Лекция 16

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В АЛГЕБРЕ $\mathbb{A}$l. — АВТОМОРФИЗМЫ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathbb{A}$l. — ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathbb{A}$l. — ТЕОРЕМА ФРЕЙДЕНТАЛЯ. — СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ ФРЕЙДЕНТАЛЯ. — ГРУППА ЛИ F_4. — АЛГЕБРА ЛИ $\mathfrak{f}_4$. — СТРУКТУРА АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$.

Утверждение, что для произвольного элемента X алгебры $\mathbb{A}$l имеет место равенство

$$X = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3)$$

(см. формулу (17) лекции 15), означает, что линеал $\mathbb{A}$l является прямой суммой трех линеалов $\mathbb{R}$ и трех линеалов $\mathbb{C}$a (так что, в частности, $\dim \mathbb{A}\mathrm{l} = 3 + 3\cdot 8 = 27$). Поскольку линеалы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$a евклидовы, тем самым евклидова структура (скалярное произведение) определяется и в линеале $\mathbb{A}$l. При этом для нормы (длины) $|X|$ элемента (1) этого линеала имеет место формула

$$(1) \qquad |X|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2.$$

Скалярное произведение (X, Y) элементов X, Y алгебры $\mathbb{A}$l выражается через их йорданово произведение по формуле

$$(2) \qquad (X, Y) = \mathrm{Tr}\,(X \circ Y),$$

которая немедленно проверяется прямым вычислением.

Из этой формулы, в частности, следует, что *идемпотент* $X \in \mathbb{A}\mathrm{l}$ *тогда и только тогда примитивен, когда* $|X| = 1$.

Заметим, что никакого сопряжения в алгебру $\mathbb{A}1$ мы не вводим, так что эта алгебра метрической алгеброй не является. В силу теоремы Гурвица она не может быть и нормированной алгеброй.

Кроме скалярного произведения, на алгебре $\mathbb{A}1$ имеется еще один важный функционал, для построения которого мы должны начать несколько издалека.

Так как ввиду кососкоммутативности ассоциатор $(ax)y - a(xy)$ меняет знак при перестановке $(a, x, y) \mapsto (y, a, x)$, то в любой альтернативной алгебре имеет место тождество

$$(ax)y + y(ax) = a(xy) + (ya)x.$$

Обозначив элемент a через a_i^j, элемент x через x_j^k и элемент y через y_k^i, мы можем это тождество переписать в следующем виде:

$$(a_i^j x_j^k) y_k^i + y_k^i (a_i^j x_j^k) = a_i^j (x_j^k y_k^i) + (y_k^i a_i^j) x_j^k.$$

Оно, очевидно, сохранится, если по всем индексам произвести суммирование от 1 до n (впрочем, нам нужен только случай $n = 3$). Но, введя матрицы $A = (a_i^j)$, $X = (x_j^k)$ и $Y = (y_k^i)$, мы можем получившееся тождество переписать в виде

$$(3)\quad \operatorname{Tr}(AX \cdot Y) + \operatorname{Tr}(Y \cdot AX) = \operatorname{Tr}(A \cdot XY) + \operatorname{Tr}(YA \cdot X),$$

которое справедливо для любых матриц с элементами из произвольной альтернативной алгебры и, значит, в частности, для матриц из алгебры $\mathbb{A}1$.

Заметим, что этот прием имеет вполне общий характер и применим к любому полилинейному тождеству. Например, обозначив через $\operatorname{Re}\xi$ коэффициент при 1 в октаве ξ, т. е. скалярное произведение $(\xi, 1)$, мы будем иметь тождество

$$\operatorname{Re}(ab) = \operatorname{Re}(ba),$$

справедливое для любых октав a и b. Поэтому для матриц над октавами справедливо тождество

$$(4)\qquad \operatorname{Re}\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Re}\operatorname{Tr}(BA),$$

означающее, что после применения $\operatorname{Re}\operatorname{Tr}$ умножение октавных матриц становится коммутативным.

В силу этой коммутативности из тождества (3) следует тождество

$$2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(AX\cdot Y)=\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(A\cdot XY)+\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(YA\cdot X).$$

Циклически переставляя здесь A, X и Y, мы, далее, получаем тождество

$$2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(XY\cdot A)=\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(X\cdot YA)+\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(AX\cdot Y).$$

Вычитая эти тождества одно из другого и еще раз пользуясь коммутативностью, мы после сокращения на 3 получим тождество

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(AX\cdot Y)=\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(A\cdot XY), \tag{5}$$

означающее, что после применения Re Tr умножение октавных матриц становится и ассоциативным.

Становится ассоциативным и йорданово умножение октавных матриц:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,((A\circ X)\circ Y)&=\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,((A\circ X)\circ Y)=\\&=\frac{1}{2}[\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(AX\cdot Y)+\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(Y\cdot XA)]=\\&=\frac{1}{2}[\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(A\cdot XY)+\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(YX\cdot A)]=\\&=\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(A\cdot(X\circ Y))=\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(A\circ(X\circ Y)).\end{aligned}$$

Поскольку для матриц из Al след вещественен, мы окончательно получаем отсюда, что

$$\mathrm{Tr}\,((A\circ X)\circ Y)=\mathrm{Tr}\,(A\circ(X\circ Y))$$

для любых матриц A, X, $Y\in\mathrm{Al}$. Ввиду формулы (2) это означает, что в алгебре Al имеет место тождество

$$(A\circ X,\,Y)=(A,\,X\circ Y),$$

из которого (в силу коммутативности алгебры Al) вытекает, что *трилинейный функционал*

$$(X,\,Y,\,Z)=\mathrm{Tr}\,((X\circ Y)\circ Z)=(X\circ Y,\,Z),\quad X,\,Y,\,Z\in\mathrm{Al}, \tag{6}$$

симметричен по X, Y и Z.

Мы будем называть функционал (6) *скалярным трипроизведением*.

Если автоморфизм Φ: $\mathrm{Al} \to \mathrm{Al}$ алгебры Al *сохраняет след*, т. е. $\mathrm{Tr}(\Phi X) = \mathrm{Tr}\, X$ для любого элемента $X \in \mathrm{Al}$, то, конечно, Φ сохраняет и оба скалярных произведения,

$$(7) \quad (\Phi X, \Phi Y) = (X, Y) \quad \text{и} \quad (\Phi X, \Phi Y, \Phi Z) = (X, Y, Z)$$

для любых элементов $X, Y, Z \in \mathrm{Al}$.

