ЛЕКЦИЯ 1

Связность на многообразии. — Ковариантное дифференцирование и параллельный перенос вдоль кривой. — Геодезические. — Экспоненциальное отображение и нормальные окрестности. — Теорема Уайтхеда.

Связность на многообразии

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное гладкое многообразие размерности $n > 0$, и пусть $\tau_{\mathcal{X}} = (\mathsf{T}\mathcal{X}, \pi, \mathcal{X})$ — его касательное расслоение.

Как мы знаем (см. лекцию IV.6), каждая карта $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$ определяет карту $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}h)$ многообразия $\mathsf{T}\mathcal{X}$, для которой $\mathsf{T}U = \pi^{-1}U$. Координатами вектора $A \in \mathsf{T}U$ в этой карте являются координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки $p = \pi A$ в карте (U, h) и координаты этого вектора в базисе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

линеала $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$. Последние координаты мы будем обозначать символами $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$ и в соответствии с этим точку $(\mathsf{T}h)(A) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ — символом

$$(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = (\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}),$$

где $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$.

Подчеркнем, что вектор $\boldsymbol{x}$ (пробегающий открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$), вообще говоря, никак не связан с вектором $\dot{\boldsymbol{x}}$ (пробегающим все пространство $\mathbb{R}^n$).

Диффеоморфизм $\mathsf{T}h$ определяет тривиализацию расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ над U, являющуюся, как базис $\mathsf{F}U$-модуля $\Gamma(\tau_{\mathcal{X}}|_U) = \mathfrak{a}U$ всех векторных полей*) на U, не чем иным, как координатным базисом

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{1}$$

этого модуля, отвечающим локальным координатам $x^1, \ldots, x^n$.

---

*) Напомним (см. III, с. 270), что для любого $\mathcal{X}$ символ $\mathsf{F}\mathcal{X}$ обозначает алгебру всех гладких функций на $\mathcal{X}$ (см. III, с. 260), а символ $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ обозначает $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуль (алгебру Ли) всех векторных полей на $\mathcal{X}$.

Базисы модуля $\mathfrak{a}\,U$ вида (1) называются также *голономными базисами* (или *голономными тривиализациями*). Как правило, мы всегда будем пользоваться лишь ими.

Если $(U,h) = (U,x^1,\dots,x^n)$ и $(U',h') = (U',x^{1'},\dots$ $\dots,x^{n'})$ — две карты в $\mathcal{X}$ и $x^{i'} = x^{i'}(\boldsymbol{x})$, $1 \leqslant i' \leqslant n$, — соответствующие функции перехода, то на $\mathsf{T}U \cap \mathsf{T}U' = \mathsf{T}(U \cap U')$ функции перехода карт $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}h)$ и $(\mathsf{T}U', \mathsf{T}h')$ имеют вид

$$x^{i'} = x^{i'}(\boldsymbol{x}),$$
$$\dot{x}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i,$$

где $1 \leqslant i' \leqslant n$ (с точностью до обозначений — это формулы (3) и (4) лекции III.15).

В частности, это означает, что матрицей перехода $\|\varphi_i^{i'}\|$ между соответствующими тривналнзациями расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ является якобнева матрица

$$\frac{\partial h'}{\partial h} = \left\|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right\|.$$

В Семестре IV было введено и подробно изучено понятие *связности* на произвольном векторном расслоении. В частном случае векторного расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ (сечения которого являются не чем иным, как векторными полями на $\mathcal{X}$) каждая связность ∇ на $\tau_{\mathcal{X}}$ представляет собой — в одной из многих равносильных интерпретаций — отображение $X \mapsto \nabla_X$, сопоставляющее каждому векторному полю $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ оператор *ковариантного дифференцирования по* X

$$\nabla_X\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X},$$

обладающий следующими свойствами (см. предложение 2 лекции IV.11).

а. Оператор ∇_X линеен над $\mathbb{R}$.

