Лекция 21

ФУНКЦИОНАЛ КИЛЛИНГА ИДЕАЛА. — НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ. — РАДИКАЛ И НИЛЬРАДИКАЛ ИДЕАЛА. — ПРОДОЛЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НА УНИВЕРСАЛЬНУЮ ОБЕРТЫВАЮЩУЮ АЛГЕБРУ. — ИДЕАЛЫ КОНЕЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ АЛГЕБРЫ. — РАДИКАЛ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ. — ОБОСНОВАНИЕ ИНДУКТИВНОГО ШАГА ПОСТРОЕНИЯ. — ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ АДО. — ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Вернемся теперь к доказательству теоремы Адо. Для этого у нас, по существу, все готово, за исключением некоторых чисто технических лемм в основном о дифференцированиях и обертывающих алгебрах.

Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть i: $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ — отображение вложения. Для любого элемента $x \in \mathfrak{a}$ линейный оператор $\operatorname{ad} i(x)$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, оставляя $\mathfrak{a}$ инвариантным, будет индуцировать некоторые операторы $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, причем первый из этих операторов будет, очевидно, равен нулю, а второй будет совпадать с $\operatorname{ad} x$: $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$. Поэтому для любых двух элементов $x, y \in \mathfrak{a}$ оператор $\operatorname{ad} i(x) \circ \operatorname{ad} i(y)$ также индуцирует в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ нулевой оператор, а в $\mathfrak{a}$ — оператор $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$. Следовательно, $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} i(x) \circ \operatorname{ad} i(y)) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)$, т. е. $t_{\mathfrak{g}}(i(x), i(y)) = t_{\mathfrak{a}}(x, y)$.

Это означает, что *функционал Киллинга $t_{\mathfrak{a}}$ идеала $\mathfrak{a}$ является ограничением на $\mathfrak{a}$ функционала Киллинга $t_{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$.*

Пусть теперь D: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — произвольное дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Определим в прямой сумме $\mathfrak{g}^* =$

$= \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}$ операцию $[\ ,\ ]$ формулой

$$[(x, \lambda), (y, \mu)] = ([x, y] + \lambda Dy - \mu Dx, 0),$$
$$x, y \in \mathfrak{g}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Ясно, что эта операция билинейна и антикоммутативна. Кроме того, она удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\begin{aligned}
&[[(x, \lambda), (y, \mu)], (z, \nu)] + \\
&\quad + [[(y, \mu), (z, \nu)], (x, \lambda)] + [[(z, \nu), (x, \lambda)], (y, \mu)] = \\
&\qquad = ([[x, y], z] + \lambda [Dy, z] - \mu [Dx, z] - \\
&\qquad\quad - \nu D([x, y] + \lambda Dy - \mu Dx), 0) + \\
&\qquad + ([[y, z], x] + \mu [Dz, x] - \nu [Dy, x] - \\
&\qquad\quad - \lambda D([y, z] + \mu Dz - \nu Dy), 0) + \\
&\qquad + ([[z, x], y] + \nu [Dx, y] - \lambda [Dz, y] - \\
&\qquad\qquad - \mu D([z, x] + \nu Dx - \lambda Dz), 0) = 0.
\end{aligned}$$

Тем самым линеал $\mathfrak{g}^*$ определяется как алгебра Ли. Отождествив каждый элемент $x \in \mathfrak{g}$ с элементом $(x, 0) \in \mathfrak{g}^*$, мы вложим $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$ в качестве идеала. Внутреннее дифференцирование $\operatorname{ad} \xi$, отвечающее элементу $\xi = (0, 1)$, действует на этом идеале по формуле

$$(\operatorname{ad} \xi) x = [(0, 1), (x, 0)] = (Dx, 0) = Dx,$$

т. е. совпадает на $\mathfrak{g}$ с данным дифференцированием D.

С другой стороны, свойство инвариантности функционала Киллинга $t_{\mathfrak{g}^*}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}^*$ применительно к элементам $x, y \in \mathfrak{g}$ и ξ может быть записано в виде

$$t_{\mathfrak{g}^*}((\operatorname{ad} \xi) x, y) + t_{\mathfrak{g}^*}(x, (\operatorname{ad} \xi) y) = 0,$$

откуда ввиду сказанного выше о функционале Киллинга идеала следует, что *функционал Киллинга произвольной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *удовлетворяет соотношению*

$$t_{\mathfrak{g}}(Dx, y) + t_{\mathfrak{g}}(x, Dy) = 0.$$

Это свойство функционала Киллинга называется его *полной инвариантностью.*

Идеал $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *характеристическим*, если $Dx \in \mathfrak{a}$ для любого элемента $x \in \mathfrak{a}$ и любого дифференцирования $D: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Из свойства полной инвариантности функционала Киллинга $t_{\mathfrak{g}}$ следует, что *аннулятор* $\mathfrak{a}^{\perp}$ *по отношению к* $t_{\mathfrak{g}}$ *характеристического идеала* $\mathfrak{a}$ *является характеристическим идеалом.* Действительно, если $x \in \mathfrak{a}^{\perp}$, то $t_{\mathfrak{g}}(Dx, y) = -t_{\mathfrak{g}}(x, Dy) = 0$ для любого дифференцирования D и любого элемента $y \in \mathfrak{a}$ и, значит, $Dx \in \mathfrak{a}^{\perp}$. □

