Лекция 17

РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ.— РАДИКАЛ АЛГЕБРЫ ЛИ.— АБЕЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ЛИ.— ЦЕНТР АЛГЕБРЫ ЛИ. — НИЛЬПОТЕНТНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ. — НИЛЬРАДИКАЛ АЛГЕБРЫ ЛИ.— ЛИНЕЙНЫЕ НИЛЬАЛГЕБРЫ ЛИ.—ТЕОРЕМА ЭНГЕЛЯ.—КРИТЕРИИ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ. — ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ. — РЕДУКТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ. — ЛИНЕЙНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ. — НИЛЬПОТЕНТНЫЙ РАДИКАЛ АЛГЕБРЫ ЛИ.

Обратимся теперь к общей теории алгебр Ли с тем, чтобы доказать теорему Адо и тем самым заполнить оставшийся пробел в доказательстве теоремы Картана в лекции 10.

Доказательство теоремы Адо основывается на довольно продвинутой структурной теории алгебр Ли, имеющей большой самостоятельный интерес. К сожалению, мы сможем только весьма поверхностно коснуться этой теории.

Если явно не оговорено противное, то во всем дальнейшем основным полем $\mathbb{K}$ считается произвольное поле характеристики 0. Все алгебры Ли над $\mathbb{K}$ предполагаются конечномерными.

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$. Для любых двух подпространств $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ алгебры $\mathfrak{g}$ мы будем символом $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ обозначать подпространство, порожденное элементами вида $[a, b]$, где $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. В этих обозначениях свойство подпространства $\mathfrak{a}$ быть подалгеброй будет равносильно включению $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, а свойство быть идеалом — включению $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$. Поскольку в силу

тождества Якоби $[[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{c}] \subset [[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}], \mathfrak{a}] + [\mathfrak{c}, \mathfrak{a}], \mathfrak{b}]$ отсюда, в частности, следует, что *если* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *идеалы, то* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ — *тоже идеал.*

Поэтому формулы

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \ldots, \ \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \ \ldots$$

определяют в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ убывающую (точнее, невозрастающую) цепочку идеалов

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \ \ldots \ \supset \mathfrak{g}^{(k)} \supset \ \ldots$$

Заметим, что $\mathfrak{g}^{(k)(l)} = \mathfrak{g}^{(k+l-1)}$.

Идеал $\mathfrak{g}^{(k)}$ некоторые авторы обозначают также символом $\mathfrak{g}^{(k-1)}$.

Определение 1. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если существует такое $k \geqslant 0$, что $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$.

Пусть $n = \dim \mathfrak{g}$. Убывающая цепочка подпространств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ \ldots \ \supset \mathfrak{g}_i \supset \ \ldots \ \supset \mathfrak{g}_n = 0$$

называется *флагом*, если размерность каждого подпространства этой цепочки на единицу меньше размерности предыдущего подпространства, т. е. если $\dim \mathfrak{g}_i = n - i$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n$. Флаг, состоящий из подалгебр, называется *флагом подалгебр.*

Предложение 1. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда разрешима, когда в ней существует флаг подалгебр*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ \ldots \ \supset \mathfrak{g}_i \supset \ \ldots \ \supset \mathfrak{g}_n = 0,$$

в котором каждая подалгебра $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *является идеалом предыдущей подалгебры* $\mathfrak{g}_{i-1}$ (*удовлетворяет соотношению* $[\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$).

Доказательство. По условию $\dim \mathfrak{g}_{i-1} = \dim \mathfrak{g}_i + 1$. Поэтому любой элемент из $\mathfrak{g}_{i-1}$ имеет вид $x + \lambda e$, где $x \in \mathfrak{g}_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$, а e — некоторый фиксированный элемент. Поскольку

$$[x + \lambda e, y + \mu e] = [x, y] + \lambda [x, e] - \mu [y, e],$$

а $[x, y]$, $[x, e]$, $[y, e] \in \mathfrak{g}_i$ (ибо $\mathfrak{g}_i$ — идеал в $\mathfrak{g}_{i-1}$), отсюда вытекает, что $[\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_{i-1}] \subset \mathfrak{g}_i$. Следовательно, если $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}_{i-1}$, то $\mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}] \subset [\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_{i-1}] \subset \mathfrak{g}_i$. Поскольку при $i = 1$ включение $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}_{i-1}$ верно, то тем самым оно доказано для всех $i = 1, \ldots, n + 1$. В частности, $\mathfrak{g}^{(n+1)} \subset \mathfrak{g}_n = 0$, т. е. $\mathfrak{g}^{(n+1)} = 0$.