б. Для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$ и любого векторного поля $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место формула Лейбница

$$\nabla_X(fY) = Xf \cdot Y + f\nabla_X Y.$$

в. Операция ∇_X линейно над $\mathsf{F}\mathcal{X}$ зависнт от X, т. е.

$$\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y,$$
$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$.

***Определение* 1.** Связность ∇ на расслоении $\tau_{\mathcal{X}}$ называется *связностью на многообразии* $\mathcal{X}$.

По традиции связности на многообразиях называются также *аффинными связностями.* (Правда в последнее время эти связности предпочитают называть *линейными связностями,* сохраняя термин «аффинная связность» для ассоциированной связности с аффинной структурной группой.) В соответствии с этим многообразие $\mathcal{X}$ с заданной на нем связностью называется *пространством аффинной связности.*

Заметим, что согласно следствию 1 предложения 2 лекции IV.18 *на любом паракомпактном хаусдорфовом многообразии $\mathcal{X}$ существует хотя бы одна аффинная связность.*

В дальнейшем все рассматриваемые пространства аффинной связности мы будем предполагать хаусдорфовыми и паракомпактными.

В каждой тривиализации векторного расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ аффинная связность задается (см. лекцию IV.10) n^3 функциями Γ^i_{kj}, $i,j,k = 1,\dots,n$, называемымн *коэффициентами* этой связности. В голономной тривиализации (1) они выражаются формулами

$$\Gamma^i_{kj} = \left(\nabla_k \frac{\partial}{\partial x^j}\right)^i, \qquad i,j,k = 1,\dots,n, \tag{2}$$

где $\nabla_k = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}$ — оператор ковариантного частного дифференцирования по координате x^k, $k = 1,\dots,n$. В двух различных тривиализациях эти коэффициенты связаны формулой (см. формулу (17) лекции IV.10):

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{kj} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}, \tag{3}$$

имеющей в матричной записи вид

$$\omega' = \frac{\partial h'}{\partial h}\,\omega\,\frac{\partial h}{\partial h'} + \frac{\partial h'}{\partial h}\,d\,\frac{\partial h}{\partial h'}, \tag{3'}$$

где, как всегда, $\omega = \|\omega^i_j\|$ — матрица *форм связности* $\omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\,dx^k$ (см. формулу (17″) лекции IV.10).

Конечно, формулы преобразования (3) имеют место только для коэффициентов Γ^i_{kj} вида (2), т. е. вычисленных в голономных тривиализациях.

Компоненты $(\nabla_Y X)^i$ ковариантных производных выражаются с помощью коэффициентов Γ^i_{kj} по формуле

$$(\nabla_Y X)^i = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} X^j\right) Y^k, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Ковариантное дифференцирование и параллельный перенос вдоль кривой

Для каждой кривой $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ произвольный ее подъем в $\mathsf{T}\mathcal{X}$ является не чем иным, как векторным полем

$$X\colon t \mapsto X(t) \in \mathsf{T}_{\gamma(t)}\mathcal{X}, \qquad t \in I,$$

на кривой γ, и операция $\frac{\nabla}{dt}$ *ковариантного дифференцирования вдоль кривой* (см. лекцию IV.11) сопоставляет каждому такому полю поле $\frac{\nabla X}{dt}$ с компонентами

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}\right)^i(t) = \frac{dX^i(t)}{dt} + \Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))X^j(t)\dot{x}^k(t),$$

где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой γ, а $X^i(t)$ — компоненты поля X в данной системе локальных координат.

Поле X на кривой γ называется *ковариантно постоянным* (или состоящим из *параллельных векторов*), если $\frac{\nabla X}{dt} = 0$ (т. е. если, рассматриваемое как подъем кривой γ, оно горизонтально). Для любой точки $t_0 \in I$ и любого вектора $A \in \mathsf{T}_{\gamma(t_0)}\mathcal{X}$ на кривой γ существует единственное ковариантно постоянное поле X, для которого $X(t_0) = A$. О векторах $X(t)$, составляющих это поле, говорят, что они *параллельны вектору A вдоль кривой* γ, а отображение

$$\Pi_\gamma\colon \mathsf{T}_{\gamma(t_0)}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{\gamma(t)}\mathcal{X},$$

определенное формулой

$$\Pi_\gamma\colon A \mapsto X(t),$$

называется *параллельным переносом вдоль* γ.

