Лекция 19

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ЛИ. — ТЕОРЕМА УАЙТХЕДА. — РАЗЛОЖЕНИЕ ФИТТИНГА. — ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА УАЙТХЕДА. — ЛЕММЫ УАЙТХЕДА. — ТЕОРЕМА ВЕЙЛЯ О ПОЛНОЙ ПРИВОДИМОСТИ. — РАСШИРЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ.

Мы начнем эту лекцию с некоторых общих конструкций, генезис и значение которых могут быть объяснены только в рамках гомологической алгебры и в связи с топологической теорией групп когомологий групп Ли. Вкратце мы это сделаем в следующей лекции, а пока удовлетворимся чисто формальным изложением без каких-либо мотивировок.

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли, как всегда, конечномерная и над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0, и пусть $\mathscr{V}$ — модуль над $\mathfrak{g}$, имеющий как линейное пространство над $\mathbb{K}$ конечную размерность (т. е., иными словами, пространство некоторого конечномерного представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$).

Определение 1. Функция $u = u(x_1, \ldots, x_m)$ от m аргументов $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{g}$, принимающая значения в модуле $\mathscr{V}$, называется *m-мерной коцепью* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathscr{V}$, если:

а) эта функция кососимметрична, т. е. меняет знак при перестановке любой пары аргументов;

б) линейна по каждому аргументу (при фиксированных значениях других).

При $m = 1$ условие а) бессодержательно, так что коцепью будет произвольное линейное отображение u: $\mathfrak{g} \to \mathscr{V}$, а при $m = 0$ условно считается, в соответствии с общими соглашениями о функциях с нулевым числом ар-

гументов, что и представляет собой произвольный элемент модуля $\mathscr{V}^{\rho}$.

Все m-мерные коцепи очевидным образом составляют линейное пространство $C^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}^{\rho})$.

Для любой коцепи $u \in C^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}^{\rho})$ и любых элементов $x_1, \ldots, x_{m+1} \in \mathfrak{g}$ мы положим

$$(\delta u)(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} x_i u(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{m+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m+1} (-1)^{i+j} u([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{m+1}),$$

где знак $\hat{}$ над аргументом означает, что этот аргумент должен быть опущен.

Ясно, что определенная этой формулой функция δu линейна по каждому аргументу и, как показывает автоматическое вычисление, кососимметрична, т. е. является $m+1$-мерной коцепью. Получающееся отображение

$$\delta\colon C^m(\mathfrak{g}, \mathscr{V}^{\rho}) \to C^{m+1}(\mathfrak{g}, \mathscr{V}^{\rho}),$$

очевидно, линейно.

При $m = 0$

$$(\delta u)(x) = xu,$$

при $m = 1$

$$(\delta u)(x, y) = xu(y) - yu(x) - u([x, y]),$$

при $m = 2$

$$(\delta u)(x, y, z) = xu(y, z) - yu(x, z) + zu(x, y) -$$
$$- u([x, y], z) + u([x, z], y) - u([y, z], x).$$

Основное свойство отображения δ состоит в том, что дважды повторенное оно равно нулю:

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Например, при $m = 0$

$$(\delta\delta u)(x, y) = x(yu) - y(xu) - [x, y]u = 0$$

и при $m = 1$

$$\begin{aligned}(\delta\delta u)(x, y, z) = {} & x(yu(z) - zu(y) - u([y, z]) - \\ & - y(xu(z) - zu(x) - u([x, z])) + \\ & + z(xu(y) - yu(x) - u([x, y])) - \\ & - [x, y]u(z) + zu([x, y]) + u([[x, y], z]) + \\ & + [x, z]u(y) - yu([x, z]) - u([[x, z], y]) - \\ & - [y, z]u(x) + xu([y, z]) + u([[y, z], x]) = 0.\end{aligned}$$

В общем случае вычисление утомительно, но при известной внимательности вполне выполнимо. Мы предоставим его читателю.

Определение 2. Коцепь u, для которой $\delta u = 0$, называется *коциклом*, а коцепь u вида δv — *кограницей*.