Отсюда, в частности, следует, что группа всех сохраняющих след автоморфизмов алгебры представляет собой замкнутую подгруппу ортогональной группы $O(27)$ и потому является компактной группой Ли. Мы будем обозначать эту группу — по причинам, которые будут объяснены в следующем семестре, — символом F_4, а ее алгебру Ли — символом $\mathfrak{f}_4$. Элементами алгебры Ли $\mathfrak{f}_4$ являются дифференцирования D: $\mathrm{Al} \to \mathrm{Al}$, *аннулирующие след*, т. е. такие, что $\mathrm{Tr}(DA) = 0$ для любой матрицы $A \in \mathrm{Al}$.

Замечание 1. Ниже мы покажем, что любой автоморфизм сохраняет след, так что на самом деле группа F_4 является группой *всех* автоморфизмов алгебры Al, но нам удобно пока отложить доказательство этого факта.

Замечательно, что и, обратно, любой линейный оператор Φ: $\mathrm{Al} \to \mathrm{Al}$, *сохраняющий оба скалярных произведения, представляет собой сохраняющий след автоморфизм алгебры* Al. Действительно,

$$\begin{aligned}(\Phi X \circ \Phi Y - \Phi(X \circ Y), \Phi Z) &= \\ &= (\Phi X, \Phi Y, \Phi Z) - (\Phi(X \circ Y), \Phi Z) = \\ &= (X, Y, Z) - (X \circ Y, Z) = 0\end{aligned}$$

для любых $X, Y, Z \in \mathrm{Al}$, и потому $\Phi X \circ \Phi Y = \Phi(X \circ Y)$, ибо, являясь изометрией по отношению к скалярному произведению (2), оператор Φ невырожден и, значит, любой элемент алгебры Al может быть представлен в виде ΦZ. Этим доказано, что оператор Φ является автоморфизмом алгебры Al. Поэтому $\Phi E = E$ и, значит, $\mathrm{Tr}(\Phi X) = \mathrm{Tr}\, X$, ибо $\mathrm{Tr}\, X = (X, E)$ для любого $X \in \mathrm{Al}$. □

Таким образом, безотносительно к алгебре Al группа F_4 может быть охарактеризована как группа изометрий 27-мерного евклидова пространства, сохраняющих некоторый трилинейный функционал.

Как мы знаем, для операторов Φ вида e^{tD} сохранение скалярного произведения (изометричность) равносильно

кососимметричности оператора D, т. е. выполнению тождества

$$(DX, Y) + (X, DY) = 0.$$

Аналогично сохранение скалярного три-произведения равносильно выполнению тождества

$$(DX, Y, Z) + (X, DY, Z) + (X, Y, DZ) = 0 \tag{8}$$

для любых элементов $X, Y, Z \in \mathrm{Al}$. Действительно, дифференцируя функцию $f(t) = (e^{tD}X, e^{tD}Y, e^{tD}Z)$ по t, мы в силу линейности немедленно получим, что $f'(0)$ равно левой части тождества (8). Поэтому, если $f(t) = \mathrm{const}$, то (7) выполнено. Обратно, если выполнено (8), то $f'(t) = 0$ для всех t, и потому $f(t) = \mathrm{const}$, что равносильно второму из тождеств (7). □

По понятной аналогии линейные операторы D, удовлетворяющие тождеству (8), мы будем называть *кососимметричными по отношению к скалярному три-произведению* (6).

В силу всего сказанного *линейный оператор* D: $\mathrm{Al} \to \mathrm{Al}$ *тогда и только тогда является аннулирующим след дифференцированием алгебры* Al (*принадлежит алгебре Ли* $\mathfrak{f}_4$), *когда он кососимметричен по отношению к обоим скалярным произведениям* (2) *и* (6).

Октавная матрица A называется *кососрмитовой*, если $A^* = -A$. Непосредственное вычисление показывает, что если матрица A кососрмитова, то для любой эрмитовой матрицы X матрица $[A, X] = AX - XA$ также эрмитова. Таким образом, любая кососрмитова матрица A третьего порядка определяет по формуле

$$(\mathrm{ad}\, A)\, X = [A, X], \qquad X \in \mathrm{Al},$$

некоторый линейный оператор $\mathrm{ad}\, A$: $\mathrm{Al} \to \mathrm{Al}$. Так как, согласно тождествам (3) и (5), для любых октавных матриц имеет место равенство

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re\,Tr}([A, X] \circ Y) &= \mathrm{Re\,Tr}([A, X]\, Y) = \\
&= \mathrm{Re\,Tr}(AX \cdot Y) - \mathrm{Re\,Tr}(XA \cdot Y) = \\
&= \mathrm{Re\,Tr}(Y \cdot AX) - \mathrm{Re\,Tr}(X \cdot AY) = \\
&= \mathrm{Re\,Tr}(YA \cdot X) - \mathrm{Re\,Tr}(X \cdot AY) = \\
&= -\mathrm{Re\,Tr}(X \cdot [A, Y]) = -\mathrm{Re\,Tr}(X \circ [A, Y]),
\end{aligned}$$

то при $X, Y \in \mathbb{A}$ для любой косоэрмитовой матрицы A имеет место равенство

$$([A, X], Y) + (X, [A, Y]) = 0,$$

означающее, что оператор $\operatorname{ad} A$ кососимметричен по отношению к скалярному произведению (2).

Далее, как мы знаем, в альтернативной алгебре соотношение ассоциативности выполнено для элементов a, b, c, если среди этих элементов есть одинаковые. Оно также, конечно, выполнено, если хотя бы один элемент a, b, c лежит в $\mathbb{R}$, откуда вытекает, что оно выполнено, если среди элементов a, b, c есть сопряженные. Применяя это соображение к элементам матрицы $X(XX) - (XX)X$, где $X = (x_i^j)$ — произвольная октавная эрмитова матрица порядка n, мы получим, что для тех из них, которые не равны нулю, можно считать, что в их выражениях $x_i^j(x_j^k x_k^l) - (x_i^j x_j^k) x_k^l$ суммирование по j и k распространено лишь на различные индексы j и k, отличные от i и l. Поэтому при $n = 3$ необходимо $i = l$, так что для любой матрицы $X \in \mathbb{A}$ матрица $X(XX) - (XX)X$ обязательно диагональна, т. е. имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}a.$$

При этом, если матрица X имеет вид (1), то для октав α, β, γ будут иметь место формулы

$$\alpha = \xi_3(\xi_1\xi_2) + \bar{\xi}_2(\bar{\xi}_2\bar{\xi}_3) - (\xi_3\xi_1)\xi_2 - (\bar{\xi}_2\bar{\xi}_1)\bar{\xi}_3,$$

$$\beta = \xi_1(\xi_2\xi_3) + \bar{\xi}_3(\bar{\xi}_2\bar{\xi}_1) - (\xi_1\xi_2)\xi_3 - (\bar{\xi}_3\bar{\xi}_2)\bar{\xi}_1,$$

$$\gamma = \xi_2(\xi_3\xi_1) + \bar{\xi}_1(\bar{\xi}_3\bar{\xi}_2) - (\xi_2\xi_3)\xi_1 - (\bar{\xi}_1\bar{\xi}_3)\bar{\xi}_2,$$

из которых, в силу кососимметричности ассоциаторов, вытекает, что $\alpha = \beta = \gamma$.