Задача 1. Покажите, что для любого $t \in I$

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\Pi^t_{t+h}X(t+h) - X(t)}{h},$$

где через Π^t_{t+h} обозначен оператор параллельного переноса $\Pi_\gamma \colon \mathsf{T}_{\gamma(t+h)}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{\gamma(t)}\mathcal{X}$.

Геодезические

Примером векторного поля на γ является поле $\dot\gamma$, состоящее из касательных векторов $\dot\gamma(t)$. Это поле называется *касательным полем* на γ (или *естественным подъемом* кривой γ в $\mathsf{T}\mathcal{X}$).

Определение 2. Кривая $\gamma \colon I \to \mathcal{X}$ в пространстве аффинной связности $\mathcal{X}$ называется *геодезической*, если ее касательное поле состоит из параллельных векторов (ковариантно постоянно), т. е. если ее естественный подъем горизонтален.

Наглядно свойство кривой γ быть геодезической состоит в том, что при движении вдоль кривой касательные векторы $\dot\gamma(t)$ переносятся параллельно, т. е. что кривая не искривляется. В этом смысле геодезические являются обобщением прямых аффинной геометрии.

Аналитически геодезические характеризуются уравнением

$$\frac{\nabla\dot\gamma}{dt}(t) = 0,$$

т. е. в локальных координатах — уравнениями

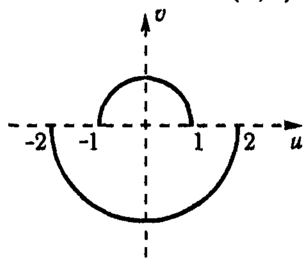
$$\ddot x^i(t) + \Gamma^i_{kj}(x(t))\dot x^j(t)\dot x^k(t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Это дифференциальные уравнения второго порядка, разрешенные относительно старших производных. Поэтому в силу стандартных теорем теории дифференциальных уравнений для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ существует максимальная (не продолжаемая ни на какой больший интервал оси $\mathbb{R}$) геодезическая γ, для которой $\gamma(0) = p$ и $\dot\gamma(0) = A$. По обычным соображениям (см. лекцию III.17) *эта геодезическая единственна.* (Напомним, что многообразие $\mathcal{X}$ мы предполагаем хаусдорфовым.) Мы будем обозначать ее символом $\gamma_{p,A}$, но вместо $\gamma_{p,A}(t)$ будем, как правило, писать $\gamma_p(t, A)$. Интервал оси $\mathbb{R}$, на котором определена геодезическая $\gamma_{p,A}$, мы будем обозначать символом $I_{p,A}$ или $I_p(A)$.

Функции $x^i(t)$, задающие в локальных координатах геодезическую $\gamma_{p,A}$, зависят, конечно, от точки p и вектора A, т. е. являются на самом деле функциями от $2n+1$ аргументов — числа t, n координат точки p и n координат вектора A. Согласно известной теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, эти функции являются гладкнмн функциямн от всех $2n+1$ аргументов. В этом смысле *геодезическая* $\gamma_{p,A}$ *гладко зависит от точки* p *и вектора* A.

Обратнм внимание, что аналогичные утверждения для интервала $I_{p,A}$ (т. е. абсцисс его концов) *неверны*.

Пример 1. Пусть многообразие $\mathcal{X}$ является (u,v)-плоскостью $\mathbb{R}^2$, нз которой удалены две полуокружности $u^2+v^2=1$, $v \geqslant 0$ и $u^2+v^2=4$, $v \leqslant 0$. Геодезическимн $\gamma_{p,A}$, проходящими через точку $p(0,0)$, служат прямолинейные интервалы с направляющим вектором A, концы которых лежат на этих полуокружностях.