Обратно, если существует такое $k \geqslant 0$, что $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ (и $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$), то в цепочке идеалов

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(k)} = 0$$

все включения строгие, и потому эту цепочку можно вложить в некоторый флаг

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = 0.$$

Пусть $i = 0, 1, \ldots, n$, и пусть a — наибольший индекс, для которого $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}^{(a)}$. Если $\mathfrak{g}_i \neq \mathfrak{g}^{(a)}$, то $\mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}^{(a)}$ и потому $[\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_i] \subset [\mathfrak{g}^{(a)}, \mathfrak{g}^{(a)}] = \mathfrak{g}^{(a+1)} \subset \mathfrak{g}_i$. Если же $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}^{(a)}$, то $\mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}^{(a-1)}$, и потому $[\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_i] \subset [\mathfrak{g}^{(a-1)}, \mathfrak{g}^{(a)}] \subset \mathfrak{g}^{(a)} = \mathfrak{g}_i$. Таким образом, во всех случаях $[\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$, откуда следует, что рассматриваемый флаг является флагом подалгебр (ибо $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset [\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$), в котором каждая подалгебра является идеалом предыдущей алгебры. □

При любом эпиморфизме $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ идеалы $\mathfrak{g}^{(k)}$ переходят, очевидно, в идеалы $\mathfrak{h}^{(k)}$. Аналогично, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k)} \cap \mathfrak{h}$. Поэтому *каждая факторалгебра и каждая подалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.* Кроме того, легко видеть, что *алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима, если она содержит разрешимый идеал $\mathfrak{h}$, факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ по которому разрешима.* Действительно, если $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} = 0$, то $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{h}$, и, значит, если $\mathfrak{h}^{(l)} = 0$, то $\mathfrak{g}^{(k+l-1)} = \mathfrak{g}^{(k)\,(l)} = 0$. □

Для любых двух идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ их сумма $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ также, очевидно, является идеалом, причем по так называемой первой теореме об изоморфизмах факторалгебра $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ изоморфна факторалгебре $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ и потому разрешима, если идеал $\mathfrak{a}$ разрешим. Следовательно, если идеал $\mathfrak{b}$ также разрешим, то разрешим и идеал $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Таким образом, *сумма $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ двух разрешимых идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ является разрешимым идеалом.* Поэтому *в любой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует наибольший разрешимый идеал $\mathfrak{r}$*, содержащий все разрешимые идеалы этой алгебры: им является сумма всех разрешимых идеалов алгебры $\mathfrak{g}$.

Определение 2. Идеал $\mathfrak{r}$ называется *радикалом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{r} = 0$, алгебра Ли называется *полупростой.*

Заметим, что любой гомоморфизм $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ отображает радикал алгебры $\mathfrak{g}$ в радикал алгебры $\mathfrak{h}$.

Естественный эпиморфизм $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ устанавливает биективное соответствие между идеалами $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$, содержащими идеал $\mathfrak{r}$, и идеалами $\mathfrak{b}$ алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, причем идеал $\mathfrak{b}$, отвечающий идеалу $\mathfrak{a}$, изоморфен факторалгебре $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ и, значит, разрешим тогда и только тогда, когда разрешим идеал $\mathfrak{a}$. Поскольку в силу максимальности радикала $\mathfrak{r}$ идеал $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{r}$ разрешим тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, этим доказано, что в факторалгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ нет отличных от нуля разрешимых идеалов, т. е. что *факторалгебра* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ *полупроста.*

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *абелевой*, если $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$, т. е. если $[x, y] = 0$ для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не полупроста, т. е. ее радикал $\mathfrak{r}$ отличен от нуля, и если k — наименьший показатель, для которого $\mathfrak{r}^{(k)} = 0$, то идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}^{(k-1)}$ (являющийся, очевидно, идеалом и в $\mathfrak{g}$) отличен от нуля и абелев ($[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{r}^{(k-1)}, \mathfrak{r}^{(k-1)}] = \mathfrak{r}^{(k)} = 0$). Обратно, если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует абелевый (и потому разрешимый) идеал $\mathfrak{a} \neq 0$, то $\mathfrak{r} \neq 0$ и, значит, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не полупроста. Таким образом, *алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда полупроста, когда в ней нет ненулевых абелевых идеалов.*

Центром алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее аннулятор в смысле общей теории алгебр, т. е. наибольшее подпространство $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$, для которого $[\mathfrak{z}, \mathfrak{g}] = 0$. Очевидным образом проверяется, что *центр является идеалом.*

Алгебра $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда абелева, когда $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}$.

Поскольку центр является абелевым идеалом, *центр полупростой алгебры равен нулю.*

Наряду с идеалами $\mathfrak{g}^{(k)}$ можно рассматривать также идеалы $\mathfrak{g}^k$, определяемые по индукции формулой

$$\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}], \qquad (\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}).$$

Заметим, что $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(2)}$.

Определение 4. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если существует такое $k \geqslant 1$, что $\mathfrak{g}^k = 0$.

