далее, по условию  $[X_1, X_2] = X_3$  и  $[X_1, X_3] = [X_1, [X_1, X_2]] = 0$ . Поэтому  $[X_1, X_4] = [[X_1, X_2], X_3] + [X_2, [X_1, X_3]] = 0$ ,  $[X_1, X_5] = [X_3, X_4] = -X_6$  и  $[X_1, X_6] = 0$ . Так как  $[X_1, Y_1] = H_1$ ,  $[X_1, Y_2] = 0$ , то  $[X_1, Y_3] = [[X_1, Y_2], Y_1] + [Y_2, [X_1, Y_1]] = -[[X_1, Y_1], Y_2] \sim [H_1, Y_2] \sim Y_2$ , и значит,  $[X_1, Y_4] = -[[X_1, Y_3], Y_2] = 0$ ,  $[X_1, Y_5] = 0$ ,  $[X_1, Y_6] \sim [[X_1, Y_3], Y_4] \sim [Y_2, Y_4] = Y_5$ . Все остальные скобки вычисляются точно так же.  $\square$

Из доказанного утверждения следует, что линейная оболочка элементов (25) является подалгеброй алгебры Ли  $\bar{I}$  и, значит, — поскольку она содержит образующие  $X_1, Y_2$  и  $Y_1, Y_2$  — совпадает с этой алгеброй. В частности, этим доказано, что  $\dim \bar{I} \leqslant 14$ .

Теперь мы уже легко можем доказать предложение 2.

**Доказательство предложения 2.** Из полученных выше результатов (см., в частности, формулы (24)) непосредственно следует, что гомоморфизм  $\phi$  переводит элементы (25) в элементы, пропорциональные со-

ответственно элементам

$$(26) \quad \begin{array}{cccccc} H_{f_1}, & H_{e_1}, \\ X_{f_1}, & X_{e_2}, & X_{e_3}, & X_{-e_1}, & X_{-f_3}, & X_{f_2}, \\ X_{-f_1}, & X_{-e_2}, & X_{-e_3}, & X_{e_1}, & X_{f_3}, & X_{-f_2} \end{array}$$

(в отношении элементов  $X_6$  и  $Y_6$  это следует из равенства  $e_3 - e_1 = f_2$ ). Так как элементы (26) составляют базис алгебры  $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ , то, следовательно, гомоморфизм  $\bar{\phi}_2$  является эпиморфизмом, а значит, ввиду неравенства  $\dim \bar{l} \leq 14 = \dim \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ , и изоморфизмом.  $\square$

Тем самым алгебра Ли  $\mathfrak{g}_2$  изучена нами практически со всех возможных точек зрения.