Поэтому еслн угол наклона к оси абсцисс вектора A (который мы для определенности предполагаем ортом) равен φ, то

$$I_{p,A} = \begin{cases} (-2,1), & \text{если } 0<\varphi<\pi, \\ (-1,2), & \text{если } \pi<\varphi<2\pi, \\ (-1,1), & \text{если } \varphi=0, \text{ нлн } \varphi=\pi. \end{cases}$$

Таким образом, при $A=(\pm 1,0)$ функция $A \mapsto I_{p,A}$ претерпевает разрыв.

Если $I_{p,A}=\mathbb{R}$ для любой точки $p\in\mathcal{X}$ н любого вектора $A\in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, то многообразне $\mathcal{X}$ со связностью ∇ (а также сама связность ∇) называется *геодезически полным* (*ой*). Многообразне $\mathcal{X}$ из примера 1 не является геодезически полным.

Если функции $x^i(t)$ удовлетворяют уравнениям (5), то — в силу квадратичной зависимости левых частей этнх уравнений от первых пронзводных — для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ функции $y^i(t)=x^i(\lambda t)$ также будут удовлетворять уравнениям (5). Поскольку $\dot{y}^i(0) = \lambda \dot{x}^i(0)$, отсюда следует, что

$$\gamma_p(\lambda t, A) = \gamma_p(t, \lambda A). \qquad (6)$$

Это означает, что *при замене параметра* $t \mapsto \lambda t$ *геодезическая* $\gamma_{p,A}$ *переходит в геодезическую* $\gamma_{p,\lambda A}$. При этом, конечно,

$$t \in I_p(\lambda A) \iff \lambda t \in I_p(A).$$

Ряд Тейлора каждой из функций $x^i(t)$, задающих в локальных координатах геодезическую $\gamma_{p,A}$, имеет вид

$$x^i(t) = x_0^i + a^i t + c_2^i t^2 + \ldots + c_m^i t^m + \ldots, \qquad (7)$$

где x_0^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — координаты точки p, а $a^i = \dot{x}^i(0)$, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant n$, — координаты вектора A. [Для простоты мы предполагаем здесь многообразие $\mathcal{X}$ аналитическим (класса C^ω). Для многообразий класса C^r при $r = \infty$ или r конечном (но достаточно большом) нужно вместо ряда Тейлора рассматривать его отрезки, что лишь неоправданно утяжелит формулировки.]

Подставив ряд (7) в уравнения (5) (разложив предварительно функции Γ^i_{jk} в степенные ряды по $x^1, \ldots, x^n$) и приравняв нулю коэффициенты при всех степенях t, мы получим для коэффициентов c^i_m систему уравнений

$$\begin{gathered} 2c_2^i + \Gamma^i_{kj}(x_0)a^j a^k = 0, \\ 6c_3^i + 2\Gamma^i_{kj}(x_0)(a^j c_2^k + a^k c_2^j) + \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(x_0) a^j a^k a^l = 0, \qquad (8) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

из которой эти коэффициенты последовательно определяются (эта процедура имеет в анализе техническое название метода неопределенных коэффициентов).

Из уравнений (8) очевидным образом следует, что *все коэффициенты* c^i_m *являются многочленами от* $a^1, \ldots, a^n$.

Кроме того, чуть более внимательный анализ этих уравнений показывает, что *каждый многочлен* c^i_m, $i = 1, \ldots, n$, *однороден и его степень равна* m.

[Впрочем, этот последний факт можно установить проще, заметив, что соотношение (6) равносильно тождествам

$$c_m^i(\lambda a) = \lambda^m c_m^i(a), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 2 \leqslant m < \infty,$$

которые должны иметь место при любом достаточно малом $|\lambda|$. Ср. аналогичное рассуждение для однопараметрических подгрупп в лекции IV.14 (с. 241).]