Поскольку для любой октавной матрицы A имеет место равенство $\operatorname{Tr}(A \cdot \alpha E) = \operatorname{Tr} A \cdot \alpha$ и, значит, $\operatorname{Tr}(A \cdot \alpha E) = 0$, когда $\operatorname{Tr} A = 0$, отсюда следует, что для любой косоэрмитовой матрицы A третьего порядка со следом, равным нулю, и любой матрицы $X \in \mathbb{A}$ имеет место равенство

$$\operatorname{Tr}(A \cdot X(XX)) = \operatorname{Tr}(A \cdot (XX)X),$$

а потому (см. формулы (4) и (5)) и равенство

$$\operatorname{Re}\operatorname{Tr}(AX\cdot XX)=\operatorname{Re}\operatorname{Tr}(XA\cdot XX),$$

означающее, что

$$\operatorname{Re}\operatorname{Tr}((\operatorname{ad}A)X\cdot XX)=0,$$

т. е. (поскольку $(\operatorname{ad}A)X\in\mathbb{A}$ и $XX=X\boxdot X$), что

$$((\operatorname{ad}A)X,\ X,\ X)=0.$$

Поляризуя полученное тождество по X, мы немедленно получим, что для линейного отображения $\operatorname{ad}A:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ имеет место тождество (8).

Таким образом, отображение $\operatorname{ad}A$ кососимметрично по отношению к обоим скалярным произведениям (2) и (6). Следовательно, оно представляет собой аннулирующее след дифференцирование алгебры $\mathbb{A}$.

Линейное пространство всех косоэрмитовых октавных матриц третьего порядка со следом, равным нулю, мы будем обозначать символом $\mathbb{M}$. Согласно доказанному *для любой матрицы* $A\in\mathbb{M}$ *линейный оператор* $\operatorname{ad}A$ *принадлежит алгебре Ли* $\mathfrak{f}_4$. Получающееся (очевидно, линейное) отображение

$$\operatorname{ad}:\ \mathbb{M}\to\mathfrak{f}_4$$

инъективно. Действительно, тривиальное вычисление показывает, что с каждой матрицей из $\mathbb{A}$ перестановочны только скалярные матрицы вида aE, где $a\in\mathbb{R}$, а такая матрица имеет равный нулю след только при $a=0$. □

Дифференцирования алгебры $\mathbb{A}$, имеющие вид $\operatorname{ad}A$, $A\in\mathbb{M}$, мы будем называть *присоединенными дифференцированиями*.

Особое значение будут для нас иметь матрицы из $\mathbb{M}$, все диагональные элементы которых равны нулю. Эти матрицы составляют линейное подпространство $\mathbb{M}^0$ пространства $\mathbb{M}$. Пусть

$$Y_1(\eta)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\eta\\0&-\bar\eta&0\end{pmatrix},\quad Y_2(\eta)=\begin{pmatrix}0&0&-\bar\eta\\0&0&0\\\eta&0&0\end{pmatrix},$$

$$Y_3(\eta)=\begin{pmatrix}0&\eta&0\\-\bar\eta&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда любая матрица $A \in \mathbb{M}^0$ единственным образом записывается в виде

$$A = Y_1(\eta_1) + Y_2(\eta_2) + Y_3(\eta_3), \qquad \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{C}a,$$

откуда, в частности, следует, что $\dim \mathbb{M}^0 = 24$.

Теперь мы можем доказать важную теорему Фрейденталя, существенно облегчающую изучение алгебры $\mathbb{A}1$ и группы F_4. Как всегда, символом $(F_4)_e$ мы обозначаем компоненту единицы группы F_4.

Предложение 1 (Теорема Фрейденталя). *Для любого элемента $X \in \mathbb{A}1$ существует такой автоморфизм $\Phi \in (F_4)_e$, что*

$$\Phi X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3, \quad \text{где} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3.$$

Числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ однозначно определены элементом X.

Два элемента алгебры $\mathbb{A}1$ тогда и только тогда могут быть переведены друг в друга автоморфизмом из $(F_4)_e$, когда отвечающие им числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ совпадают.

На языке теории групп преобразований это предложение утверждает, что *каждая орбита группы $(F_4)_e$ в алгебре $\mathbb{A}1$ содержит единственную диагональную матрицу $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$, для которой $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$.* В этой форме мы и будем его доказывать.

Являясь замкнутой подгруппой компактной группы $SO(26)$, группа $(F_4)_e$ компактна. Поэтому в любой ее орбите существует матрица X вида (1), для которой сумма $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ имеет наибольшее (на этой орбите) значение. Оказывается, что *такая матрица всегда диагональна.*

Действительно, для любой матрицы $A \in \mathbb{A}1$ и любого $t \in \mathbb{R}$ матрица $X_t = e^{t \operatorname{ad} A} X$ лежит в орбите матрицы X (ибо $\operatorname{ad} A \in \mathfrak{f}_4$ и, значит, $e^{t \operatorname{ad} A} \in (F_4)_e$), и потому для ее диагональных элементов $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ имеет место неравенство $f(t) \leqslant f(0)$, где $f(t) = a_1(t)^2 + a_2(t)^2 + a_3(t)^2$. Но, как мы знаем (см. стр. 46), матрица X_t является решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_t}{dt} = (\operatorname{ad} A) X_t, \quad X_0 = X,$$

равносильного трем дифференциальным уравнениям для октавных элементов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ матрицы X_t и трем дифференциальным уравнениям для ее числовых элементов $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$. В случае, когда $A = Y_1(\eta)$, эти уравнения, как показывает легкое вычисление, использующее формулу (2) лекции 14, имеют вид