Поскольку $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(2)}$, мы видим, в частности, что *любая абелева алгебра Ли нильпотентна.*

Индукцией по i немедленно устанавливается, что $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$ для любого i. Поэтому *любая нильпотентная алгебра Ли разрешима.*

Если $\mathfrak{g}^k = 0$ и $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$, то ненулевой идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^{k-1}$ обладает тем свойством, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = 0$ и потому лежит в центре $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, *центр $\mathfrak{z}$ нильпотентной алгебры Ли отличен от нуля.*

Заметим, что центр разрешимой алгебры Ли вполне может быть равен нулю.

Предложение 2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда нильпотентна, когда в ней существует такой флаг подалгебр*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_i \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = 0,$$

что для любого $i = 1, \ldots, n$ имеет место включение $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}] \subset \mathfrak{g}_i$ (так, что, в частности, каждая подалгебра $\mathfrak{g}_{i-1}$ является идеалом алгебры $\mathfrak{g}$).

Доказательство. (Ср. с доказательством предложения 1.) Если $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{i-1}$, то $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{i-1}] \subset \subset \mathfrak{g}_i$. Поскольку $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_0$, этим по индукции доказано, что $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{i-1}$ для любого $i = 1, \ldots, n$. В частности, $\mathfrak{g}^{n+1} \subset \subset \mathfrak{g}_n = 0$ и, значит, $\mathfrak{g}^{n+1} = 0$.

Обратно, если существует такое $k \geqslant 1$, что $\mathfrak{g}^k = 0$, то (при условии, что $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$) в цепочке идеалов

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^k = 0$$

все включения строгие, и потому эту цепочку можно вложить во флаг подпространств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = 0.$$

Если теперь a — наибольший индекс, для которого $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}^a$, то $\mathfrak{g}^{a+1} \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ и потому

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^a] = \mathfrak{g}^{a+1} \subset \mathfrak{g}_{i+1}. \quad \square$$

Так же как для случая разрешимых алгебр, доказывается, что *любая подалгебра и любая факторалгебра нильпотентной алгебры являются нильпотентными алгебрами.* Однако соответствующее утверждение для расширений, вообще говоря, неверно. Можно лишь утверждать, что *алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, если нильпотентна ее факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ по некоторому идеалу $\mathfrak{h}$, содержаще-*

муся в ее центре $\mathfrak{z}$. Действительно, если $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k = 0$, то $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}$ и потому $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}] = 0$. □

Для каждого идеала $\mathfrak{a}$ произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ его идеалы $\mathfrak{a}^k$ являются, очевидно, идеалами и в $\mathfrak{g}$. Более общим образом, если мы рассмотрим два произвольных идеала $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то все подпространства

$$\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{d}_0, \ \mathfrak{c}_1 = [\mathfrak{c}_0, \mathfrak{d}_1], \ \ldots, \ \mathfrak{c}_i = [\mathfrak{c}_{i-1}, \mathfrak{d}_i],$$

где $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_i, \ldots$ — идеалы, каждый из которых совпадает либо с $\mathfrak{a}$, либо с $\mathfrak{b}$, также будут идеалами алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При этом легко видеть, что *для любого* $k \geqslant 0$ *имеет место включение*

$$\mathfrak{c}_k \subset \mathfrak{a}^l,$$

где l — *число индексов* $i \leqslant k$, *для которых* $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}$. Действительно, при $k = 0$ это включение, очевидно, верно (условно, мы считаем, что $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{g}$), а если оно верно для некоторого k, то $\mathfrak{c}_{k+1} = [\mathfrak{c}_k, \mathfrak{d}_k] \subset [\mathfrak{a}^l, \mathfrak{d}_k]$, а потому $\mathfrak{c}_{k+1} \subset \mathfrak{a}^l$, если $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}_{k+1} \subset \mathfrak{a}^{l+1}$, если $\mathfrak{d}_{k+1} = \mathfrak{a}$. □

По симметрии имеет место, конечно, и включение $\mathfrak{c}_k \subset \mathfrak{b}^m$, где m — число индексов $i \leqslant k$, для которых $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{b}$. Но ясно, что либо l, либо m не меньше, чем $p = [k/2]$. Поэтому либо $\mathfrak{c}_k \subset \mathfrak{a}^p$, либо $\mathfrak{c}_k \subset \mathfrak{b}^p$, т. е.

$$\mathfrak{c}_k \subset \mathfrak{a}^p \cup \mathfrak{b}^p.$$

С другой стороны, ясно, что идеал $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^k$ является суммой идеалов вида $\mathfrak{c}_k$, соответствующих всевозможным последовательностям $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_k$ идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Поэтому для этого идеала имеет место включение

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^k \subset \mathfrak{a}^p \cup \mathfrak{b}^p.$$

Отсюда, в частности, непосредственно следует, что, так же как и для разрешимых идеалов, *сумма* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *нильпотентных идеалов* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *является нильпотентным идеалом*. Поэтому *в любой алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *существует наибольший нильпотентный идеал* $\mathfrak{n}$, содержащий все нильпотентные идеалы алгебры. Этот идеал называется *нильрадикалом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Заметим, что, в отличие от случая радикала, фактор-алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по ее нильрадикалу вполне может иметь отличный от нуля нильрадикал.