Поскольку идеал $\mathfrak{g}^2$, очевидно, характеристичен, отсюда в силу следствия 1 предложения 3 лекции 14 непосредственно вытекает, что *радикал* $\mathfrak{r}$ *произвольной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является характеристическим идеалом.*

Так как каждое внутреннее дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на каждом ее идеале $\mathfrak{a}$ индуцирует дифференцирование (уже, вообще говоря, не внутреннее) этого идеала, то *любой характеристический идеал* $\mathfrak{b}$ *идеала* $\mathfrak{a}$ *является идеалом всей алгебры* $\mathfrak{g}$.

В частности, идеалом алгебры $\mathfrak{g}$ будет радикал $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ идеала $\mathfrak{a}$. Будучи разрешимым идеалом, этот радикал содержится в радикале $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ и, значит, содержится в пересечении $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}$. С другой стороны, являясь разрешимым идеалом в $\mathfrak{a}$, это пересечение содержится в $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$. Этим доказано, что *радикал* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *произвольного идеала* $\mathfrak{a}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *совпадает с пересечением этого идеала с радикалом* $\mathfrak{r}$ *всей алгебры*:

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}.$$

Рассмотрим опять алгебру Ли $\mathfrak{g}^* \supset \mathfrak{g}$, построенную выше по данному дифференцированию D: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Так как радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ содержится в радикале $\mathfrak{r}^*$ алгебры $\mathfrak{g}^*$, то $D\mathfrak{r} = (\operatorname{ad} \xi)\mathfrak{r} \subset [\mathfrak{g}^*, \mathfrak{r}^*]$ и, значит, $D\mathfrak{r} \subset [\mathfrak{g}^*, \mathfrak{r}^*] \cap \mathfrak{g}$.

Но согласно предложению 4 лекции 16 идеал $[\mathfrak{g}^*, \mathfrak{r}^*]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}^*$, а потому и идеал $[\mathfrak{g}^*, \mathfrak{r}^*] \cap \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентны. Следовательно, идеал $[\mathfrak{g}^*, \mathfrak{r}^*] \cap \mathfrak{g}$ содержится в нильрадикале $\mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и, значит, $D\mathfrak{r} \subset \mathfrak{n}$.

Для удобства ссылок мы сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы:

Лемма 1. *Образ* $D\mathfrak{r}$ *радикала алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *при каждом дифференцировании* D: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *содержится в нильрадикале* $\mathfrak{n}$ *этой алгебры*:

$$D\mathfrak{r} \subset \mathfrak{n}. \quad \square$$

Следствие. *Для любого идеала $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ его нильрадикал $\mathfrak{n}(\mathfrak{a})$ является пересечением $\mathfrak{a}$ с нильрадикалом $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$:*

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Тогда, согласно лемме 1, примененной к алгебре Ли $\mathfrak{a}$, и к ее дифференцированию D, индуцированному внутренним дифференцированием $\operatorname{ad} x$, имеет место включение $[x, \mathfrak{r}(\mathfrak{a})] \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{a})$, а потому и включение $[x, \mathfrak{n}(\mathfrak{a})] \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{a})$. Это означает, что нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}(\mathfrak{a})$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и потому содержится в ее нильрадикале $\mathfrak{n}$. Следовательно, $\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$. Поскольку обратное включение очевидно (пересечение $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$ является нильпотентным идеалом в $\mathfrak{a}$), это доказывает следствие. □

Рассмотрим теперь дифференцирования в связи с универсальной обертывающей алгеброй $\mathcal{U}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. лекцию 5).

Ясно, что каждое дифференцирование D ассоциативной алгебры $\mathcal{U}$ является также дифференцированием соответствующей коммутаторной алгебры Ли $[\mathcal{U}]$. Следовательно, если $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$, то D индуцирует на $\mathfrak{g}$ некоторое дифференцирование D: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Любое ли дифференцирование D: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ может быть так получено, т. е. продолжается ли оно до некоторого дифференцирования D: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ассоциативной алгебры $\mathcal{U}$? Ответ оказывается утвердительным:

Лемма 2. *Любое дифференцирование D алгебры Ли $\mathfrak{g}$ единственным образом продолжается до некоторого дифференцирования (обозначаемого той же буквой D) универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Поскольку каждый элемент алгебры $\mathcal{U}$ является многочленом от элементов из $\mathfrak{g}$, дифференцирование D: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, когда оно существует, определено единственным образом. Однако поскольку элементы из $\mathcal{U}$ могут быть, вообще говоря, многими различными способами выражены через элементы из $\mathfrak{g}$, непосредственное построение дифференцирования D: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ требует достаточно трудоемкой проверки его корректности. Поэтому мы пойдем обходным путем и воспользуемся одним техническим трюком, предложенным Джекобсоном.

Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра 2×2-матриц вида

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix},$$

где $u, v \in \mathscr{U}$. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon x \longmapsto \begin{pmatrix} x & Dx \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру $\mathscr{A}$, где D — данное дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Поскольку

$$\begin{pmatrix} x & Dx \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & Dy \\ 0 & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & Dy \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & Dx \\ 0 & x \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} xy - yx & x \cdot Dy + Dx \cdot y - y \cdot Dx - Dy \cdot x \\ 0 & xy - yx \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} [x, y] & [x, Dy] + [Dx, y] \\ 0 & [x, y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x, y] & D[x, y] \\ 0 & [x, y] \end{pmatrix},$$

отображение φ является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в коммутаторную алгебру Ли $[\mathscr{A}]$. Поэтому в силу свойства универсальности существует такой гомоморфизм $\psi = \mathscr{U}\varphi$ алгебры $\mathscr{U}$ в алгебру $\mathscr{A}$, что $\varphi = \psi \circ \iota$, где $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathscr{U}$ — вложение. Из того, что $\mathscr{U}$ порождается элементами из $\mathfrak{g}$, непосредственно следует, что для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ матрица φu имеет вид

$$\varphi u = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad v \in \mathscr{U}.$$

Мы определим (очевидно, линейное) отображение $D\colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}$, положив $Du = v$.

Так как $\psi(uv) = \psi u \cdot \psi v$ для любых элементов $u, v \in \mathscr{U}$, т. е.

$$\begin{pmatrix} uv & D(uv) \\ 0 & uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & Du \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & Dv \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv & u \cdot Dv + Du \cdot v \\ 0 & uv \end{pmatrix},$$

то отображение $D\colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ является дифференцированием алгебры $\mathscr{U}$. Поскольку оно, очевидно, продолжает данное дифференцирование D алгебры Ли $\mathfrak{g}$, лемма 2 этим полностью доказана. □

В универсальной алгебре $\mathscr{U}$ нас будут интересовать (двусторонние) идеалы $\mathscr{A}$, для которых факторалгебра

$\mathcal{U}/\mathcal{A}$ конечномерна. О таких идеалах мы будем говорить, что они имеют *конечную коразмерность*, и будем писать $\operatorname{codim} \mathcal{A} < \infty$.

Напомним, что элемент a ассоциативной алгебры называется *алгебраическим*, если существует такой отличный от нуля многочлен $p(T)$, что $p(a) = 0$.

Напомним также (см. лекцию 5), что для любого базиса $x_1, \ldots, x_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (которую мы здесь предполагаем конечномерной) одночлены вида $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_s$, т. е. вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0$, составляют базис универсальной алгебры $\mathcal{U}$. Отсюда легко вытекает, что $\operatorname{codim} \mathcal{A} < \infty$ *тогда и только тогда, когда смежные классы* $\bar{x}_1 = x_1 + \mathcal{A}, \ldots, \bar{x}_n = x_n + \mathcal{A}$ *алгебраичны в* $\mathcal{U}/\mathcal{A}$. Действительно, условие алгебраичности элемента $\bar{x}_i$ означает, что для некоторого $m_i \geqslant 1$ элемент $\bar{x}_i^{m_i}$ является линейной комбинацией элементов $1, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_i^{m_i - 1}$. Поэтому, если все элементы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ алгебраичны, то любой одночлен вида $\bar{x}_1^{k_1} \ldots \bar{x}_n^{k_n}$ (и, значит, любой элемент факторалгебры $\mathcal{U}/\mathcal{A}$) является линейной комбинацией одночленов, для которых $0 \leqslant k_i < m_i$ при любом $i = 1, \ldots, n$. Поскольку одночленов, удовлетворяющих последнему условию, конечное число, этим доказано, что факторалгебра $\mathcal{U}/\mathcal{A}$ конечномерна и, значит, $\operatorname{codim} \mathcal{A} < \infty$. Обратное утверждение очевидно, поскольку в конечномерной алгебре любой элемент алгебраичен. □

Заметим, что условие алгебраичности элемента $\bar{x}_i$ означает, что существует такой отличный от нуля многочлен $p_i(T)$, что $p_i(x_i) \in \mathcal{A}$.

Напомним, что *произведением* $\mathcal{A}\mathcal{B}$ двух идеалов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ассоциативной алгебры называется линейная оболочка всевозможных элементов вида ab, где $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{B}$. Это произведение, очевидно, является идеалом.

Лемма 3. Произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$ любых двух идеалов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ конечной коразмерности также является идеалом конечной коразмерности.

Доказательство. Если $p_i(T)$ и $q_i(T)$ — такие многочлены, что $p_i(x_i) \in \mathcal{A}$ и $q_i(x_i) \in \mathcal{A}$, то многочлены $r_i(T) = p_i(T) q_i(T)$ обладают тем свойством, что $r_i(x_i) \in \mathcal{A}$. □

Нам понадобятся также простейшие сведения о нильпотентных идеалах в ассоциативных алгебрах.