Все коциклы образуют подпространство $Z^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$ линеала $C^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}))$ ядро отображения δ: $C^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) \to C^{m+1}(\mathfrak{g}, \mathscr{V}))$, а все кограницы (при $m > 0$) — подпространство $B^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$ линеала $C^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$ (образ отображения δ: $C^{m-1}(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) \to C^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$). Соотношение $\delta \circ \delta = 0$ означает, что

$$B^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) \subset Z^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$$

при любом $m > 0$, так что определено факторпространство

$$H^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = Z^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})/B^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}).$$

При $m = 0$ мы условно считаем, что $H^0(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = Z^0(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$, так что $H^0(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$ есть не что иное, как подпространство модуля $\mathscr{V}$, состоящее из его *инвариантных элементов*, т. е. из таких элементов u, что $xu = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.

При $m = 1$ коциклы характеризуются соотношением

$$u([x, y]) = xu(y) - yu(x), \tag{1}$$

а при $m = 2$ — соотношением

$$\begin{aligned}u([x, y], z) + u([y, z], x) + u([z, x], y) = \\ = xu(y, z) + yu(z, x) + zu(x, y).\end{aligned} \tag{2}$$

Равенство $H^1(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = 0$ означает, что из выполнения соотношения (1) вытекает существование такого элемента $v \in \mathscr{V}$, что

$$u(x) = xv,$$

а равенство $H^2(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = 0$ — что из выполнения соотношения (2) вытекает существование такого линейного отображения $v: \mathfrak{g} \to \mathscr{V}$, что

$$u(x, y) = xv(y) - yv(x) - v([x, y]).$$

В дальнейшем нам фактически будут нужны только последние два утверждения.

Предположим теперь, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Тогда определен оператор Казимира $C = \rho(e_i)\rho(e^i)$ представления ρ, где $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис идеала $\mathfrak{h}$, дополнительного к ядру представления ρ, а $e^1, \ldots, e^n$ — его двойственный базис по отношению к следному функционалу t_ρ.

Предложение 1 (теорема Уайтхеда). *Если оператор C обратим, то*

$$H^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = 0 \quad \textit{для любого} \quad m \geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть $m = 0$. Если $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, то $Cv = 0$ и, значит, $v = 0$. Таким образом, $H^0(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = 0$.

Пусть $m > 0$, и пусть $u \in Z^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} x_i u(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{m+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m+1} (-1)^{i+j} u([x_i, x_j], \\ x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, \hat{x}_{m+1}) = 0$$

для любых элементов $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} \in \mathfrak{g}$. Подставив вместо x_{m+1} элемент базиса e_k идеала $\mathfrak{h}$, умножив на e^k и

просуммировав по k, мы получим тождество

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}e^k(x_iu(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m,\ e_k))+$$
$$+(-1)^{n+2}e^k(e_ku(x_1,\ \ldots,\ x_n))+$$
$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}(-1)^{i+j}e^ku([x_i,\ x_j],\ x_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ \hat{x}_j,\ \ldots,\ x_m,\ e_k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+m+1}e^ku([x_k,\ e_k],\ x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m)=0,$$

имеющее место для любых $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{g}$.

Поскольку $xu=\rho(x)u$, член $(-1)^{n+2}e^k(e_ku(x_1,\ \ldots$ $\ldots,\ x_m))$ тождества (3) есть не что иное, как $(-1)^{n+2}Cu(x_1,\ \ldots,\ x_m)$, а поскольку $e(xu)=[e,\ x]u+$ $+x(eu)$, первая сумма в этом тождестве равна

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}[e^k,\ x_i]\,u(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m,\ e_k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}x_i(e^ku(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m,\ e_k))=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\beta_l^k(x_i)\,e^lu(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m,\ e_k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}x_iv(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m),$$

где, как и в лемме 2 предыдущей лекции,

$$\beta_l^k(x)=t_\rho([x,\ e^k],\ e_l),$$

а

$$v(y_1,\ \ldots,\ y_{m-1})=e^ku(y_1,\ \ldots,\ y_{m-1},\ e_k)$$

для любых $y_1, \ldots, y_{m-1} \in \mathfrak{g}$.