Для подалгебр коммутаторной алгебры $[\mathscr{A}]$ произвольной (вообще говоря, бесконечномерной) ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ и, в частности, для *линейных алгебр Ли* (подалгебр коммутаторной алгебры $[\mathrm{End}\,\mathscr{V}]$ линейных операторов, действующих в некотором линейном пространстве $\mathscr{V}$) можно указать очень полезное достаточное условие их нильпотентности.

Напомним, что линейный оператор, действующий в линейном пространстве $\mathscr{V}$ (или, более общо, элемент произвольной ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$), называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна нулю (см. II, 15). Аналогично множество линейных операторов (или элементов ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$) называется *нильпотентным*, если существует такое $k \geqslant 1$, что произведение любых k элементов этого множества равно нулю.

Мы будем применять последний термин к подмножествам, являющимися подпространствами (и, в частности, подалгебрами) алгебры Ли $[\mathscr{A}]$, и потому, чтобы избежать терминологической путаницы, будем называть нильпотентные в этом смысле подпространства *ассоциативно нильпотентными* подпространствами (подалгебрами). Кроме того, в соответствии с общей терминологией, принятой в теории ассоциативных алгебр, подалгебры $\mathfrak{g} \subset [\mathscr{A}]$, состоящие из нильпотентных элементов, мы будем называть *нильподалгебрами Ли*. Ясно, что любая ассоциативно нильпотентная подалгебра Ли является нильподалгеброй. Замечательно, что обратное утверждение также верно:

Предложение 3. *Любая конечномерная нильподалгебра Ли $\mathfrak{g}$ ассоциативно нильпотентна.*

Мы докажем даже более общее утверждение.

Предложение 3а (теорема Джекобсона). *Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная алгебра (возможно, бесконечномерная) и $\mathscr{Q}$ — ее конечномерное подпространство, порожденное некоторым подмножеством $\mathfrak{g}$, замкнутым относительно коммутирования. Если каждый элемент $a \in \mathfrak{g}$ нильпотентен, то подпространство $\mathscr{Q}$ ассоциативно нильпотентно.*

Доказательство. Легко видеть, что в $\mathfrak{g}$ существует ассоциативно нильпотентные подмножества (например, нулевое). Поскольку ранг множества $\mathfrak{g}$, по условию конечен, в нем существуют и максимальные ассоциативно

нильпотентные подмножества $\mathfrak{h}$. Поскольку подпространство, порожденное ассоциативно нильпотентным подмножеством, также, как легко видеть, ассоциативно нильпотентно, нам достаточно доказать, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ и приведем это предположение к противоречию.

Пусть $\mathscr{P}$ — линейная оболочка максимального ассоциативно нильпотентного подмножества $\mathfrak{h}$, и пусть p — такое число, что произведение любых p элементов из $\mathscr{P}$ равно нулю. Тогда *для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ результат его последовательного коммутирования с любыми $2p-1$ элементами из $\mathscr{P}$ равен нулю.* Действительно, коммутируя a с элементами $b_1, \ldots, b_{2p-1}$ из $\mathscr{P}$, мы после раскрытия всех коммутаторов получим алгебраическую сумму произведений вида bac, где b — произведение некоторых из элементов $b_1, \ldots, b_{2p-1}$, а c — произведение остальных из этих элементов. Но ясно, что либо в b, либо в c входит не менее p множителей $b_1, \ldots, b_{2p-1}$, и потому это произведение равно нулю. Следовательно, все элементы вида bac равны нулю и, значит, равна нулю и их сумма.

Теперь ясно, что *для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ существует такое число $s \geqslant 0$, что результат его последовательного коммутирования с любыми s элементами из $\mathfrak{h}$ лежит в $\mathscr{P}$.* При этом $s \leqslant 2p-1$.

Отсюда следует, что *если $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$, то в $\mathfrak{g}$ существует такой элемент $a_0 \notin \mathfrak{h}$, что $[a_0, b] \in \mathscr{P}$ для любого $b \in \mathscr{P}$.* Для доказательства достаточно выбрать произвольный элемент $a \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ и применить к нему доказанное утверждение, заметив, что если s выбрано наименьшим, то в $\mathfrak{h}$ существуют такие элементы $b_1, \ldots, b_{s-1}$, что (лежащий в $\mathfrak{g}$) результат a_0 последовательного коммутирования a с $b_1, \ldots, b_{s-1}$ не лежит в $\mathfrak{h}$, но обладает тем свойством, что $[a_0, b] \in \mathscr{P}$ для любого $b \in \mathfrak{h}$, а потому и для любого $b \in \mathscr{P}$.