Экспоненциальное отображение и нормальные окрестности

Пусть p_0 — произвольная точка пространства аффинной связности $\mathcal{X}$, и пусть $(U_0', h) = (U_0', x^1, \ldots, x^n)$ — центрированная в точке p_0 карта, для которой множество $h(U_0') \in \mathbb{R}^n$ является открытым шаром пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке 0. Для каждой точки $p \in U_0'$ мы будем считать линеал $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ снабженным евклидовой структурой, по отношению к которой базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \tag{9}$$

этого линеала ортонормирован. Эта структура зависит от выбора карты (U_0', h) и никакого внутреннего геометрического значения не имеет. Она нужна нам только для аналитических оценок.

Лемма 1. *Существуют такое число $\varepsilon > 0$ и такая окрестность $U_0 \subset U_0'$ точки p_0, что для любой точки $p \in U_0$ и любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ с $|A| < \varepsilon$ геодезическая $\gamma_{p,A}$ определена при $|t| < 2$ (интервал $(-2, 2)$ содержится в интервале $I_{p,A}$).*

Доказательство. Из того, что геодезическая $\gamma_{p,A}$ гладко (и, значит, непрерывно) зависит от p и A, непосредственно вытекает существование такой окрестности $U_0 \subset \subset U_0'$ точки p_0 и таких чисел $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, что для каждой точки $p \in U_0$ и любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ с $|A| < \varepsilon_1$ геодезическая $\gamma_{p,A}$ определена при $|t| < 2\varepsilon_2$ (на интервале $(-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2)$). Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_1\varepsilon_2$. Тогда при $|A| < \varepsilon$ будет иметь место неравенство $|\varepsilon_2^{-1}A| < \varepsilon_1$, и потому геодезическая $t \mapsto \gamma_p(t, \varepsilon_2^{-1}A)$ будет определена при $|t| < 2\varepsilon_2$, т. е. при $|\varepsilon_2^{-1}t| < 2$. Так как $t \in I_p(A) \iff \varepsilon_2 t \in I_p(\varepsilon_2^{-1}A)$, лемма 1 доказана. $\square$

Уменьшив, если нужно, окрестность U_0, мы без ограничения общности можем считать, что множество $h(U_0)$ является открытым шаром пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\mathbf{0}$.

Определение 3. Вектор $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ **называется** ***экспоненцируемым***, если геодезическая $\gamma_{p,A}$ определена при $t = 1$ (т. е. если $1 \in I_p(A)$). Для любого экспоненцируемого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ точка

$$\exp_p A = \gamma_p(1, A)$$

называется *экспонентой* вектора A. Отображение

$$\exp_p\colon\ A \mapsto \exp_p A$$

называется *экспоненциальным отображением*.

Заметим, что нуль $0 = 0_p$ линеала $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ экспоненцируем и

$$\exp_p \mathbf{0} = p.$$

Множество всех экспоненцируемых векторов линеала $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ (область определения отображеиия $\exp_p$) мы будем обозначать символом O_p. Оно содержит вектор 0 и — как непосредственно вытекает из формулы (6) — по отношению к этой точке обладает свойством звездности, т. е. если $A \in O_p$, то $\lambda A \in O_p$ для любого λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Равенство $O_p = \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ для всех $p \in \mathcal{X}$ имеет место тогда и только тогда, когда многообразие $\mathcal{X}$ геодезически полно.

Согласно лемме 1 для любой точки $p \in U_0$ множество O_p содержит открытый шар $|A| < \varepsilon$ радиуса ε с центром в точке 0. В частности, отсюда следует, что *множество* $\operatorname{Int} O_p$ *содержит точку* 0 (и, значит, является ее окрестностью). В силу произвольности точки p_0 *это верно для любой точки* $p \in \mathcal{X}$.