Последняя же сумма в тождестве (3) равна

$$\sum_{i=1}(-1)^{i+m+1}\alpha_k^l(x_i)\,e^ku(e_l,\ x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m)=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\alpha_l^k(x_i)\,e^lu(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m,\ e_k),$$

где $\alpha_k^l(x) = t_0([x, e_k], e^l)$ и потому в силу леммы 2 предыдущей лекции сокращается с первой суммой в (4).

Поскольку двойная сумма в (3) может быть переписана в виде

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (-1)^{i+j} v([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_m),$$

этим доказано, что

$$(-1)^{n+2} Cu(x_1, \ldots, x_m) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} x_i v(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_m) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (-1)^{i+j} v([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots$$
$$\ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_m) = 0,$$

т. е. что

$$(-1)^{n+2} Cu(x_1, \ldots, x_m) + (\delta v)(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Отсюда следует, что, положив

$$w(x_1, \ldots, x_m) = (-1)^{n+1} C^{-1} v(x_1, \ldots, x_m),$$

мы получим такую коцепь $w \in C^{m-1}(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$, что $u = \delta w$.

Таким образом, каждый m-мерный коцикл алгебры $\mathfrak{g}$ над $\mathscr{V}$ является кограницей, и потому $H^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = 0$. □

Напомним, что линейный оператор C, действующий в линейном пространстве $\mathscr{V}$, называется прямой суммой $A \oplus B$ оператора A, действующего в подпространстве $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$, и оператора B, действующего в подпространстве $\mathscr{Q} \subset \mathscr{V}$, если $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$, подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ инвариантны относительно оператора C и операторы, индуцированные в $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ оператором C, совпадают соответственно с операторами A и B. В условной, но наглядной записи

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(ср. с II. 14).

Для исследования линеалов $H^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$ в случае, когда оператор Казимира C необратим, мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. Любой линейный оператор C в конечномерном линейном пространстве $\mathscr{V}$ единственным образом разлагается в прямую сумму

$$C = A \oplus B \tag{5}$$

обратимого оператора A и нильпотентного оператора B.

Доказательство. Так как пространство $\mathscr{V}$ конечномерно, то убывающая цепочка подпространств

$$\mathscr{V} \supset \operatorname{Im} C \supset \operatorname{Im} C^2 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} C^k \supset \ldots \tag{6}$$

стабилизируется, т. е. существует такое k, что $\operatorname{Im} C^k = \operatorname{Im} C^{k+1}$. Мы положим $\mathscr{P} = \operatorname{Im} C^k$. Ясно, что $\mathscr{P}$ инвариантно относительно C и индуцированный оператор A: $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ (являясь надъективным оператором) обратим.

По тем же соображениям стабилизируется возрастающая цепочка подпространств

$$0 \subset \operatorname{Ker} C \subset \operatorname{Ker} C^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} C^l \subset \ldots, \tag{7}$$

т. е. существует такое l, что $\operatorname{Ker} C^l = \operatorname{Ker} C^{l+1}$. Подпространство $\mathscr{Q} = \operatorname{Ker} C^l$ инвариантно относительно C и индуцированный оператор B: $Q \to Q$ нильпотентен (поскольку $B^l = 0$). При этом, заменив, если нужно, показатель k или l бо́льшим, мы можем считать, что $k = l$.

Таким образом, для доказательства существования разложения (5) осталось только доказать, что $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$. Но ясно, что для любого вектора $v \in \mathscr{V}$ вектор $C^k v$ лежит в $\mathscr{P}$, а вектор $v - C^k v$ в $\mathscr{Q}$. Поэтому $\mathscr{V} = \mathscr{P} + \mathscr{Q}$. Если же $v \in \mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$, т. е. $v = C^k w$ и $C^k v = 0$, то $C^{2k} w = 0$, и потому $w \in \mathscr{Q}$. Следовательно, $C^k w = 0$, т. е. $v = 0$.