Назовем *одночленом* произведение элементов из $\mathscr{P}$, перемежающихся элементом a_0 (в любом числе и любом порядке). Пусть r — число множителей одночлена a, лежащих в $\mathscr{P}$. Оказывается, что *если $r \geqslant p$, то $a = 0$.* Действительно, пусть в одночлене a есть множитель вида ba_0, где $b \in \mathscr{P}$. Так как $[a_0, b] \in \mathscr{P}$, то, заменив ba_0 на $a_0b - [a_0, b]$, мы представим a в виде суммы двух одночленов с тем же r, в первом из которых число множителей

вида a_0 будет на единицу меньше, а во втором такой множитель сдвинется на одно место влево. Повторив нужное число раз это преобразование, мы представим a в виде суммы одночленов, в которых либо вообще не будет множителей вида a_0, либо все эти множители будут собраны слева. Но каждый такой одночлен получается умножением некоторого элемента алгебры $\mathscr{A}$ на элемент, являющийся произведением $r \geqslant p$ элементов из $\mathscr{P}$, и потому равен нулю. Значит, равен нулю и исходный одночлен a.

Так как $a_0 \in \mathfrak{g}$, то по условию существует такой показатель k_0, что $a_0^{k_0} = 0$. Поэтому одночлен a может быть отличен от нуля только тогда, когда в нем встречаются степени элемента a_0 лишь с показателями, меньшими чем k_0. Эти степени перемежаются множителями из $\mathscr{P}$, и потому их число не больше числа r этих множителей. Так как, по доказанному выше, при $a \neq 0$ необходимо $r < p$, то общее число множителей любого отличного от нуля одночлена a не превосходит

$$r - 1 + r(k_0 - 1) \leqslant p - 1 + p(k_0 - 1) = pk_0 - 1.$$

Этим доказано, что *если число всех множителей одночлена a не меньше pk_0, то $a = 0$.*

В частности, это означает, что равно нулю произведение любых pk_0 элементов множества $\bar{\mathfrak{h}} = \{\mathfrak{h}, a_0\}$, т. е. что это множество ассоциативно нильпотентно. Поскольку это противоречит максимальности множества $\mathfrak{h}$, предложение 3[a] тем самым полностью доказано. □

Следствие 1. *Каждая конечномерная нильподалгебра Ли $\mathfrak{g} \subset [\mathscr{A}]$ нильпотентна.*

Доказательство. Каждый элемент идеала $\mathfrak{g}^k$ является линейной комбинацией k-кратных коммутаторов вида

$$[x_1, [x_2, \ldots [x_{k-1}, x_k] \ldots]], \qquad x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$$

и, следовательно (как элемент алгебры $\mathscr{A}$), алгебраической суммой всевозможных произведений вида $x_{i1} \ldots x_{ik}$. Следовательно, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ ассоциативно нильпотентна, то $\mathfrak{g}^k = 0$ для достаточно большого k, т. е. эта алгебра нильпотентна. Поэтому для завершения доказательства остается воспользоваться предложением 3. □

Вообще говоря, это достаточное условие нильпотентности подалгебр коммутаторных алгебр Ли (и, в частности, линейных алгебр Ли) не является необходимым. Например, легко видеть, что совокупность всех матриц вида $\lambda E + A$, где $A = (a_{ij})$ — произвольная строго верхнетреугольная матрица (т. е. такая, что $a_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$), является нильпотентной подалгеброй алгебры Ли $[\mathbb{R}(n)]$ и вместе с тем матрица $\lambda E + A$ нильпотентна только при $\lambda = 0$.

Вернемся теперь к произвольным (но, как всегда, конечномерным) алгебрам Ли.

Для любой такой алгебры $\mathfrak{g}$ определен ее гомоморфизм ad в коммутаторную алгебру алгебры всех линейных операторов $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (см. лекцию 3). По определению для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ линейный оператор $\operatorname{ad} a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ переводит элемент $x \in \mathfrak{g}$ в элемент $[a, x]$. Поэтому, в частности, любой k-кратный коммутатор $[x_1, [x_2, \ldots, [x_{k-1}, x_k] \ldots]]$ является не чем иным, как результатом применения к элементу x_k линейного оператора $\operatorname{ad} x_1 \circ \operatorname{ad} x_2 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} x_{k-1}$. Это означает, что *алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда нильпотентна, когда линейная алгебра Ли* $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ *ассоциативно нильпотентна.* В силу предложения 3 этим доказано

Следствие 2. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда нильпотентна, когда для любого элемента* $a \in \mathfrak{g}$ *линейный оператор* $\operatorname{ad} a$ *нильпотентен.* □

Это следствие известно как теорема Энгеля. Впрочем, очень часто теоремой Энгеля называют следствие 1 или даже само предложение 3.

В связи с теоремой Энгеля особую важность приобретают различные критерии нильпотентности линейного оператора. Мы сейчас докажем два простейших критерия такого рода.

Напомним, что *следом* линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathscr{V}$, называется сумма диагональных элементов его матрицы в произвольном базисе пространства $\mathscr{V}$. След определен корректно (не зависит от базиса) и обозначается символом $\operatorname{Tr} A$.