В соответствии с общей терминологией теории алгебр идеал $\mathscr{A}$ ассоциативной алгебры $\mathscr{V}$ называется *нильпотентным*, если существует такое $k \geqslant 0$, что произведение любых k его элементов равно нулю, т. е., другими словами, если его k-я степень $\mathscr{A}^k$ является нулевым идеалом. Очевидно, что сумма любых двух нильпотентных идеалов является нильпотентным идеалом, откуда следует, что в любой конечномерной ассоциативной алгебре $\mathscr{V}$ существует максимальный нильпотентный идеал $\mathscr{R}$, содержащий любой другой нильпотентный идеал. Этот идеал называется *радикалом* ассоциативной алгебры $\mathscr{R}$.

Идеал $\mathscr{A}$ алгебры $\mathscr{V}$ называется *нильидеалом*, если он состоит из нильпотентных элементов. Ясно, что любой нильпотентный идеал является нильидеалом. Оказывается, что и, обратно, *любой нильидеал $\mathscr{A}$ конечномерной ассоциативной алгебры $\mathscr{V}$ нильпотентен* (и потому лежит в ее радикале $\mathscr{R}$). Действительно, поскольку идеал $\mathscr{A}$ (или, точнее, его коммутаторная алгебра $[\mathscr{A}]$) является подалгеброй коммутаторной алгебры Ли $[\mathscr{V}]$, к нему применимо предложение 3 лекции 17. □

Сумма $a + b$ двух нильпотентных элементов, вообще говоря, не будет нильпотентным элементом. Иначе дело обстоит, если один из них лежит в радикале.

Лемма 4. Если $a \in \mathscr{R}$, то для любого нильпотентного элемента b сумма $a + b$ нильпотентна.

Доказательство. Воспользуемся предложением 3[a] из лекции 17 (заметим, что до сих пор нам было достаточно предложения 3), принимая за $\mathscr{Q}$ линейное подпространство алгебры $\mathscr{V}$, порожденное радикалом $\mathscr{R}$ и элементом b, а за $\mathfrak{g}$ — объединение $\mathscr{R}$ и b (поскольку $[\mathscr{R}, b] \subset \mathscr{R}$, множество $\mathfrak{g}$ замкнуто относительно коммутирования). Согласно этому предложению подпространство $\mathscr{Q}$ ассоциативно нильпотентно. Поэтому, в частности, его элемент $a + b$ нильпотентен. □

В следующей лемме ссылки на предложение 3[a] лекции 17 уже недостаточно и приходится частично возвращаться к его доказательству.

Лемма 5. Предположим, что конечномерная ассоциативная алгебра $\mathscr{V}$ порождена подалгеброй $\mathfrak{h}$ ее коммутаторной алгебры Ли $[\mathscr{V}]$. Тогда каждый идеал $\mathfrak{n}$ алгебры

$\mathfrak{h}$, состоящий из нильпотентных элементов алгебры $\mathcal{V}$, лежит в радикале $\mathcal{R}$ алгебры $\mathcal{V}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что идеал $\mathcal{N}$ алгебры $\mathcal{V}$, порожденный идеалом $\mathfrak{n}$, нильпотентен. Так как $\mathfrak{h}$ порождает $\mathcal{V}$, то любой элемент из $\mathcal{N}$ является линейной комбинацией произведений элементов из идеала $\mathfrak{n}$ и из алгебры $\mathfrak{h}$. Назовем *рангом* каждого такого произведения число множителей из $\mathfrak{n}$. Если произведение содержит множитель вида ax, где $a \in \mathfrak{n}$ и $x \in \mathfrak{g}$, то, пользуясь формулой $ax = [a, x] + xa$, мы можем представить его в виде суммы двух произведений того же ранга, в которых число множителей из $\mathfrak{g}$ либо на единицу меньше, либо один из этих множителей сдвинулся влево. Поэтому любое произведение ранга r мы можем представить в виде суммы произведений, имеющих вид ab, где a — произведение элементов из $\mathfrak{g}$ (возможно, пустое), а b — произведение r элементов из $\mathfrak{n}$. Но, согласно предложению 3 лекции 16, нильподалгебра Ли $\mathfrak{n}$ ассоциативно нильпотентна, т. е. существует такое число n, что любое произведение $r \geqslant n$ элементов из $\mathfrak{n}$ равно нулю. Поэтому любой элемент идеала $\mathcal{N}$, являющийся линейной комбинацией произведений ранга $\geqslant n$, равен нулю. Поскольку каждый элемент идеала $\mathcal{N}^n \subset \mathcal{N}$, по определению, обладает этим свойством, тем самым доказано, что $\mathcal{N}^n = 0$, т. е. что идеал $\mathcal{N}$ нильпотентен. □

Теперь мы уже можем непосредственно приступить к доказательству теоремы Адо. Это доказательство основывается на индуктивной конструкции, возможность которой обеспечивается следующей леммой:

Лемма 6. *Пусть*

$\mathfrak{s}$ — конечномерная разрешимая алгебра Ли;

$\mathfrak{n}$ — ее нильрадикал;

$\mathcal{U}$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{s}$;

$\mathcal{A}$ — такой идеал конечной коразмерности алгебры $\mathcal{U}$, что для любого элемента $x \in \mathfrak{n}$ смежный класс $x + \mathcal{A}$ является нильпотентным элементом факторалгебры $\mathcal{U}/\mathcal{A}$.