Этим существование разложения (5) полностью доказано.

Его единственность непосредственно следует из того, что для любого разложения (5) соответствующие подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ однозначно характеризуются как подпространства, на которых стабилизируются цепочки (6) и (7). □

Разложение (3) называется *разложением Фиттинга* оператора C.

Если теперь опять $\mathscr{V}$ — пространство представления ρ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а C — его оператор Кази-

мира, то подпространства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ инвариантны относительно всех операторов $\rho(x)$ $x \in \mathfrak{g}$, т. е. *являются подмодулями*. Действительно, пусть, например, $v \in \mathcal{P}$. По условию существует такой вектор $w \in \mathcal{V}$, что $v = C^k w$. Пусть $\rho(x) w = w_1 + w_2$, где $w_1 \in \mathcal{P}$ и $w_2 \in \mathcal{Q}$. Так как $C^k w_2 = 0$, то

$$\rho(x) v = \rho(x) C^k w = C^k \rho(x) w = C^k w_1 \in \mathcal{P}.$$

Аналогично, если $v \in \mathcal{Q}$ и $C^k v = 0$, то $C^k \rho(x) v = \rho(x) C^k v = 0$ и, значит, $\rho(x) v \in \mathcal{Q}$. □

Являясь модулями над алгеброй $\mathfrak{g}$, линейные пространства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ будут пространствами некоторых представлений σ и τ этой алгебры (как говорят, представление ρ *разложено в прямую сумму* представлений σ и τ). При этом ясно, что операторы A и B из разложения Фиттинга оператора Казимира C представления ρ будут операторами Казимира представлений σ и τ. Поэтому в силу предложения 1 для любого $m \geqslant 0$ будет иметь место равенство

$$H^m(\mathfrak{g}; \mathcal{P}) = 0.$$

С другой стороны, поскольку оператор Казимира B представления τ нильпотентен, это представление тривиально (и $B = 0$). Это означает, что Q является прямой суммой одномерных инвариантных подпространств, на каждом из которых алгебра $\mathfrak{g}$ действует тривиально. Другими словами, $\mathfrak{g}$-модуль $\mathcal{Q}$ является прямой суммой модулей, каждый из которых изоморфен полю $\mathbb{K}$ с тривиальным действием на нем алгебры $\mathfrak{g}$. Число этих слагаемых называется *кратностью*, с которой $\mathbb{K}$ входит в $\mathcal{V}$.

Но ясно, что если $\mathfrak{g}$-модуль $\mathcal{V}$ является прямой суммой $\mathfrak{g}$-модулей $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_s$, то для любого $m \geqslant 0$ линеал $H^m(\mathfrak{g}; \mathcal{V})$ является прямой суммой линеалов $H^m(\mathfrak{g}; \mathcal{V}_1), \ldots, H^m(\mathfrak{g}; \mathcal{V}_s)$. Вместе со всем сказанным выше это доказывает следующее предложение, обобщающее предложение 1:

Предложение 2. Для любого модуля $\mathcal{V}$ над полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и каждого $m \geqslant 0$ линеал $H^m(\mathfrak{g}; \mathcal{V})$ является прямой суммой k экземпляров линеала $H^m(\mathfrak{g}; \mathbb{K})$, где k — кратность, с которой $\mathbb{K}$ входит в $\mathcal{V}$. □

Таким образом, для вычисления любых линеалов $H^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$ достаточно уметь вычислять линеалы $H^m(\mathfrak{g}; \mathbb{K})$.