Из формулы (7) при $t = 1$ следует, что координаты $(\exp_p A)^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, точки $\exp_p A$ (конечно, если эти координаты определены, т. е. если $\exp_p A \in U_0$) выражаются формулой

$$(\exp_p A)^i = x^i + a^i + c_2^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) + \ldots + c_m^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) + \ldots, \qquad (10)$$

где x^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — координаты точки p в карте (U_0, h), $a^i = \dot{x}^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — координаты вектора A в базисе (9), а $c^i_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $2 \leqslant m < \infty$, — гладкие функции от $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n)$, являющиеся однородными многочленами степени m от $a^1, \ldots, a^n$. Поэтому для любых $i, j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial(\exp_p A)^i}{\partial a^j} = \delta^i_j + \frac{\partial c^i_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{\partial a^j} + \ldots + \frac{\partial c^i_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{\partial a^j} + \ldots,$$

где $\dfrac{\partial c^i_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{\partial a^j}$ — однородные многочлены положительной степени $m-1$ от $a^1, \ldots, a^m$ (и, значит, при $a^1 = 0, \ldots, a^n = 0$ равные нулю). Это доказывает, что *в точке* $0 \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ *якобиева матрица функций* (10) *является единичной матрицей* $E = \|\delta^i_j\|$.

Поэтому отображение $\exp_p$ этально в точке 0 (см. определение 3 лекции III.12) и, значит, точка 0 обладает в $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ фундаментальной системой окрестностей (содержащихся в O_p), на каждой из которых отображение $\exp_p$ является ее диффеоморфизмом на некоторую окрестность точки p.

***Определение* 4**. Окрестность $U^{(0)}$ вектора 0 в $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и окрестность U точки p в $\mathcal{X}$ называются *нормальными окрестностями* (вектора 0 и точки p, соответственно), если окрестность $U^{(0)}$ обладает свойством звездности и отображение $\exp_p$ является ее диффеоморфизмом на U.

Согласно только что сказанному, *нормальные окрестности составляют фундаментальную систему* (*базу*) *окрестностей* (соответственно вектора $0 \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и точки $p \in \mathcal{X}$).

Задача 2. Докажите, что *любое открытое подмножество n-мерного линейного пространства, обладающее свойством звездности, диффеоморфно шару* $\mathbb{B}^n$.

В частности, мы видим, что *каждая нормальная окрестность диффеоморфна шару* $\mathbb{B}^n$.

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ в нормальной окрестности U называются *нормальными координатами*, если диффеоморфизм $\exp_p^{-1}$ переводит их в линейные координаты на $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ (точнее, на $U^{(0)}$). Нормальные координаты характеризуются тем, что проходящие через точку p геодезические имеют в них уравнения вида

$$x^i = a^i t, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Задача 3. Докажите, что центрированные в p координаты $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$ тогда и только тогда нормальны, когда

$$\Gamma^i_{kj} x^j x^k = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

тождественно по $x^1, \ldots, x^n$. [Указание. Решения уравнения (5) тогда и только тогда имеют вид (11), когда выполнено условие (12).]

Замечание 1. Читатель безусловно уже обратил внимание, что подобные рассуждения проводились в лекции IV.14. Причина этого выяснится в лекции 6.

Теорема Уайтхеда

Полученные результаты можно существенно усовершенствовать.

Пусть, как и выше, (U_0, h_0) — карты из леммы 1. Рассмотрим в многообразии $\mathsf{T}\mathcal{X}$ окрестность нуля 0_{p_0} линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, состоящую из всех векторов $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, $p \in U_0$, для которых $|A| < \varepsilon$, и отображение f этой окрестности в многообразие $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, определенное формулой

$$f(A) = (\exp_p A, p).$$

В координатах $x_1^1 = x^1 \circ \mathrm{pr}_1, \ldots, x_1^n = x^1 \circ \mathrm{pr}_1$, $x_2^1 = x^1 \circ \mathrm{pr}_2, \ldots, x_2^n = x^n \circ \mathrm{pr}_2$, определенных в окрестности $U_0 \times U_0$ точки (p_0, p_0) многообразия $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, где $\mathrm{pr}_1\colon (p, q) \mapsto p$ и $\mathrm{pr}_2\colon (p, q) \mapsto q$ — естественные проекции, и в координатах $x^1, \ldots, x^n$, $a^1 = \dot{x}^1, \ldots, a^n = \dot{x}^n$, определенных в окрестности $\mathsf{T}U_0$ точки 0_{p_0} многообразия $\mathsf{T}\mathcal{X}$, отображение f записывается формулами

$$x_1^i = x^i + a^i + c_2^i(x, a) + \ldots + c_m^i(x, a) + \ldots,$$
$$x_2^i = x^i,$$

где $i = 1, \ldots, n$.