Тогда в алгебре $\mathcal{U}$ существует такой идеал $\mathcal{B}$, что:

а) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$;

б) $\operatorname{codim} \mathcal{B} < \infty$;

в) *для любого элемента* $x \in \mathfrak{n}$ *смежный класс* $x + \mathcal{B}$ *является нильпотентным элементом факторалгебры* $\mathcal{U}/\mathcal{B}$;

г) *каждое дифференцирование* D *алгебры* $\mathcal{U}$, *переводящее в себя алгебру Ли* $\mathfrak{s}$, *переводит в себя идеал* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Поскольку любой гомоморфизм ассоциативных алгебр является также и гомоморфизмом соответствующих коммутаторных алгебр, образ

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{s} + \mathcal{A})/\mathcal{A}$$

алгебры Ли $\mathfrak{s}$ в алгебре $\mathcal{V} = \mathcal{U}/\mathcal{A}$ является подалгеброй коммутаторной алгебры Ли $[\mathcal{V}]$, порождающей алгебру $\mathcal{V}$. Поэтому, так как по условию образ $(\mathfrak{n} + \mathcal{A})/\mathcal{A}$ идеала $\mathfrak{n}$ в алгебре $\mathcal{V}$ состоит из нильпотентных элементов, то, согласно лемме 4, этот образ лежит в радикале $\mathcal{R}$ алгебры $\mathcal{V}$. Значит, в $\mathcal{R}$ лежит и идеал алгебры $\mathcal{V}$, порожденный этим образом. Следовательно, этот идеал нильпотентен. Поскольку последний идеал имеет вид $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, где $\mathcal{C}$ — идеал в $\mathcal{U}$, порожденный $\mathfrak{n}$ и $\mathcal{A}$, этим доказано, что существует такое число r, что идеал $\mathcal{B} = \mathcal{C}^r$ лежит в $\mathcal{A}$, т. е. обладает свойством а). В силу леммы 3 идеал $\mathcal{B}$ обладает и свойством б). Поскольку для любого $x \in \mathfrak{n}$ существует по условию такое число $s \geqslant 0$, что $x^s \in \mathcal{A} \subset \subset \mathcal{C}$, то $x^{sr} \in \mathcal{C}^r = \mathcal{B}$ и, значит, элемент $x + \mathcal{B}$ факторалгебры $\mathcal{U}/\mathcal{B}$ нильпотентен. Таким образом, идеал $\mathcal{B}$ обладает и свойством в).

Наконец, в силу леммы 1 каждое дифференцирование B разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{s}$ обладает тем свойством, что $D\mathfrak{s} \subset \mathfrak{n}$. Поэтому, если дифференцирование D алгебры $\mathcal{U}$ переводит $\mathfrak{s}$ в $\mathfrak{s}$, то на самом деле оно переводит $\mathfrak{s}$ в $\mathfrak{n}$ и, значит, всю алгебру $\mathcal{U}$ в ее идеал, порожденный $\mathfrak{n}$. Следовательно, тем более $D\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$, а потому $D(\mathcal{U}^r) \subset \mathcal{C}^r = = \mathcal{B}$. Но тогда $D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{C}^r) \subset D(\mathcal{U}^r) \subset \mathcal{B}$, что доказывает свойство г). □

Назовем представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *нильпредставлением*, если для любого элемента $x \in \mathfrak{n}$ нильрадикала $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{g}$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен.

Предложение 2 (индуктивный шаг построения). *Пусть алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *разложена в прямую сумму*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$$

разрешимого идеала $\mathfrak{s}$ *и подалгебры* $\mathfrak{h}$. *Тогда для любого конечномерного нильпредставления* σ *алгебры* $\mathfrak{s}$ *сущест-*

вует такое представление ρ *алгебры* $\mathfrak{g}$, *что*

$$\mathfrak{s} \cap \operatorname{Ker} \rho \subset \operatorname{Ker} \sigma.$$

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *нильпотентна или, напротив, если ее нильрадикал совпадает с нильрадикалом алгебры* $\mathfrak{s}$, *то представление* ρ *можно выбрать среди нильпредставлений.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x = y + z$, $y \in \mathfrak{s}$, $z \in \mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Его компонента y определяет по формуле $L_y\colon a \mapsto ya$, $a \in \mathcal{U}$, левый сдвиг $L_y\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}$ алгебры Ли $\mathfrak{s}$, а компонента z — дифференцирование D_z этой алгебры, являющееся по определению продолжением дифференцирования $\operatorname{ad} z$ алгебры Ли $\mathfrak{s}$. Мы определим отображение $\bar{\rho}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру $\operatorname{End} \mathcal{U}$ линейных операторов $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ формулой

$$\bar{\rho}(x) = L_y + D_z.$$

Пусть $x_1 = y_1 + z_1$ — другой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как

$$\begin{aligned}[x, x_1] &= [y, y_1] + [y, z_1] + [z, y_1] + [z, z_1] = \\ &= ([y, y_1] - D_{z_1} y + D_z x_1) + [z, z_1],\end{aligned}$$