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
&\frac{da_1(t)}{dt} = 0, && \frac{d\xi_1(t)}{dt} = (a_3(t) - a_1(t))\,\eta,\\
&\frac{da_2(t)}{dt} = 2(\eta, \xi_1(t)), && \frac{d\xi_2(t)}{dt} = -\bar{\eta}\overline{\xi_3(t)},\\
&\frac{da_3(t)}{dt} = -2(\eta, \xi_1(t)), && \frac{d\xi_3(t)}{dt} = \overline{\xi_2(t)}\,\bar{\eta}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $a_1(t) = \text{const}$ и $a_2(t) + a_3(t) = \text{const}$. Кроме того, $f'(t) = 2\left(a_1'(t)\,a_1(t) + a_2'(t)\,a_2(t) + a_3'(t)\,a_3(t)\right) = 4(\eta, \xi_1(t))(a_2(t) - a_3(t))$, откуда в силу равенства $f'(0) = 0$ вытекает, что при $(\eta, \xi_1(0)) \neq 0$ имеет место равенство $a_2(0) = a_3(0)$. Поэтому $a_1(t) = a_1(0)$ и $a_2(t) + a_3(t) = 2a_2(0)$ и, значит, $f(t) = f(0) + 2(a_3(0) - a_3(t))^2$, что ввиду неравенства $f(t) \leqslant f(0)$ возможно только при $a_3(t) = a_3(0)$. Но тогда $a_3'(t) = 0$, и, значит, $(\eta, \xi_1(t)) = 0$, что при $t = 0$ противоречит условию $(\eta, \xi_1(0)) \neq 0$. Следовательно,

$$(\eta, \xi_1(0)) = 0$$

для любой октавы η, что возможно только при $\xi_1(0) = 0$.

Аналогично доказывается, что $\xi_2(0) = 0$ и $\xi_3(0) = 0$. Следовательно, матрица $X = X_0$ диагональна. □

Покажем теперь, что *любую диагональную матрицу* $X = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$ *можно автоморфизмом из* $(F_4)_e$ *преобразовать в диагональную же матрицу, для которой* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$. Ясно, что для этого достаточно доказать, что в диагональной матрице $X = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$ можно автоморфизмом из $(F_4)_e$ переставить любые два диагональных элемента, скажем, a_2 и a_3. С этой целью мы вновь рассмотрим матрицу $X_t = e^{t\,\mathrm{ad}\,A}X$ с $A = Y_1(\eta)$. Из уравнений (9) непосредственно вытекает, что для этой матрицы функция $a_2(t) - a_3(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2(a_2(t) - a_3(t))}{dt^2} = 4(\eta, \eta)(a_2(t) - a_3(t))$$

с начальным условием $a_2'(0) - a_3'(0) = 0$ (ибо $\xi_1(0) = 0$ в силу диагональности матрицы X). Следовательно,

$$a_2(t) - a_3(t) = (a_2(0) - a_3(0)) \cos 2|\eta| t.$$

Предполагая для простоты, что $|\eta| = 1$, мы, в частности, получаем отсюда, что

$$a_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - a_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(a_2(0) - a_3(0))$$

и, значит (поскольку $a_2(t) + a_3(t) = \text{const}$), что $a_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_3(0) = a_3$ и $a_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_2(0) = a_2$. Таким образом, автоморфизм $e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ad} Y_1(\eta)}$ (при любом η с $|\eta| = 1$) действительно переставляет a_2 и a_3. □

Тем самым первое утверждение предложения 1 нами полностью доказано. Согласно этому утверждению каждой матрице $X \in \mathfrak{A}1$ отвечают (быть может, не единственным образом) три числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$, обладающие тем свойством, что $\Phi X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$ для некоторого автоморфизма $\Phi \in (F_4)_e$.

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (X, E),$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (X, X),$$
$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = (X, X, X).$$

Доказательство. Для диагональной матрицы ΦX эти равенства очевидны (ибо $(X, E) = \operatorname{Tr} X$, $(X, X) = \operatorname{Tr}(X \circ X)$ и $(X, X, X) = \operatorname{Tr}(X \circ X \circ X)$. Но, так как $(\Phi X, E) = (\Phi X, \Phi E) = (X, E)$, $(\Phi X, \Phi X) = (X, X)$ и $(\Phi X, \Phi X, \Phi X) = (X, X, X)$, то они верны и для любой матрицы $X \in \mathfrak{A}1$. □

Теперь мы можем завершить доказательство предложения 1.

Доказательство предложения 1. Поскольку первое утверждение предложения 1 нами уже доказано, а третье непосредственно вытекает из первых двух, в доказательстве нуждается только второе утверждение. Но оно непосредственно вытекает из леммы 1, поскольку

по известным формулам теории симметрических многочленов по числам $\sigma_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k$, $k = 1, 2, 3$, числа λ_1, λ_2, λ_3 однозначно с точностью до порядка восстанавливаются. □

Числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ мы будем называть *собственными значениями* октавной матрицы X. Подчеркнем, что их сумма равна следу $\operatorname{Tr} X$ этой матрицы.

Теорема Фрейденталя существенно облегчает изучение алгебры Al. Например, из нее непосредственно следует, что *степени любого элемента* $X \in \mathrm{Al}$ *ассоциативны*, т. е. что для каждого $X \in \mathrm{Al}$ все n-кратные произведения элемента на себя — одни и те же независимо от расстановки скобок, поскольку для диагональной матрицы X это, очевидно, так. (Аналогичным образом может быть доказано для алгебры Al и йорданово тождество (16) из лекции 15, поскольку в случае, когда один из сомножителей диагонален, оно очевидно.)

Ввиду ассоциативности степеней для каждого $n \geqslant 0$ корректно определена *n-я степень* X^n произвольного элемента $X \in \mathrm{Al}$. Поэтому для любого многочлена $p(T)$ с вещественными коэффициентами корректно определен элемент $p(X) \in \mathrm{Al}$. Если $p(X) = 0$, то многочлен $p(T)$ называется *аннулирующим многочленом* элемента X.