Так как все производные $\dfrac{\partial c_m^i}{\partial x^j}$ являются однородными многочленами степени m по $a^1, \ldots, a^n$ (и, значит, равны нулю при $a = 0$), то якобиева матрица отображения f в точке $0_{p_0} \in \mathsf{T}\mathcal{X}$ имеет вид

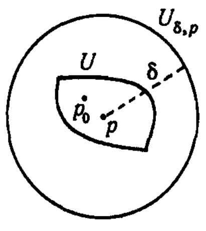
$$\begin{Vmatrix} E & E \\ E & 0 \end{Vmatrix},$$

и потому невырождена. Значит, на некоторой окрестности $W^{(0)}$ вектора 0_{p_0} в $\mathsf{T}\mathcal{X}$ отображение f является диффеоморфизмом на окрестность $W = f(W^{(0)})$ точки (p_0, p_0). При этом без ограничения общности можно считать, что окрестность $W^{(0)}$ состоит из всех векторов $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, для которых $\pi A \in U'$ и $|A| < \delta$, где U' — окрестность точки p_0 (содержащаяся в окрестности U_0), а δ — положительное число (не превосходящее числа ε из леммы 1). Другими словами, можно считать, что

$$W^{(0)} = \bigcup_{p \in U'} U^{(0)}_{\delta,p},$$

где $U^{(0)}_{\delta,p}$ — шар радиуса δ пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ с центром в точке 0_p.

Из того, что отображение f является на $W^{(0)}$ диффеоморфизмом, непосредственно вытекает, что для любой точки $p \in U'$ отображение $\exp_p$ представляет собой диффеоморфизм окрестности $U^{(0)}_{\delta,p}$ на некоторую окрестность $U_{\delta,p}$ точки p, т. е. что окрестности $U^{(0)}_{\delta,p}$ и $U_{\delta,p}$ нормальны (шар $U^{(0)}_{\delta,p}$ свойством звездности, конечно, обладает).



[Заметим, что окрестности $U^{(0)}_{\delta,p}$ и $U_{\delta,p}$ *зависят* от вспомогательной евклидовой метрики на линеалах $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, $p \in U_0$ (т. е. от карты (U_0, h)). При этом $U_{\delta,p} \subset U_0$.]

С другой стороны, по определению топологии многообразия $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ точка p_0 обладает в $\mathcal{X}$ такой окрестностью $U \subset U'$, что $U \times U \subset W$. При этом так как $\mathrm{pr}_2 \circ f = \pi$, то $U \subset U_{\delta,p}$ для любой точки $p \in U'$ и, в частности, для любой точки $p \in U$.

Этим доказано следующее предложение.

Предложение 1. *Для любой точки p_0 пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ существуют такое число $\delta > 0$ и такая окрестность U точки p_0, что для каждой точки $p \in U$ окрестность U содержится в нормальной δ-окрестности $U_{\delta,p}$ точки p.* $\square$

Без ограничения общности можно при этом считать, что множество $h(U) \subset h(U_0)$ является в $\mathbb{R}^n$ шаром (концентричным шару $h(U_0)$).

Однако, вообще говоря, окрестность U по отношению к точке $p \in U$ не обладает свойством звездности и потому нормальной окрестностью этой точки не является. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Так как $U \subset U_{\delta,p}$, а окрестность $U_{\delta,p}$ нормальна, то определено множество $U^{(0)} = \exp_p^{-1} U \subset U_{\delta,p}^{(0)}$ и окрестность U нормальна тогда и только тогда, когда это множество обладает свойством звездности.