то

$$\bar{\rho}([x, x_1]) = L_{[y, y_1]} - L_{D_{z_1} y} + L_{D_z x_1} + D_{[z, z_1]}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}[\bar{\rho}(x), \bar{\rho}(x_1)] &= [L_y + D_z, L_{y_1} + D_{z_1}] = \\ &= [L_y, L_{y_1}] + [D_z, L_{y_1}] + [L_y, D_{z_1}] + [D_z, D_{z_1}].\end{aligned}$$

При этом

$$[L_y, L_{y_1}] = L_y L_{y_1} - L_{y_1} L_y = L_{yy_1} - L_{y_1 y} = L_{[y, y_1]}.$$

Поскольку же на $\mathfrak{s}$ дифференцирование $D_{[z_1, z_2]}$ совпадает с дифференцированием $\operatorname{ad}[z, z_1] = [\operatorname{ad} z, \operatorname{ad} z_1]$, а дифференцирования D_z и D_{z_1} — с дифференцированиями $\operatorname{ad} z$ и $\operatorname{ad} z_1$, то

$$[D_z, D_{z_1}] = D_{[z_1, z_2]}$$

на $\mathfrak{s}$, а потому и всюду на $\mathcal{U}$.

Кроме того, так как для любого элемента $a \in \mathcal{U}$, имеет место равенство

$$[D_z, L_{y_1}]a = D_z L_{y_1} a - L_{y_1} D_z a = \\ = D_z(y_1 a) - y_1 D_z a = D_z y_1 \cdot a,$$

то

$$[D_z, L_{y_1}] = L_{D_z y_1}.$$

Аналогично,

$$[D_{z_1}, L_y] = L_{D_{z_1} y}.$$

Это доказывает, что

$$\bar{\rho}([x, x_1]) = [\bar{\rho}(x), \bar{\rho}(x_1)],$$

т. е. что $\bar{\rho}$ является гомоморфизмом («бесконечномерным представлением») алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в коммутаторную алгебру Ли линейных операторов $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Заметим, что этот гомоморфизм определяется исключительно разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ и не зависит от данного представления σ.

Введем теперь в рассмотрение представление σ. Пользуясь универсальностью алгебры $\mathcal{U}$, мы можем распространить это представление до некоторого гомоморфизма (который мы обозначим тем же символом σ) алгебры $\mathcal{U}$ в алгебру операторов, действующих в пространстве представления σ. Поскольку последняя алгебра конечномерна, ядро $\mathcal{A}$ этого гомоморфизма имеет конечную коразмерность. Так как условие, что представление σ является нильпредставлением, в точности равносильно тому, что для любого элемента x нильрадикала $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{s}$ смежный класс $x + \mathcal{A}$ является нильпотентным элементом алгебры $\mathcal{U}/\mathcal{A}$ (изоморфной линейной алгебре $\sigma(\mathcal{U})$), мы видим, таким образом, что к алгебре $\mathfrak{s}$ и идеалу $\mathcal{A}$ применима лемма 6. Поэтому в алгебре $\mathcal{U}$ существует идеал $\mathcal{B}$, обладающий свойствами а)—г) из формулировки этой леммы.

Так как $\mathcal{B}$ — идеал, то $L_y(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ для любого элемента $y \in \mathfrak{s}$, а так как $\mathcal{B}$ обладает свойством г), то $D_z(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ для любого элемента $z \in \mathfrak{h}$. Поэтому $\bar{\rho}(x)(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$ и, следовательно, формула

$$\rho(x)(u + \mathcal{B}) = \bar{\rho}(x)u + \mathcal{B}, \qquad u \in \mathcal{U},$$

корректно определяет некоторый линейный оператор

$$\rho(x)\colon \mathcal{U}/\mathcal{B} \to \mathcal{U}/\mathcal{B}.$$

Поскольку отображение $\bar{\rho}\colon x \longmapsto \bar{\rho}(x)$ является гомоморфизмом алгебр Ли, отображение $\rho\colon x \longmapsto \rho(x)$ также будет гомоморфизмом и, значит, представлением (ибо по свойству б) факторалгебра $\mathcal{U}/\mathcal{B}$ конечномерна).