В связи с этим полезно иметь в виду, что для коцепей над $\mathbb{K}$ общая формула кограницы существенно упрощается, принимая вид

$$(\delta u)(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m+1} (-1)^{i+j} u([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{m+1}).$$

Например, при $m = 0$

$$(\delta u)(x) = 0,$$

при $m = 1$

$$(\delta u)(x, y) = -u([x, y]),$$

и при $m = 2$

$$(\delta u)(x, y, z) = -u([x, y], z) + u([x, z], y) - u([y, z], x).$$

Поэтому $H^0(\mathfrak{g}; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$, а $H^1(\mathfrak{g}; \mathbb{K})$ представляет собой пространство линейных функционалов $\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, равных нулю на $\mathfrak{g}^2$ (т. е. является аннулятором $\operatorname{Ann} \mathfrak{g}^2$ подпространства $\mathfrak{g}^2$ в сопряженном пространстве $\mathfrak{g}'$).

Но в предыдущей лекции было показано, что полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ совпадает со своим идеалом $\mathfrak{g}^2$. Поэтому для любой полупростой алгебры Ли $H^1(\mathfrak{g}; \mathbb{K}) = 0$.

В силу предложения 2 этим доказано

Следствие 1 (первая лемма Уайтхеда). *Для любого модуля $\mathscr{V}$ над полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ имеет место равенство*

$$H^1(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = 0. \quad \square$$

Чтобы получить аналогичный результат при $m = 2$, мы для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$ и любого функционала $\xi: \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ положим

$$x\xi = -\xi \circ \operatorname{ad} x.$$

Автоматическая проверка показывает, что соответствие $(x, \xi) \mapsto x\xi$ определяет в сопряженном линеале $\mathfrak{g}'$ структуру $\mathfrak{g}$-модуля. Поэтому имеет смысл рассматривать коцепи алгебры $\mathfrak{g}$ над модулем $\mathfrak{g}'$.

Для каждого $m \geqslant 1$ мы определим отображение

$$\varphi\colon C^m(\mathfrak{g};\ \mathbb{K}) \to C^{m-1}(\mathfrak{g};\ \mathfrak{g}'),$$

положив

$$(\varphi u)(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1})(x) = \\ = u(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1},\ x), \qquad x_1,\ \ldots,\ x_{m-1},\ x \in \mathfrak{g},$$

для любой коцепи $u \in C^m(\mathfrak{g};\ \mathbb{K})$. Так как

$$\begin{aligned}
&[\delta(\varphi u)(x_1,\ \ldots,\ x_m)](x) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} [x_i((\varphi u)(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m))](x) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (-1)^{i+j} [(\varphi u)([x_i,\ x_j], \\
&\qquad\qquad x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ \hat{x}_j,\ \ldots,\ x_m)](x) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i} [(\varphi u)(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m)]([x_i,\ x]) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (-1)^{i+j} u([x_i,\ x_j], \\
&\qquad\qquad x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ \hat{x}_j,\ \ldots,\ x_m,\ x) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i} u(x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_m,\ [x_i,\ x]) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (-1)^{i+j} u([x_i,\ x_j], \\
&\qquad\qquad x_1,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ \hat{x}_j,\ \ldots,\ x_m,\ x) = \\
&= (\delta u)(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ x) = \\
&\qquad = [(\varphi(\delta u))(x_1,\ \ldots,\ x_m)](x)
\end{aligned}$$

для любой коцепи $u \in C^m(\mathfrak{g};\ \mathbb{K})$ и любых элементов x, $x_1,\ \ldots,\ x_m \in \mathfrak{g}$, то $\delta \circ \varphi = \varphi \circ \delta$, откуда, в частности, вытекает, что для любого коцикла u коцепь φu также является коциклом.

Для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при $m = 2$ отсюда в силу первой леммы Уайтхеда следует, что для любого коцикла $u \in Z^2(\mathfrak{g};\ \mathbb{K})$ существует такая коцепь $\xi \in C^0(\mathfrak{g};$

$\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}'$, что $\varphi u = \delta\xi$. Но тогда для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} u(x, y) &= ((\varphi u)(x))(y) = ((\delta\xi)(x))(y) = \\ &= (x\xi)(y) = -(\xi \circ \operatorname{ad} x)(y) = \\ &= -\xi([x, y]) = (\delta\xi)(x, y), \end{aligned}$$

означающее, что $u = \delta\xi$. Следовательно, $H^2(\mathfrak{g}; \mathbb{K}) = 0$.