Аннулирующий многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, называется *минимальным многочленом* элемента $X \in \mathrm{Al}$. Очевидно, что он определен единственным образом и для любого автоморфизма Φ: $\mathrm{Al} \to \mathrm{Al}$ (от которого не предполагается, что он сохраняет след) *минимальные многочлены элементов X и ΦX одинаковы.*

Если матрица X диагональна, то ее диагональные элементы являются корнями каждого аннулирующего многочлена и, обратно, любой многочлен, корнями которого служат эти элементы, аннулирует матрицу X. Отсюда следует, что *для любой матрицы $X \in \mathrm{Al}$ степень ее минимального многочлена не превосходит трех, причем эта степень равна трем тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы X различны.*

Кроме того, мы видим, что в последнем случае коэффициент при T^2 в минимальном многочлене равен $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -\operatorname{Tr} X$. Следовательно, в силу инвариант-

ности минимального многочлена для любого автоморфизма Φ: $\mathrm{Al} \to \mathrm{Al}$ имеет место равенство

$$\operatorname{Tr} \Phi X = \operatorname{Tr} X.$$

По соображениям непрерывности это равенство сохраняется и тогда, когда среди собственных значений элемента X есть совпадающие. Тем самым доказано, что *любой автоморфизм алгебры* Al *сохраняет след*, т. е. что группа F_4 является группой Aut Al всех автоморфизмов алгебры Al.

Из теоремы Фрейденталя непосредственно вытекает также, что *группа F_4 транзитивно действует на октавной проективной плоскости* $\mathbb{C}\mathrm{aP}^2$ *примитивных идемпотентов алгебры* Al, т. е. любой примитивный идемпотент может быть некоторым автоморфизмом переведен в любой другой примитивный идемпотент. Действительно, ясно, что диагональная матрица тогда и только тогда является идемпотентом, когда все ее диагональные элементы равны 0 или 1. Поэтому собственные значения примитивного идемпотента равны 0, 0, 1 и, значит, каждый такой идемпонент переводится некоторым автоморфизмом в идемпотент E_3. □

Это означает, что *октавная проективная плоскость* $\mathbb{C}\mathrm{aP}^2$ *гомеоморфна фактормногообразию F_4/K группы Ли F_4 по ее подгруппе K*, оставляющей на месте некоторый примитивный идемпотент, скажем, для определенности, идемпотент E_1.

Пусть $\Phi \in K$. Так как $\Phi E_1 = E_1$, то Φ переводит в себя аннулятор $\operatorname{Ann} E_1$ элемента E_1, т. е. линеал всех таких элементов $X \in \mathrm{Al}$, что $X \circ E_1 = 0$. Но легко видеть, что $\operatorname{Ann} E_1$ состоит из элементов (1), для которых $a_1 = 0$ и $\xi_2 = \xi_3 = 0$, и, значит, является прямой суммой одномерного подпространства матриц вида $a(E_2 + E_3)$ и подпространства $\operatorname{Ann}^0 E_1$, состоящего из матриц вида

$$X = r(E_2 - E_3) + X_1(\rho), \quad \text{где} \quad r \in \mathbb{R}, \quad \rho \in \mathbb{C}\mathrm{a}.$$

Поскольку оператор Φ ортогонален и $\Phi(E_2 + E_3) = \Phi(E - E_1) = E - E_1 = E_2 + E_3$, отсюда следует, что автоморфизм Φ переводит в себя подпространство $\operatorname{Ann}^0 E_1$ и потому индуцирует некоторый ортогональный оператор

$$\Phi^0\colon \operatorname{Ann}^0 E_1 \to \operatorname{Ann}^0 E_1.$$

Аналогично автоморфизм Φ переводит в себя линеал $\mathscr{E}$ всех элементов $X \in \mathrm{Al}$, для которых $2E_1 \circ X = X$, и потому индуцирует некоторый ортогональный оператор

$$\Phi' \colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}.$$

При этом, как непосредственно вытекает из формул (18)—(20) предыдущей лекции линеал $\mathscr{E}$ состоит из всех матриц вида $X_2(\xi) + X_3(\eta)$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}\mathrm{a}$, и потому алгебра Al разлагается в прямую сумму линеала $\mathscr{E}$, линеала $\mathrm{Ann}^0 E_1$ и двух одномерных линеалов, порожденных элементами E_1 и $E_2 + E_3$. Следовательно, *автоморфизм* Φ *однозначно определяется операторами* Φ^0 *и* Φ'.

Кроме того, мы видим, что линеал $\mathscr{E}$ естественно изоморфен линеалу $\mathbb{C}\mathrm{a}^2$ октавных пар $\{\xi, \eta\}$, а линеал $\mathrm{Ann}^0 E_1$ — линеалу $\mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus}$ пар $\{r, \rho\}$, где $r \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{C}\mathrm{a}$. Поэтому операторы Φ' и Φ^0 мы можем рассматривать как соответственно операторы $\mathbb{C}\mathrm{a}^2 \to \mathbb{C}\mathrm{a}^2$ и $\mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus} \to \mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus}$. При этом для любых элементов $x = \{\xi, \eta\}$ из $\mathbb{C}\mathrm{a}^2$ и $u = \{r, \rho\}$ из $\mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus}$ элементу $xu = \{-r\xi + \bar{\rho}\bar{\eta},\ r\eta + \bar{\xi}\bar{\rho}\}$ из $\mathbb{C}\mathrm{a}^2$ будет в $\mathscr{E}$ соответствовать матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & r\eta + \bar{\xi}\bar{\rho} & -r\bar{\xi} + \eta\rho \\ r\bar{\eta} + \rho\xi & 0 & 0 \\ -r\xi + \bar{\rho}\bar{\eta} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \eta & \bar{\xi} \\ \bar{\eta} & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \rho \\ 0 & \bar{\rho} & -r \end{pmatrix},$$

являющаяся йордановым произведением матриц из $\mathscr{E}$ и $\mathrm{Ann}^0 E_1$, отвечающих элементам x и u. Поскольку операторы Φ' и Φ^0 индуцированы автоморфизмом Φ алгебры Al, отсюда вытекает, что для этих операторов (рассматриваемых как операторы $\mathbb{C}\mathrm{a}^2 \to \mathbb{C}\mathrm{a}^2$ и $\mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus} \to \mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus}$) имеет место тождество

$$(10) \qquad \Phi'(xu) = \Phi' x \cdot \Phi^0 u, \qquad x \in \mathbb{C}\mathrm{a}^2, \quad u \in \mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus}.$$

Следовательно, согласно предложению 5 лекции 15, существует один и только один элемент $a \in \mathrm{Spin}(9)$, обладающий тем свойством, что $\Phi' = a^R$ и $\Phi^0 = a^T$.