Если элемент x принадлежит алгебре $\mathfrak{s}$, то $\rho(x) = L_{\bar{x}}$, где $\bar{x} = x + \mathcal{B}$. Поэтому, если $\rho(x) = 0$, то $L_x(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}$ и, значит, $x \in \mathcal{B}$ (напомним, что $\mathcal{U}$ является унитальной алгеброй). Следовательно, $x \in \mathcal{A}$ (свойство а)) и потому $\sigma(x) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{s} \cap \operatorname{Ker} \rho \subset \operatorname{Ker} \sigma$.

Применим теперь лемму 5 к ассоциативной алгебре $\mathcal{U}/\mathcal{B}$, алгебре Ли $(\mathfrak{s} + \mathcal{B})/\mathcal{B}$ и ее идеалу $(\mathfrak{n} + \mathcal{B})/\mathcal{B}$. Это возможно, поскольку в силу свойств б) и в) условия леммы 5 выполнены. Таким образом, согласно этой лемме, каждый элемент $\bar{x} = x + \mathcal{B}$, $x \in \mathfrak{n}$, лежит в радикале ассоциативной алгебры $\mathcal{U}/\mathcal{B}$ и потому нильпотентен. Поэтому линейный оператор $L_{\bar{x}}\colon \bar{a} \longmapsto \bar{x}\bar{a}$ также нильпотентен. Поскольку $\rho(x) = L_{\bar{x}}$, этим доказано, что в случае, когда нильрадикал алгебры $\mathfrak{g}$ совпадает с нильрадикалом $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{s}$, представление ρ является нильпредставлением.

Осталось рассмотреть случай, когда вся алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна (и потому, в частности, $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}$). Мы должны показать, что в этом случае для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен.

Пусть, как и выше, $x = y + z$, где $y \in \mathfrak{s}$, $z \in \mathfrak{h}$. Так как в рассматриваемом случае $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}$, то по доказанному выше оператор $\rho(y)$ нильпотентен. Более того, можно высказать и более точное утверждение, применив все ту же лемму 5 к линейной ассоциативной алгебре $\mathcal{V}$, порожденной операторами $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{g}$. Эта алгебра конечномерна, порождена алгеброй Ли $\rho(\mathfrak{g})$ и идеал $\rho(\mathfrak{n})$ алгебры Ли $\rho(\mathfrak{g})$ состоит, как только что было сказано, из нильпотентных элементов. Поэтому, согласно лемме 5, все операторы $\rho(y)$, $y \in \mathfrak{n}$, лежат в радикале $\mathcal{R}$ алгебры $\mathcal{V}$.

С другой стороны, поскольку алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, любой оператор вида $\operatorname{ad} z$, $z \in \mathfrak{h}$, нильпотентен. Это означает, что каждое дифференцирование $D_z\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, ограниченное на $\mathfrak{s}$, нильпотентно. Поскольку для любого дифференцирования D, любого числа N и любых двух

элементов a и b имеет место равенство

$$D^N(ab) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} D^i a \cdot D^N$$

то из $D^n a = 0$ и $D^m b = 0$ следует, что $D^{n+m-1}(ab) = 0$. Поэтому для любого произведения $a \in \mathcal{U}$ элементов из $\mathfrak{s}$ существует такое $n(a)$, что $D_z^{n(a)}(a) = 0$. Переходя к факторалгебре $\mathcal{U}/\mathcal{B}$, мы получаем, что $\rho(z)^{n(a)}(\bar{a}) = 0$, где $\bar{a} = a + \mathcal{B}$. Поскольку алгебра $\mathcal{U}/\mathcal{B}$ конечномерна и обладает базисом $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$, состоящим из элементов вида $\bar{a}$, отсюда следует, что существует такое n, что $\rho(z)^n(\bar{a}_i) = 0$ для всех элементов $\bar{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, этого базиса. Но тогда $\rho(z)^n = 0$ на $\mathcal{U}/\mathcal{B}$, т. е. оператор $\rho(z)$ нильпотентен.

Поскольку $\rho(x) = \rho(y) + \rho(z)$, для завершения доказательства предложения 2 осталось применить лемму 4. □

Теперь мы, наконец, можем доказать теорему Адо и даже в несколько более сильной формулировке:

Предложение 3 (теорема Адо). *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует ее точное нильпредставление.*

Доказательство. Мы проведем построение этого представления постепенно шаг за шагом.

Шаг 1. Пусть $\mathfrak{z}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $x_1, \ldots, x_m$ — его произвольный базис. Выбрав в некотором линейном пространстве $\mathcal{V}$ (размерности $\geqslant m+1$) нильпотентный оператор A, для которого $A^{m+1} = 0$, но $A^m \neq 0$, положим

$$\rho_{\mathfrak{z}}(x) = \lambda_1 A + \ldots + \lambda_k A^k + \ldots + \lambda_m A^m$$

для любого элемента $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \ldots + \lambda_m x_m$ центра $\mathfrak{z}$. Поскольку все операторы вида $\lambda_1 A + \ldots + \lambda_m A^m$ перестановочны и нильпотентны, а при $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ отличны от нуля, отображение $\rho_{\mathfrak{z}}$ является точным нильпредставлением алгебры $\mathfrak{z}$.