В силу предложения 2 этим доказано

Следствие 2 (вторая лемма Уайтхеда). *Для любого модуля $\mathscr{V}$ над полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ имеет место равенство*

$$H^2(\mathfrak{g}; \mathscr{V}) = 0. \quad \square$$

При $m = 3$ существуют полупростые алгебры Ли, для которых $H^3(\mathfrak{g}; \mathbb{K}) \neq 0$.

Леммы Уайтхеда, несмотря на их непретенциозное причисление к разряду лемм, имеют очень важное значение, являясь ключом к двум главнейшим теоремам теории алгебр Ли.

Представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *вполне приводимым*, если оно является прямой суммой неприводимых представлений.

Предложение 3 (теорема Вейля). *Любое представление ρ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ вполне приводимо.*

Доказательству этого предложения мы предпошлем несколько простых замечаний из линейной алгебры.

Пусть $\mathscr{V}$ — произвольный линеал и $\mathscr{P}$ — некоторое его подпространство. Рассмотрим произвольное подпространство $\mathscr{Q}$, дополнительное к подпространству $\mathscr{P}$, т. е. такое, что

$$\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}. \tag{8}$$

Если $u \in \mathscr{V}$ и $u = v + w$, где $v \in \mathscr{P}$ и $w \in \mathscr{Q}$, то, положив $Pu = v$, мы, очевидно, получим идемпотентный (т. е. такой, что $P^2 = P$) линейный оператор $P: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, обладающий тем свойством, что $\operatorname{Im} P = \mathscr{P}$. Такого рода операторы называются *проекторами на $\mathscr{P}$*. Мы видим, следо-

вательно, что любое разложение вида (8) определяет некоторый проектор на $\mathscr{P}$.

Обратно, пусть $P: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — произвольный проектор на $\mathscr{P}$, и пусть $\mathscr{Q} = \operatorname{Ker} P$. Для любого вектора $u \in \mathscr{V}$ вектор Pu лежит в $\mathscr{P}$ (ибо $Pu = P(Pu)$), а вектор $u - Pu$ в Q (ибо $P(u - Pu) = Pu - P^2u = 0$). Поскольку $u = Pu + (u - Pu)$, этим доказано, что $\mathscr{V} = \mathscr{P} + \mathscr{Q}$. Но если $u \in \mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$, то, во-первых, $u = Pu$ (так как $u \in \mathscr{P} = \operatorname{Im} P$, то $u = Pv$, где $v \in \mathscr{V}$, и потому $Pu = P(Pv) = Pv = u$) и, во-вторых, $Pu = 0$ (ибо $u \in \mathscr{Q}$), что возможно только при $u = 0$. Следовательно, $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$.

Этим доказана следующая лемма:

Лемма 2. *Подпространства $\mathscr{Q}$, дополнительные к подпространству $\mathscr{P}$, находятся в естественном биективном соответствии с проекторами на $\mathscr{P}$. В этом соответствии каждому проектору P отвечает его ядро* $\operatorname{Ker} P$. □

Если теперь $\mathscr{V}$ является модулем над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, то *подпространства $\mathscr{P} = \operatorname{Im} P$ и $\mathscr{Q} = \operatorname{Ker} P$ тогда и только тогда являются подмодулями, когда оператор P является гомоморфизмом модулей*, т. е. перестановочен со всеми операторами $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, где ρ — представление, определенное модулем $\mathscr{V}$. Действительно, если P является гомоморфизмом и $u \in \mathscr{P}$ (и, значит, $u = Pu$), то $xu = \rho(x)u = \rho(x)Pu = P\rho(x)u \in \mathscr{P}$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Аналогично, если $u \in \mathscr{Q}$, то $P(xu) = \rho(x)P(u) = 0$ и, значит, $xu \in \mathscr{Q}$. Обратно, если $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ — подмодули, то для любых элементов $u \in \mathscr{V}$ и $x \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство $xu = x(Pu + (u - Pu)) = xPu + x(u - Pu)$, где $xPu \in \mathscr{P}$ и $x(u - Pu) \in \mathscr{Q}$, показывающее, что $x(Pu) = P(xu)$. □