Тем самым каждому автоморфизму $\Phi \in K$ мы сопоставили некоторый элемент $a \in \mathrm{Spin}(9)$. Ясно, что полученное отображение является гомоморфизмом. Более того, поскольку тождество (10), очевидно, необходимо и достаточно для того, чтобы соответствующее отображение Φ было автоморфизмом алгебры Al, это отображение представляет собой изоморфизм. Таким образом, мы

видим, что *подгруппа K естественно изоморфна спинорной группе* Spin(9).

Отождествив посредством этого изоморфизма подгруппу K с группой Spin(9), мы окончательно получим, что *группа* Spin(9) *содержится в группе F_4, причем соответствующее фактормногообразие диффеоморфно октавной проективной плоскости*:

$$F_4/\mathrm{Spin}(9) \approx \mathbb{C}\mathrm{aP}^2. \tag{11}$$

В частности, отсюда следует, что $\dim F_4 = \dim \mathrm{Spin}(9) + \dim \mathbb{C}\mathrm{aP}^2 = 36 + 16 = 52$.

Теперь мы уже можем доказать для группы F_4 предложение, полностью аналогичное предложению 1 лекции 15 для группы G_2:

Предложение 2. *Группа F_4 связна и односвязна. Каждая группа Ли, локально изоморфная группе F_4, изоморфна ей.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из существования диффеоморфизма (11), поскольку группа Spin(9) и проективная плоскость $\mathbb{C}\mathrm{aP}^2$ связны и односвязны.

Для доказательства второго утверждения нам достаточно доказать, что центр группы F_4 тривиален (состоит только из тождественного автоморфизма). Но если автоморфизм Φ_0: $\mathbb{A}\mathrm{l} \to \mathbb{A}\mathrm{l}$ принадлежит центру группы F_4, то, поскольку ни один примитивный идемпотент, кроме идемпотента E_1, не оставляет на месте все элементы подгруппы $K \approx \mathrm{Spin}(9)$, уже известное нам рассуждение (см. доказательство предложения 1 лекции 15) показывает, что $\Phi_0 \in K$ и, значит, что $\Phi_0 = \pm\mathrm{id}$ (ибо центр группы Spin(9) состоит только из элементов ± 1). Но так как $(-E_1)^2 = E_1 \neq -E_1$, то оператор $-\mathrm{id}$ автоморфизмом не является. Поэтому $\Phi_0 = \mathrm{id}$. □

Замечание 2. Если автоморфизм Φ: $\mathbb{A}\mathrm{l} \to \mathbb{A}\mathrm{l}$ оставляет на месте каждый идемпотент E_i, $i = 1, 2, 3$, то, как легко видеть, каждую матрицу вида $X_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3$, он переводит в матрицу $X_i(\xi^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$, где $\xi^{(i)}$ — некоторая октава, линейно зависящая от октавы ξ. Тем самым мы получаем три (очевидно, ортогональных) оператора Φ: $\xi \mapsto \xi^{(i)}$, действующих в линеале $\mathbb{C}\mathrm{a}$, и непосредственное вычисление, использующее формулу (20)

лекции 15, показывает, что для этих операторов имеет место тождество

$$\Phi_1\xi \cdot \Phi_2\eta = \Phi_3(\overline{\xi\eta}), \qquad \xi, \eta \in \mathbb{C}a.$$

Поэтому, согласно предложению 3 лекции 15, существует один и только один элемент $a \in \mathrm{Spin}(8)$, для которого $\Phi_1 = a^L$, $\Phi_2 = a^R$ и $\Phi_3 \circ \sigma = a^T$, где σ: $\xi \longmapsto \bar{\xi}$ — сопряжение в алгебре $\mathbb{C}a$. Поскольку полученное соответствие $\Phi \longmapsto a$ является, очевидно, изоморфизмом, тем самым доказано, что *группа* $\mathrm{Aut}^0\mathrm{Al}$ *автоморфизмов алгебры* Al, *оставляющих на месте все идемпотенты* E_i, $i = 1, 2, 3$, *изоморфна группе* $\mathrm{Spin}(8)$.

Поскольку группа Ли $F_4 = \mathrm{Aut}\,\mathrm{Al}$ односвязна, ее алгебраическое строение полностью определяется алгебраическим строением алгебры Ли $\mathfrak{f}_4 = \mathrm{Der}\,\mathrm{Al}$. Поэтому нам осталось только изучить эту алгебру Ли.

С этой целью мы выделим в алгебре Ли $\mathfrak{f}_4$ подалгебру $\mathrm{Der}^0\mathrm{Al}$, состоящую из дифференцирований, аннулирующих каждый идемпотент E_i, $i = 1, 2, 3$. Ясно, что эта подалгебра является алгеброй Ли подгруппы $\mathrm{Aut}^0\mathrm{Al}$ (см. замечание 2) и потому изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{l}(\mathrm{Spin}(8)) \approx \mathfrak{so}(8)$. Впрочем, этот изоморфизм легко установить и непосредственно. Действительно, если $DE_i = 0$ при $i = 1, 2, 3$, то, как немедленно следует из формул (19) лекции 15, для любого $i = 1, 2, 3$ элемент $DX_i(\xi)$ имеет вид $X_i(A_i\xi)$, где A_i — некоторый линейный оператор $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$. Операторы A_i кососимметричны и удовлетворяют (как непосредственно вытекает при $i = 1$ из формул (20) лекции 15) тождеству

$$A_1\xi \cdot \eta + \xi \cdot A_2\eta = A_3(\overline{\xi\eta}). \tag{12}$$

Поэтому (см. замечание 2 в лекции 15) $A_2 = \left(A_1^{\lambda^{-1}}\right)^\rho$ и $A_3 = A_1^{\lambda^{-1}} \circ \sigma$, где σ: $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$ — сопряжение. Поскольку, обратно, любые операторы A_1, A_2, A_3, удовлетворяющие тождеству (12), соответствуют, очевидно, некоторому дифференцированию $D \in \mathrm{Der}^0\mathrm{Al}$, этим доказано, что соответствие $D \longmapsto A_1$ является изоморфизмом. □

Мы будем обозначать дифференцирование из Der^0 Al, отвечающее оператору $A \in \mathfrak{so}(8)$, символом $\varkappa A$. Таким образом, $D = \varkappa A_1$ тогда и только тогда, когда $DE_i = 0$

для любого $i = 1, 2, 3$ и $DX_1(\xi) = X_1(A\xi)$ для любого $\xi \in \mathbb{C}a$.