Пусть $q \in U$. Поскольку $U \subset U_{\delta,p}$ и окрестность $U_{\delta,p}$ нормальна, существует такой вектор $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, что $\exp_p A = q$ и отрезок

$$\gamma_{p,q}\colon t \mapsto \exp_p tA, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{13}$$

геодезической $\gamma_{p,A}$ соединяет в $U_{\delta,p}$ точку p с точкой q. Ясно, что множество $U^{(0)}$ тогда и только тогда обладает свойством звездности (окрестность U нормальна), когда для любой точки $q \in U$ отрезок (13) содержится в U (т. е. когда $\gamma_{p,q}(t) \in U$ для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$).

***Предложение* 2.** (Теорема Уайтхеда). *Каждая точка p_0 пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ обладает такой окрестностью U, что для любых точек $p, q \in U$ отрезок $\gamma_{p,q}$ содержится в U.*

Доказательство. Рассмотрим на координатной окрестности U_0 матрицу

$$\left\| \delta_{kj} - \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{kj}^i x^i \right\|, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Уменьшив (если нужно) окрестность U_0, мы без ограничения общности можем считать, что *в каждой точке окрестности U_0 эта матрица положительно определена.*

Покажем, что при этом условии окрестность U точки p_0, предусмотренная предложением 1 (и такая, что ее образ $h(U)$ в $\mathbb{R}^n$ является шаром) обладает требуемым свойством.

Пусть

$$x^i = x^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

— параметрические уравнения отрезка геодезической $\gamma_{p,q}$, $p, q \in U$, в карте (U_0, h). (По построению отрезок $\gamma_{p,q}$ заведомо содержится в U_0.) Тогда для функции $f(t) = \sum_{i=1}^{n}(x^i(t))^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, равной квадрату расстояния в $\mathbb{R}^n$ от точки 0 до точки $(h \circ \gamma_{p,q})(t))$ мы имеем

$$\begin{aligned}\ddot{f}(t) = 2\sum_{i=1}^{n}[(\dot{x}^i(t))^2 + \ddot{x}^i(t)x^i(t)] = \\ = 2\sum_{i=1}^{n}[(\dot{x}^i(t))^2 - \Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))\dot{x}^j(t)\dot{x}^k(t)x^i(t)] = \\ = 2\left[\delta_{jk} - \sum_{i=1}^{n}\Gamma^i_{kj}x^i\right]_{\gamma(t)}\dot{x}^j(t)\dot{x}^k(t) \geqslant 0,\end{aligned}$$

откуда следует — как показывается в анализе — что

$$f(t) \leqslant (1-t)f(0) + tf(1)$$

для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и, значит, что

$$f(t) \leqslant \max[f(0), f(1)], \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Приведем для полноты доказательство. Согласно формуле Лагранжа существуют такие числа ξ_0 и ξ_1, что $0 \leqslant \xi_0 \leqslant t \leqslant \xi_1 \leqslant 1$ и

$$f(0) = f(t) - t\dot{f}(\xi_0), \quad f(1) = f(t) + (1-t)\dot{f}(\xi_1).$$

Умножив первое равенство на $1-t$, а второе — на t, и сложив, мы получим тождество

$$(1-t)f(0) + tf(1) = f(t) + (1-t)t[\dot{f}(\xi_1) - \dot{f}(\xi_0)].$$

Остается заметить, что если $\ddot{f} \geqslant 0$ на $[0,1]$, то $\dot{f}(\xi_1) - \dot{f}(\xi_0) \geqslant 0$. □

Так как $p, q \in U$, то числа $f(0)$ и $f(1)$ меньше радиуса r шара $h(U)$. Поэтому $f(t) < r$ для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и, значит, точка $\gamma_{p,q}(t)$ принадлежит окрестности U. □

Следствие 1. *Каждая точка p_0 пространства аффинной связности обладает окрестностью U, являющейся нормальной окрестностью любой своей точки.*

Доказательство. Как уже выше было замечено, окрестность U из предложения 2 обладает этим свойством. □