Доказательство предложения 3. Очевидное индуктивное рассуждение (использующее конечномерность представления ρ) показывает, что для доказательства предложения 3 достаточно установить, что для любого подмодуля $\mathscr{P}$ произвольного $\mathfrak{g}$-модуля $\mathscr{V}$ имеет место разложение (6), в котором $\mathscr{Q}$ также является подмодулем, т. е. доказать, что *существует проектор P: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ на $\mathscr{P}$, являющийся гомоморфизмом модулей.* С этой целью мы рассмотрим множество $\mathscr{W}$ всех линейных операторов $A: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, для которых $\operatorname{Im} A \subset \mathscr{P} \subset \operatorname{Ker} A$ (и, значит, $A^2 = 0$). Автоматическое вычисление показывает, что $\mathscr{W}$ является подпространством линеала

$\operatorname{End}\mathscr{V}$ и, более того, модулем над $\mathfrak{g}$ относительно действия

$$xA = [\rho(x), A], \qquad x \in \mathfrak{g}, \quad A \in \mathscr{W}.$$

Если теперь P_0 — произвольный проектор на $\mathscr{P}$, то, как легко видеть, $[\rho(x), P_0] \in \mathscr{W}$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ и, значит, формула

$$u(x) = [\rho(x), P_0], \qquad x \in \mathfrak{g},$$

определяет некоторое линейное отображение u: $\mathfrak{g} \to \mathscr{W}$, т. е. коцепь из $C^1(\mathfrak{g}, \mathscr{W})$. Так как в силу тождества Якоби

$$xu(y) - yu(x) - u([x, y]) = [\rho(x), [\rho(y), P_0]] - \\ - [\rho(y), [\rho(x), P_0]] - [\rho[x, y], P_0] = 0,$$

то эта коцепь является коциклом. Поэтому согласно первой лемме Уайтхеда существует такой оператор $A \in W$, что $u(x) = xA$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, т. е. такой, что $[\rho(x), P_0] = [\rho(x), A]$. Для оператора $P = P_0 - A$ последнее соотношение означает, что он перестановочен со всеми операторами вида $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, т. е. является гомоморфизмом модуля $\mathscr{V}$ в себя. При этом $Pv \in \mathscr{V}$ для любого $v \in \mathscr{V}$ и $Pv = P_0 v = v$, если $v \in \mathscr{P}$, так что P является проектором на $\mathscr{P}$. □

Аналогичное использование второй леммы Уайтхеда требует некоторых приготовлений.

Мы будем говорить, что алгебра Ли $\mathfrak{h}$ является *расширением* алгебры Ли $\mathfrak{a}$ посредством алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{a}$ является идеалом в $\mathfrak{h}$, а факторалгебра $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$. Последнее условие означает, что существует эпиморфизм алгебр Ли α: $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, ядром которого служит идеал $\mathfrak{a}$. Мы будем считать этот эпиморфизм раз навсегда выбранным и фиксированным.

Расширение $\mathfrak{h}$ называется *тривиальным*, если в $\mathfrak{h}$ существует подалгебра, которая при эпиморфизме α изоморфно отображается на алгебру $\mathfrak{g}$.

Ясно, что мы всегда можем найти такое линейное отображение

$$\beta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h},$$

что $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ (сечение гомоморфизма α). Тогда алгебра Ли $\mathfrak{h}$ как линейное пространство будет разлагаться в пря-

мую сумму идеала $\mathfrak{a}$ и подпространства $\operatorname{Im}\beta$. Расширение $\mathfrak{h}$ тогда и только тогда тривиально, когда отображение β можно выбрать среди гомоморфизмов алгебр Ли.