Пусть теперь D — произвольное дифференцирование алгебры $\mathbb{A}$, и пусть

$$DE_i = a_{1i}E_1 + a_{2i}E_2 + a_{3i}E_3 + X_1(\xi_{1i}) + X_2(\xi_{2i}) + X_3(\xi_{3i}).$$

Так как $E_i^2 = E_i$, то $2DE_i \circ E_i = DE_i$, откуда в силу формул (18)—(20) лекции 15 непосредственно следует, что $a_{ij} = 0$ для любых i, j и $\xi_{ii} = 0$. Кроме того, так как $E_i \circ E_j = 0$ при $i \neq j$, то $DE_i \circ E_j + E_i \circ DE_j = 0$, откуда следует, что $\xi_{i,\,i+1} + \xi_{i,\,i+2} = 0$ для любого $i = 1, 2, 3$. Следовательно, положив $\xi_i = \xi_{i,\,i+1}$, мы получим, что

$$(13)\quad DE_i = X_{i+1}(\xi_{i+1}) - X_{i+2}(\xi_{i+2}), \qquad i = 1, 2, 3 \bmod 3.$$

С другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что для присоединенного дифференцирования $D = \operatorname{ad} A$, отвечающего матрице $A = Y_1(\xi_1) + Y_2(\xi_2) + Y_3(\xi_3)$ из $\mathbb{M}^0$, имеют место те же формулы (13). Это означает, что для любого дифференцирования $D \in \operatorname{Der} \mathbb{A}$ существует одно и только одно присоединенное дифференцирование $\operatorname{ad} A$, $A \in \mathbb{M}^0$, обладающее тем свойством, что $D - \operatorname{ad} A \in \operatorname{Der}^0 \mathbb{A} = \varkappa(\mathfrak{so}(8))$, т. е. что

$$(14)\qquad \mathfrak{f}_4 = \varkappa(\mathfrak{so}(8)) \oplus \operatorname{ad} \mathbb{M}^0.$$

Поскольку отображения $\varkappa\colon \mathfrak{so}(8) \to \mathfrak{f}_4$ и $\operatorname{ad}\colon \mathbb{M}^0 \to \mathfrak{f}_4$ являются мономорфизмами, тем самым доказано, что

$$\mathfrak{f}_4 \approx \mathfrak{so}(8) \oplus \mathbb{M}^0.$$

Так как $\dim \mathfrak{so}(8) = 28$ и $\dim \mathbb{M}^0 = 24$, этим, в частности, заново доказано, что $\dim \mathfrak{f}_4 = 52$.

Ввиду разложения (14), для того чтобы полностью определить алгебраическую структуру алгебры Ли $\mathfrak{f}_4$ достаточно вычислить всевозможные коммутаторы элементов вида $\varkappa A$ и $\operatorname{ad} Y_i(\xi)$, где $A \in \mathfrak{so}(8)$, $\xi \in \mathbb{C}a$, $i = 1, 2, 3$. Оказывается, что

$$(15)\qquad [\varkappa A, \varkappa B] = \varkappa [A, B],$$

$$(16)\qquad [\varkappa A, \operatorname{ad} Y_i(\xi)] = \operatorname{ad} Y_i(A\xi),$$

$$(17)\quad [\operatorname{ad} Y_i(\xi), \operatorname{ad} Y_j(\eta)] = \begin{cases} \varkappa C^{(i)}_{\xi,\,\eta}, & \text{если} \quad j = i, \\ \operatorname{ad} Y_{i+2}(-\overline{\xi\eta}), & \text{если} \quad j = i+1, \end{cases}$$

где A и B — произвольные элементы алгебры Ли $\mathfrak{so}(8)$ (интерпретированные как кососимметрические операторы $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$), ξ, η — произвольные октавы, а $C^i_{\xi,\eta}$ — операторы $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$, определенные соответственно формулами

$$\begin{aligned} C^{(1)}_{\xi,\eta}&: \zeta \longmapsto 4(\xi, \eta)\eta - 4(\eta, \xi)\xi, \\ C^{(2)}_{\xi,\eta}&: \zeta \longmapsto \zeta\xi \cdot \bar{\eta} - \zeta\eta \cdot \bar{\xi}, \qquad\qquad \zeta \in \mathbb{C}a. \\ C^{(3)}_{\xi,\eta}&: \zeta \longmapsto \bar{\eta} \cdot \xi\zeta - \bar{\xi} \cdot \eta\xi, \end{aligned}$$

Действительно, формула (15) равносильна утверждению, что отображение $\varkappa$ является гомоморфизмом, а формулы (16) и (17) проверяются непосредственным вычислением. Например, легко видеть, что

$$[Y_1(\xi), E_1] = 0, \quad [Y_1(\xi), E_2] = -X_1(\xi), \quad [Y_1(\xi), E_3] = X_1(\xi),$$

т. е. что $(\operatorname{ad} Y_1(\xi))E_i = \varepsilon_i X_1(\xi)$, где $\varepsilon_i = 0, -1, 1$ при $i = 1, 2, 3$. Поэтому (поскольку, по определению, $(\varkappa A)E_i = 0$ для любого $i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} [\varkappa A, \operatorname{ad} Y_1(\xi)]E_i &= (\varkappa A)(\operatorname{ad} Y_1(\xi))E_i = \\ &= \varepsilon_i X_1(A\xi) = (\operatorname{ad} Y_1(A\xi))E_i, \end{aligned}$$

и, значит, дифференцирование $D = [\varkappa A, \operatorname{ad} Y_1(\xi)] - \operatorname{ad} Y_1(A\xi)$ лежит в $\operatorname{Der}^0 \mathrm{Al}$. Но, как показывает очевидное вычисление,

$$[Y_1(\xi), X_1(\zeta)] = 2(\xi, \zeta)(E_2 - E_3),$$

и потому для D имеет место формула

$$\begin{aligned} DX_1(\zeta) &= (\varkappa A)(2(\xi, \zeta)(E_2 - E_3)) - \\ &- [Y_1(\xi), X_1(A\zeta)] - [Y_1(A\xi), X_1(\zeta)] = \\ &= -2[(\xi, A\xi) + (A\xi, \zeta)](E_2 - E_3) = 0, \end{aligned}$$