Шаг 2. Пусть $\mathfrak{n}$ — нильрадикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда факторалгебра $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ также нильпотентна и потому об-

ладает (предложение 2 лекции 17) такой цепочкой идеалов:

$$0 = \mathfrak{n}'_0 \subset \mathfrak{n}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{n}'_m = \mathfrak{n}',$$

что $\dim \mathfrak{n}'_i = i$ для любого $i = 0, 1, \ldots, m = \dim \mathfrak{n}'$ (в предложении 2 лекции 17 нумерация была обратной, что, конечно, не имеет значения). Прообразы этих идеалов в $\mathfrak{n}$ дадут нам возрастающую цепочку идеалов

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{n}_m = \mathfrak{n},$$

начинающуюся с центра $\mathfrak{z}$ и такую, что $\dim \mathfrak{n}_{i+1} = \dim \mathfrak{n}_i + 1$. Покажем по индукции, что для любого $i = 0, 1, \ldots, m$ существует нильпредставление ρ_i идеала $\mathfrak{n}_i$, точное на идеале $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{z}$.

Начало индукции обеспечено шагом 1 доказательства ($\rho_0 = \rho_3$). Пусть для некоторого i точное на $\mathfrak{z}$ нильпредставление ρ_i уже построено. Выбрав в $\mathfrak{n}_{i+1}$ произвольное подпространство $\mathfrak{h}$, дополнительное к $\mathfrak{n}_i$, и заметив, что, в силу одномерности это подпространство автоматически является алгеброй Ли, мы окажемся в условиях предложения 2 (с $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}_i$ и $\sigma = \rho_i$). Поскольку идеал $\mathfrak{n}_{i+1}$ нильпотентен, то в силу этого предложения существует нильпредставление ρ_{i+1} идеала $\mathfrak{n}_{i+1}$, для которого $\mathfrak{n}_i \cap \operatorname{Ker} \rho_{i+1} \subset \operatorname{Ker} \rho_i$ и которое поэтому по-прежнему точно на $\mathfrak{z}$.

При $i = m$ мы получаем, таким образом, нильпредставление $\rho_{\mathfrak{n}} = \rho_m$ идеала $\mathfrak{n}$, точное на центре $\mathfrak{z}$.

Шаг 3. Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрев разрешимую алгебру $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ и воспользовавшись предложением 1 лекции 16, мы той же конструкцией, что и на шаге 2, получим в радикале $\mathfrak{r}$ такую цепочку подалгебр

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_0 \subset \mathfrak{r}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{r}_m = \mathfrak{r},$$

начинающуюся с $\mathfrak{n}$, что для любого $i = 0, 1, \ldots, m$ подалгебра $\mathfrak{r}_i$ является идеалом подалгебры $\mathfrak{r}_{i+1}$. Здесь мы снова можем применить тот же индуктивный процесс, начиная с представления $\rho_{\mathfrak{n}}$ нильрадикала $\mathfrak{n}$, построенного на шаге 2. Возможность повторных применений предложения 2 обеспечивается теперь уже тем, что нильрадикалом каждой из алгебр $\mathfrak{r}_i$ является в силу следствия из леммы 1 один и тот же идеал $\mathfrak{n}$.

В результате получаем некоторое нильпредставление $\rho_{\mathfrak{r}}$ радикала $\mathfrak{r}$, точное на центре $\mathfrak{z}$.

Шаг 4. На этом шаге мы применяем то же предложение 2 к разложению Леви

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{m}$$

алгебры $\mathfrak{g}$ и к нильпредставлению $\rho_{\mathfrak{r}}$. Поскольку $\mathfrak{n}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{n}$, мы получаем нильпредставление $\rho_{\mathfrak{g}}$ всей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, точное на ее центре $\mathfrak{z}$.

Шаг 5. Рассмотрим теперь присоединенное представление ad и его прямую сумму

$$\rho = \mathrm{ad} \oplus \rho_{\mathfrak{g}}$$

с представлением $\rho_{\mathfrak{g}}$. Так как $\operatorname{Ker} \mathrm{ad} = \mathfrak{z}$, а $\mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} \rho_{\mathfrak{g}} = 0$, то $\operatorname{Ker} \rho = 0$, т. е. представление ρ точное. Поскольку представление ad, очевидно, является нильпредставлением, а прямая сумма двух нильпредставлений будет, конечно, нильпредставлением, тем самым предложение 3 полностью доказано. □

Только теперь мы можем считать доказанной теорему Картана из лекции 10 об эквивалентности категорий односвязных групп Ли и вещественных алгебр Ли! Понятно, почему в лекции 10 ситуация с доказательством этой теоремы была охарактеризована как «малоудовлетворительная» (второе из известных доказательств теоремы Картана ничуть не проще изложенного, поскольку оно хотя и не использует теорему Адо, но также опирается на теорему Леви). Поиск прямого доказательства теоремы Картана представляется поэтому весьма многообещающей задачей.