Отклонение отображения β от гомоморфизма алгебр измеряет функция $u = u(x, y)$, определенная формулой

$$u(x, y) = [\beta x, \beta y] - \beta[x, y], \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Так как $\alpha u(x, y) = [\alpha\beta x, \alpha\beta y] - \alpha\beta[x, y] = 0$, то функцию u можно считать принимающей значения в идеале $\mathfrak{a}$. Ясно, что эта функция линейна по обоим аргументам и кососимметрична, т. е. является двумерной коцепью алгебры $\mathfrak{g}$, принимающей значения в идеале $\mathfrak{a}$.

Впрочем, последнее заключение мы сделали несколько поспешно, поскольку идеал $\mathfrak{a}$ не является, вообще говоря, $\mathfrak{g}$-модулем, что требуется от области значений коцепей. Чтобы преодолеть эту трудность, мы предположим, что $\mathfrak{a}^2 = 0$, т. е. что *алгебра* $\mathfrak{a}$ *абелева*. Тогда формула

$$xa = [\beta x, a], \qquad x \in \mathfrak{g},\ a \in \mathfrak{a},$$

будет корректно (независимо от выбора сечения β) определять в $\mathfrak{a}$ структуру $\mathfrak{g}$-модуля, и потому мы будем иметь полное право называть функцию u коцепью.

Легко теперь видеть, что *коцепь* $u \in C^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$ *является коциклом*. Действительно, дважды используя тождество Якоби, мы получаем, что

$$\begin{aligned}(\delta u)(x, y, z) = {} & xu(y, z) - yu(x, z) + zu(x, y) - \\ & - u([x, y], z) + u([x, z], y) - u([y, z], x) = \\ & = [\beta x, [\beta y, \beta z] - \beta[y, z]] - [\beta y, [\beta x, \beta z] - \\ & - \beta[x, z]] + [\beta z, [\beta x, \beta y] - \beta[x, y]] - \\ & - [\beta[x, y], \beta z] + \beta[[x, y], z] + [\beta[x, z], \beta y] - \\ & - \beta[[x, z], y] - [\beta[y, z], \beta x] + \beta[[y, z], x] = \\ & = [\beta x, [\beta y, \beta z]] - [\beta y, [\beta x, \beta z]] + [\beta z, [\beta x, \beta y]] + \\ & + \beta([[x, y], z] - [[x, z], y] + [[y, z], x]) = 0\end{aligned}$$

для любых элементов $x, y, z \in \mathfrak{g}$. $\square$

Пусть β' — другое сечение эпиморфизма α. Тогда разность $v = \beta - \beta'$ мы можем рассматривать как линей-

ное отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$, т. е. как коцепь из $C^1(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$. Поскольку

$$(\delta v)(x, y) = xv(y) - yv(x) - v([x, y]) =$$
$$= [\beta x, \beta y - \beta' y] - [\beta' y, \beta x - \beta' x] - \beta[x, y] + \beta'[x, y] =$$
$$= ([\beta x, \beta y] - \beta[x, y]) - ([\beta' x, \beta' y] - \beta'[x, y]),$$

замена β на β' влечет за собой замену u на $u - \delta v$. Следовательно, если $u = \delta v$, то отображение $\beta' = \beta - v$ будет гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. расширение $\mathfrak{h}$ будет тривиально.

Но в силу второй леммы Уайтхеда условие $u = \delta v$ непременно выполнено, если алгебра Ли полупроста. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 4. *Любое расширение $\mathfrak{h}$ абелевой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ посредством полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тривиально.* □

Следствие. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда редуктивна, когда ее центр $\mathfrak{z}$ совпадает с ее радикалом $\mathfrak{r}$:*

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{r}.$$

Доказательство. В лекции 12 уже было доказано, что для редуктивной алгебры $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}$. Обратно, пусть $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}$. Тогда $\mathfrak{g}$ является расширением абелевой алгебры $\mathfrak{z}$ посредством полупростой алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Следовательно, согласно предложению 4 имеет место равенство $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — полупростая подалгебра. Но так как $[\mathfrak{z}, \mathfrak{m}] = 0 \subset \mathfrak{m}$, то подалгебра $\mathfrak{m}$ является идеалом. Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ редуктивна. □