ибо оператор A по условию кососимметричен. Следовательно, $D = 0$, что доказывает формулу (16) при $i = 1$. Аналогично

$$\begin{aligned} &[\operatorname{ad} Y_1(\xi), \operatorname{ad} Y_1(\eta)]E_i = \\ &\quad = \varepsilon_i(\operatorname{ad} Y_1(\xi))X_1(\eta) - \varepsilon_i(\operatorname{ad} Y_1(\eta))X_1(\xi) = \\ &\quad = 2\varepsilon_i((\xi, \eta) - (\eta, \xi))(E_2 - E_3) = 0 \end{aligned}$$

и

$$[\operatorname{ad} Y_1(\xi), \operatorname{ad} Y_1(\eta)] X_1(\zeta) = \\ = 2((\eta, \zeta) \operatorname{ad} Y_1(\xi) - (\xi, \zeta) \operatorname{ad} Y_1(\eta))(E_2 - E_3) = \\ = 4(-(\eta, \zeta) X_1(\xi) + (\xi, \zeta) X_1(\eta)),$$

что доказывает формулу (17) при $i = j = 1$. Остальные формулы (16) и (17) проверяются точно так же. □

Полученные результаты позволяют доказать для алгебры Ли $\mathfrak{f}_4$ аналог предложения 1 лекции 14.

Пусть $\mathfrak{h}$ — четырехмерное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{f}_4$, состоящее из линейных комбинаций элементов $\varkappa E_{[1,8]}$, $\varkappa E_{[2,7]}$, $\varkappa E_{[3,6]}$ и $\varkappa E_{[4,5]}$. Так как эти элементы коммутируют друг с другом, то $[H_1, H_2] = 0$ для любых элементов $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ — базис сопряженного линеала $\mathfrak{h}^*$, двойственный базису $\varkappa E_{[1,8]}$, $\varkappa E_{[2,7]}$, $\varkappa E_{[3,6]}$, $-\varkappa E_{[4,5]}$ линеала $\mathfrak{h}$. Введя в $\mathfrak{h}^*$ евклидову структуру, в которой базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ ортонормирован, назовем *конфигурацией* $\boldsymbol{F}_4$ совокупность всевозможных векторов вида

$$\pm \boldsymbol{e}_p, \pm \boldsymbol{e}_p \pm \boldsymbol{e}_q \qquad (p \neq q),$$
$$\frac{1}{2}(\pm \boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2 \pm \boldsymbol{e}_3 \pm \boldsymbol{e}_4),$$

где допустимы любые комбинации знаков (число этих векторов равно 48).

В силу индуцированного евклидовой структурой отождествления $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}$ мы можем векторы $\alpha \in \boldsymbol{F}_4$ рассматривать как элементы из $\mathfrak{h}$. Следуя примеру алгебры Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ (см. лекцию 14), положим

$$H_\alpha = \frac{2\alpha}{|\alpha|^2} \quad \text{для любого} \quad \alpha \in \boldsymbol{F}_4.$$

Далее, обозначив во избежание путаницы с элементом из $\mathbb{C}$ а мнимую единицу поля $\mathbb{C}$ символом $\sqrt{-1}$, мы определим элементы X_α, $\alpha = \pm \boldsymbol{e}_p \pm \boldsymbol{e}_q$, комплексифицированной алгебры Ли $\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}} = \mathfrak{f}_4 \otimes \mathbb{C}$, положив

$$X_{\boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2} = \varkappa(E_{[7,8]} \pm E_{[1,2]}) + \sqrt{-1} \cdot \varkappa(E_{[7,1]} \pm E_{[2,8]}),$$
$$X_{-\boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2} = \varkappa(-E_{[7,8]} \pm E_{[1,2]}) + \sqrt{-1} \cdot \varkappa(E_{[7,1]} \mp E_{[2,8]}),$$

и считая, что остальные векторы $X_{\pm e_p \pm e_q}$ задаются формулами, получающимися заменой индексов (7, 8) на индексы (2, 7), (3, 6), (5, 4), когда p равно 2, 3, 4, и соответственно индексов (1, 2) на индексы (1, 8), (3, 6), (5, 4), когда q равно 1, 3, 4.

При $\alpha = \pm e_p$ мы положим

$$X_{\pm e_p} = \operatorname{ad} Y_1(\xi_p) \pm \sqrt{-1} \operatorname{ad} Y_1(\eta_p),$$

где

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = i, \quad \xi_3 = j, \quad \xi_4 = k,$$
$$\eta_1 = -h, \quad \eta_2 = -g, \quad \eta_3 = -f, \quad \eta_4 = -e,$$

а при $\alpha = \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ положим

$$X_\alpha = \begin{cases} \operatorname{ad} Y_2(\xi_p) + \sqrt{-1} \operatorname{ad} Y_2(\eta_p), \\ \operatorname{ad} Y_3(\xi_p) + \sqrt{-1} \operatorname{ad} Y_3(\eta_p), \end{cases}$$

если

$$\alpha = \begin{cases} \pm \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \\ \pm \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4), \\ \pm \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \\ \pm \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4), \end{cases}$$

или соответственно

$$\alpha = \begin{cases} \pm \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4), \\ \pm \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4), \\ \pm \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \\ \pm \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4), \end{cases}$$

где p — номер соответствующего вектора α в этих формулах.

Тогда оказывается, что *предложение* 1 *лекции* 14 (*вместе с формулой* (17) *той же лекции*) *будет справедливо и для алгебры* $\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$ (конечно, по отношению к конфигурации F_4).

Доказательство этого утверждения можно провести, выбрав в алгебре $\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$ соответствующий базис и шаг за шагом повторив вычисления, доказывающие предложение 1 и формулу (17) для алгебры Ли $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, но, конечно, объем необходимой работы будет при этом существенно больше. В следующем семестре мы разовьем общую теорию, позволяющую сократить эту работу, и потому мы пока доказательство отложим.

После всего сказанного не удивительно, что *для алгебры* $\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$ *имеет место и аналог предложения* 2 *лекции* 14. Чтобы получить формулировку этого предложения для алгебры $\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$, достаточно в формулах (23) лекции 14 считать индексы p и q меняющимися от 1 до 4, а числа n_{pq} считать элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство этого утверждения проводится на основании тех же самых соображений, но требует, конечно, существенно большего труда. Роль векторов f_1, e_2 будут играть при этом векторы

$$\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4), \quad e_4, \quad e_3 - e_4, \quad e_2 - e_3.$$

Детали вычислений мы оставляем читателю.