Свойства следа.

1°. Число $\operatorname{Tr} A$ линейно зависит от оператора A (является линейным функционалом на пространстве $\operatorname{End} \mathscr{V}$ всех линейных операторов $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$).

2°. Для любых двух операторов A и B

$$\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA.$$

3°. След равен сумме всех характеристических корней оператора A (повторенных столько раз, какова их кратность):

$$\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Свойство 1° очевидно. Свойство 2° доказывается прямым подсчетом, а для доказательства свойства 3° проще всего рассмотреть нормальную жорданову форму оператора A. (Заметим, что в свойстве 3° мы переходим к алгебраическому замыканию поля $\mathbb{K}$, т. е. при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — к полю $\mathbb{C}$, но след оператора при расширении основного поля не меняется, поскольку не меняется его матрица.)

Так как для нильпотентного оператора все характеристические корни равны нулю (см. II, 15), из свойства 3°, в частности, следует, что *след любого нильпотентного оператора равен нулю.*

Это необходимое условие нильпотентности, конечно, не является достаточным. Однако поскольку любая степень нильпотентного оператора также является нильпотентным оператором, из него следует, что *если оператор A нильпотентен, то $\operatorname{Tr} A^k = 0$ для любого k.*

Оказывается, что это условие уже не только необходимо, но и достаточно, т. е. *если $\operatorname{Tr} A^k = 0$ для любого k, то оператор A нильпотентен.* Действительно, поскольку характеристическими корнями оператора A^k являются степени $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ характеристических корней оператора A, для следа $\operatorname{Tr} A^k$ оператора A^k имеет место формула

$$\operatorname{Tr} A^k = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k,$$

означающая, что число $\operatorname{Tr} A^k$ является суммой k-х степеней корней характеристического многочлена оператора A. Но из теории симметрических многочленов известно, что коэффициенты любого многочлена полиномиально выражаются через суммы степеней его корней (это так назы-

ваемые формулы Варинга) и равны нулю, если все эти суммы равны нулю. Применительно к характеристическому многочлену $f_A(\lambda)$ оператора A этим доказано, что если $\operatorname{Tr} A^k = 0$ для всех k, то $f_A(\lambda) = \lambda^n$. Поэтому в силу теоремы Гамильтона — Кэли (см. II, 16) $A^n = 0$. □

Другое более специальное достаточное условие нильпотентности относится к операторам вида

$$A = [B_1, C_1] + \ldots + [B_s, C_s], \tag{1}$$

являющимся суммами коммутаторов. Оказывается, что *если оператор A вида* (1) *перестановочен с каждым из операторов $B_1, \ldots, B_s$ (т. е. $[A, B_1] = 0, \ldots, [A, B_s] = 0$), то этот оператор нильпотентен.* Действительно, для любого k оператор A^k также является суммой коммутаторов:

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k-1}([B_1, C_1] + \ldots + [B_s, C_s]) = \\ &= A^{k-1}(B_1C_1 - C_1B_1 + \ldots + B_sC_s - C_sB_s) = \\ &= (B_1A^{k-1}C_1 - A^{k-1}C_1B_1) + \ldots + (B_sA^{k-1}C_s - A^{k-1}C_sB_s) = \\ &= [B_1, A^{k-1}C_1] + \ldots + [B_s, A^{k-1}C_s], \end{aligned}$$

и потому $\operatorname{Tr} A^k = 0$ (см. свойства 1 и 2 следа). Следовательно, оператор A нильпотентен. □

Из этого критерия следует, что *для любой линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ пересечение $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2$ ее центра и идеала $\mathfrak{g}^2$ состоит из нильпотентных операторов.* Действительно, любой оператор A из $\mathfrak{g}^2$ имеет вид (1), где $B_1, C_1, \ldots, B_s, C_s \in \mathfrak{g}$, а если $A \in \mathfrak{z}$, то $[A, B_1] = 0, \ldots, [A, B_s] = 0$. □

Аналогично доказывается, что *для каждого абелева идеала $\mathfrak{a}$ линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ идеал $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ состоит из нильпотентных операторов.*

Более точные результаты можно получить в предположении, что линейная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *неприводима*, т. е. что в $\mathscr{V}$ не существует нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов из $\mathfrak{g}$.

Для любого подмножества $\mathfrak{a}$ линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, действующей в пространстве $\mathscr{V}$, мы будем символом $\mathfrak{a}\mathscr{V}$

обозначать линейную оболочку всех векторов вида Ax, где $A \in \mathfrak{a}$ и $x \in \mathscr{V}$.

Легко видеть, что *если $\mathfrak{a}$ — идеал, то подпространство $\mathfrak{a}\mathscr{V}$ инвариантно относительно всех операторов из $\mathfrak{g}$.* Действительно, если $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{g}$ и $x \in \mathscr{V}$, то

$$B(Ax) = [B, A]x + A(Bx) \in \mathfrak{a}\mathscr{V},$$

ибо $[B, A] \in \mathfrak{a}$. □

Отсюда следует, что *если линейная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ неприводима, то в каждом ее ненулевом идеале $\mathfrak{a}$ найдется ненильпотентный оператор.* Действительно, если все операторы из $\mathfrak{a}$ нильпотентны, т. е. $\mathfrak{a}$ является нильалгеброй, то по предложению 3 идеал $\mathfrak{a}$ ассоциативно нильпотентен. Пусть m — наименьшее число, обладающее тем свойством, что произведение любых m элементов из $\mathfrak{a}$ равно нулю. Тогда в ряду подпространств

$$\mathscr{P}_1 = \mathfrak{a}\mathscr{V}, \quad \mathscr{P}_2 = \mathfrak{a}\mathscr{P}_1, \ \ldots, \ \mathscr{P}_{m-1} = \mathfrak{a}\mathscr{P}_{m-2}, \quad \mathscr{P}_m = \mathfrak{a}\mathscr{P}_{m-1}$$

подпространство $\mathscr{P}_m$ равно нулю, а $\mathscr{P}_{m-1} \neq 0$. При этом, согласно предыдущему утверждению (примененному $m-1$ раз), подпространство $\mathscr{P}_{m-1}$ инвариантно относительно всех операторов из $\mathfrak{g}$. Поэтому в силу неприводимости $\mathscr{P}_{m-1} = \mathscr{V}$ и, значит, $\mathscr{P} = \mathfrak{a}\mathscr{V} = \mathfrak{a}\mathscr{P}_{m-1} = \mathscr{P}_m = 0$, что возможно только при $\mathfrak{a} = 0$. □

Применив это общее утверждение к идеалу $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2$, мы немедленно получим, что *для любой линейной неприводимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет место равенство*

$$\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2 = 0,$$

Кроме того, мы видим, что *любой абелев идеал $\mathfrak{a}$ линейной неприводимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ лежит в ее центре $\mathfrak{z}$.* Действительно, поскольку в идеале $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ нет ненильпотентных операторов, этот идеал равен нулю, но равенство $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = 0$ в точности означает, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}$. □

Определение 5. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *редуктивной*, если каждый ее абелев идеал лежит в ее центре $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2 = 0$.

Таким образом, мы доказали, что *любая линейная неприводимая алгебра редуктивна.*

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная редуктивная алгебра Ли. Поскольку $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2 = 0$, мы можем расширить $\mathfrak{g}^2$ до такого

подпространства $\mathfrak{m}$, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$. При этом, поскольку $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{m}$, подпространство $\mathfrak{m}$ является идеалом. Более того, легко видеть, что каждый идеал $\mathfrak{a}$ из $\mathfrak{m}$ является идеалом и в $\mathfrak{g}$ (так как $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \mathfrak{m}$, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{m}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$). Поэтому, если идеал $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ абелев, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}$ и, следовательно, $\mathfrak{a} = 0$. Таким образом, идеал $\mathfrak{m}$ не имеет отличных от нуля абелевых идеалов и потому полупрост.

Обратно, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — полупростой идеал, то $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$ и потому $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2 = 0$. Кроме того, при естественном эпиморфизме $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ каждый абелев идеал $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$ отображается в абелев идеал полупростой алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{z} \approx \mathfrak{m}$, т. е. в нуль. Поэтому $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}$ и, значит, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ редуктивна.

Этим доказано, что *алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда редуктивна, когда она является прямой суммой своего центра и некоторого полупростого идеала $\mathfrak{m}$*:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}.$$

(Заметим, что на самом деле $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^2$. Действительно, из $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$ следует, что $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{m}^2$, а, как мы покажем в следующей лекции, для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{m}$ имеет место равенство $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.)

Теперь легко видеть, что *радикал $\mathfrak{r}$ произвольной редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с ее центром $\mathfrak{z}$*. Действительно, при естественном эпиморфизме $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ радикал $\mathfrak{r}$ отображается в нуль (ибо алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ изоморфна идеалу $\mathfrak{m}$ и потому полупроста). Следовательно, $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{z}$ и, значит, $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}$. $\square$

Поэтому *редуктивная алгебра Ли тогда и только тогда разрешима, когда она абелева.*

Таким образом, в частности, *каждая линейная неприводимая разрешимая алгебра Ли абелева.*

Чтобы применить это утверждение к не обязательно неприводимым алгебрам, мы предварительно докажем одну общую лемму из линейной алгебры, относящуюся к произвольному линейному оператору A в линейном пространстве $\mathscr{V}$, обладающему инвариантным подпространством $\mathscr{P}$. Как мы знаем, такой оператор индуцирует оператор A_1: $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$ и оператор A_2: $\mathscr{V}/\mathscr{P} \to \mathscr{V}/\mathscr{P}$ на $\mathscr{V}/\mathscr{P}$.

Лемма 1. Если операторы A_1 и A_2 нильпотентны, то оператор A также нильпотентен.

Доказательство. Пусть $A_1^{k_1}=0$ и $A_2^{k_2}=0$. Тогда A^{k_2} переводит $\mathscr{V}$ в $\mathscr{P}$, а A^{k_1} переводит $\mathscr{P}$ в 0. Поэтому $A^{k_1+k_2}=A^{k_1}A^{k_2}$ переводит $\mathscr{V}$ в 0, т. е. $A^{k_1+k_2}=0$. □

Теперь легко видеть, что *если $\mathfrak{g}$ — линейная разрешимая алгебра Ли и оператор $A\in\mathfrak{g}$ нильпотентен, то для любого оператора $B\in\mathfrak{g}$ оператор AB также нильпотентен.* Действительно, проведем индукцию по размерности n линейного пространства $\mathscr{V}$, в котором действует алгебра Ли $\mathfrak{g}$, учитывая, что при $n=1$ утверждение тривиально. Если в $\mathscr{V}$ нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов из $\mathfrak{g}$, т. е. если алгебра $\mathfrak{g}$ неприводима, то по доказанному выше эта алгебра абелева и, значит, $AB=BA$. Поэтому $(AB)^k=A^kB^k$ для любого $k\geqslant 0$ и, следовательно, $(AB)^k=0$, когда $A^k=0$. Если же в $\mathscr{V}$ существует нетривиальное инвариантное подпространство $\mathscr{P}$, то, ограничивая все операторы из $\mathfrak{g}$ на $\mathscr{P}$, мы получим в $\mathscr{P}$ алгебру операторов, являющуюся гомоморфным образом алгебры $\mathfrak{g}$ и потому разрешимую. Следовательно, по предположению индукции, оператор AB на $\mathscr{P}$ нильпотентен. Аналогично, переходя к факторпространству $\mathscr{V}/\mathscr{P}$, мы получим, что оператор индуцирует в этом подпространстве нильпотентный оператор. Поэтому в силу леммы 1 оператор AB нильпотентен. □

Заметим, что, вообще говоря, $AB\notin\mathfrak{g}$.

Аналогичным образом доказывается, что *для любой линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с радикалом $\mathfrak{r}$ идеал $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$ состоит из нильпотентных операторов.* Действительно, если алгебра $\mathfrak{g}$ неприводима, то, как мы знаем, $\mathfrak{r}=\mathfrak{z}$ и потому $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]=0$. Значит, в этом случае утверждение автоматически верно. В общем случае мы снова воспользуемся индукцией по $\dim\mathscr{V}$. Пусть $\mathscr{P}$ — подпространство пространства $\mathscr{V}$, инвариантное относительно всех операторов из $\mathfrak{g}$. Тогда, ограничивая все операторы из $\mathfrak{g}$ на $\mathscr{P}$, мы получим в $\mathscr{P}$ алгебру операторов $\mathfrak{g}'$, изоморфную факторалгебре алгебры $\mathfrak{g}$ по некоторому идеалу (состоящему из операторов, равных нулю на $\mathscr{P}$). По предположению индукции, идеал $[\mathfrak{g}',\mathfrak{r}']$, где $\mathfrak{r}'$ — радикал алгебры $\mathfrak{g}'$, со-

стоит из нильпотентных операторов. Поскольку при эпиморфизме $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ отображается в идеал $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}']$, этим доказано, что любой оператор A из $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ индуцирует в $\mathscr{P}$ нильпотентный оператор. Аналогично доказывается, что оператор A индуцирует нильпотентный оператор и в факторпространстве $\mathscr{V}/\mathscr{P}$. Следовательно, по лемме 1 оператор A нильпотентен. □

В силу теоремы Энгеля отсюда следует, что для любой линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ нильпотентен. Впрочем, легко видеть, что это утверждение справедливо и для произвольных алгебр Ли:

Предложение 4. *В любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}' = \operatorname{ad} \mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{r}'$ — радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}'$. По доказанному идеал $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}']$ нильпотентен. С другой стороны, при гомоморфизме $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ переходит как раз в идеал $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}']$, а ядром этого гомоморфизма служит центр алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, при факторизации идеала $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ по некоторому идеалу центра получается нильпотентная алгебра. Следовательно, сам идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ также нильпотентен. □

Следствие. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда разрешима, когда идеал $\mathfrak{g}^2$ нильпотентен.*

Доказательство. Если алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима, т. е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}$, то идеал $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ нильпотентен. Обратно, если идеал $\mathfrak{g}^2$ нильпотентен (и, следовательно, разрешим), то алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима, поскольку факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$ абелева. □

Идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ называется обычно *нильпотентным радикалом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Он содержится в нильрадикале $\mathfrak{n}$, но, вообще говоря, отличен от $\mathfrak{n}$.