ЛЕКЦИЯ 2

Ковариантные дифференцирования относительно связности на многообразии. — Случай тензоров типа $(r, 1)$. — Тензор кручения и симметрические связности. — Геометрический смысл симметричности связности. — Перестановочность вторых ковариантных производных. — Тензор кривизны аффинной связности. — Пространства с абсолютным параллелизмом. — Тождества Бианки. — След тензора кривизны. — Тензор Риччи.

Ковариантные дифференцирования

Обратимся теперь непосредственно к ковариантным дифференцированиям, отвечающим аффинным связностям.

Как уже было сказано в лекции 1, ковариантные дифференцирования ∇_X относительно произвольной связности ∇ на многообразии $\mathcal{X}$ представляют собой операторы

$$\nabla_X\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}, \tag{1}$$

определенные на линейном пространстве $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ и обладающие свойствами **а**, **б** и **в** из лекции 1. Более того, так как при $\xi = \tau_{\mathcal{X}}$ векторное расслоение $\mathsf{T}^s_r\xi$ является не чем иным, как тензорным расслоением $\tau^s_r\mathcal{X}$ над многообразием $\mathcal{X}$, то согласно общим результатам лекции IV.12 операторы (1) естественным образом распространяются до операторов

$$\nabla_X\colon \mathsf{T}^s_r\mathcal{X} \to \mathsf{T}^s_r\mathcal{X} \tag{2}$$

на линейных пространствах $\mathsf{T}^s_r\mathcal{X} = \Gamma(\tau^s_r\mathcal{X})$ тензорных полей. В совокупности операторы ∇_X задают перестановочное со свертками дифференцирование алгебры тензорных полей на $\mathcal{X}$.

Напомним, — см. лекцию III.17 — что *дифференцированием алгебры тензорных полей* называется семейство таких линейных операторов

$$D\colon \mathsf{T}^s_r\mathcal{X} \to \mathsf{T}^s_r\mathcal{X},$$

определенных для всех r и s, что

$$D(S \otimes T) = DS \otimes T + S \otimes DT \tag{3}$$

для любых тензорных полей S и T. При $r = s = 0$ каждое такое дифференцирование является не чем иным, как дифференцированием алгебры гладких функций $\mathsf{F}\mathcal{X} = \mathsf{T}^0_0\mathcal{X}$ в смысле определения 1 лекции III.16, т. е. —

см. теорему 1 лекции III.16 — некоторым векторным полем $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$. При $S = f$ и $T = Y$, где $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$, $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, соотношение (3) имеет вид

$$D(fY) = Xf \cdot Y + fDY, \tag{4}$$

где D — линейный оператор $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$. (См. свойство 6 операторов ∇_X из лекции 1.)

Задача 1. Докажите, что *каждый линейный (над полем $\mathbb{R}$) оператор*

$$D\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X},$$

удовлетворяющий (для некоторого $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$) соотношению (4), единственным образом распространяется до перестановочного со свертками дифференцирования D алгебры тензорных полей (совпадающего на $\mathsf{F}\mathcal{X}$ с X).

[Указание. См. доказательства предложений 1 и 2 лекции IV.12.]

На линейных дифференциальных формах α дифференцирование D определяется формулой

$$(D\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(DY), \qquad Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}.$$

В частном случае, когда $X = 0$, условие (4) означает, что D является линейным оператором над алгеброй $\mathsf{F}\mathcal{X}$. Таким образом, *любой $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейный оператор D: $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$ единственным образом распространяется до перестановочного со свертками дифференцирования алгебры тензорных полей на многообразии $\mathcal{X}$ (обозначаемого тем же символом D).*

Это дифференцирование равно нулю на $\mathsf{F}\mathcal{X}$ и действует на линейных дифференциальных формах по формуле

$$(D\alpha)(Y) = -\alpha(DY), \qquad Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}.$$

Задача 2. Сформулируйте и докажите общую теорему, частными случаями которой являются предложение 2 лекции IV.12 и утверждение задачи 1.

В каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ оператор (2) представляет собой линейную комбинацию $\nabla_X = X^k \nabla_k$ операторов $\nabla_k = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}$ частных ковариантных производных

$$\nabla_k\colon \mathsf{T}^s_r\mathcal{X} \to \mathsf{T}^s_r\mathcal{X},$$

причем для любого тензорного поля S из $\mathsf{T}^s_r\mathcal{X}$ (и даже из $\mathsf{T}^s_r U$) компоненты $(\nabla_k S)^{i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_r}$ тензорного поля $\nabla_k S$ (определенного — подчеркнем — только на U) выражаются через компоненты $S^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}$ поля S по формуле

$$(\nabla_k S)^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} = \frac{\partial S^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}}{\partial x^k} + \\ + \sum_{a=1}^{s} \Gamma^{i_a}_{kp} S^{i_1\dots p\dots i_s}_{j_1\dots\dots\dots j_r} - \sum_{b=1}^{r} \Gamma^{q}_{kj_b} S^{i_1\dots\dots\dots i_s}_{j_1\dots q\dots j_r} \quad (5)$$

(см. формулу (13) лекции IV.12; подчеркнем, что по индексам p и q предполагается суммирование).

В частности,

$$(\nabla_k Y)^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} Y^j \quad (6)$$

для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$. (См. формулу (4) лекции 1.)

Тензорное поле S называется *ковариантно постоянным*, если $\nabla_X S = 0$ для каждого векторного поля X на $\mathcal{X}$ или — что равносильно — если в каждой карте $\nabla_k S = 0$ для любого $k = 1, \dots, n$.

Пример 1. Формула

$$\nabla_k \delta^i_j = \frac{\partial \delta^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp}\delta^p_j - \Gamma^q_{kj}\delta^i_q = 0$$

показывает, что *тензор Кронекера δ^i_j ковариантно постоянен.*

Ясно, что все ковариантно постоянные тензорные поля данного типа образуют линейное подпространство линейного пространства всех тензорных полей.

Случай тензоров типа $(r, 1)$ Особо интересен случай тензорных полей типа $(r, 1)$.

Как известно (см. замечание 2 лекции III.18), такие поля находятся в естественном биективном соответствии с $\mathsf{F}\mathcal{X}$-полилинейными отображениями вида

$$\underbrace{\mathfrak{a}\mathcal{X} \times \dots \times \mathfrak{a}\mathcal{X}}_{r} \to \mathfrak{a}\mathcal{X} \quad (7)$$

(отвечающее тензорному полю S отображение (7) сопоставляет векторным полям $X_1, \dots, X_r$ свертку $S(X_1, \dots, X_r)$ поля S с полями $X_1, \dots, X_r$ — векторное поле с компонентами

$S^i_{j_1\dots j_r}X_1^{j_1},\dots,X_r^{j_r})$. Как правило, тензорные поля типа $(r,1)$ и соответствующие отображения (7) мы будем отождествлять.

Пользуясь этим отождествлением, мы каждому тензорному полю S типа $(r,1)$ можем сопоставить тензорное поле ∇S типа $(r+1,1)$, положив

$$(\nabla S)(X_1,\dots,X_r,X)=(\nabla_X S)(X_1,\dots,X_r) \tag{8}$$

для любых полей $X_1,\dots,X_r,\ X\in\mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Тензорное поле ∇S называется *ковариантным дифференциалом* тензорного поля S.

Задача 3. Обобщите эту конструкцию на тензорные поля произвольного типа (r,s).

Задача 4. В общей ситуации произвольного расслоения понятие ковариантного дифференциала было введено в лекции IV.13. Так как $\tau_{\mathcal{X}}^*\otimes\otimes\tau_r^s\mathcal{X}=\tau_{r+1}^s\mathcal{X}$, то при $\xi=\tau_r^s\mathcal{X}$ этот ковариантный дифференциал будет отображением $\mathsf{T}_r^s\mathcal{X}\to\mathsf{T}_{r+1}^s\mathcal{X}$. Покажите, что при $s=1$ это в точности отображение (8) (а для любого s — его обобщенне из задачи 3).

Компонентами $(\nabla S)^i_{j_1\dots j_r j}$ теизорного поля ∇S в произвольной карте являются компоненты

$$(\nabla_j S)^i_{j_1\dots j_r}=\frac{\partial S^i_{j_1\dots j_r}}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jp}S^p_{j_1\dots j_r}-\sum_{b=1}^{r}\Gamma^q_{jj_b}S^i_{j_1\dots q\dots j_r}$$

ковариантных частных производных $\nabla_j S$ поля S (см. формулу (5)).

Поэтому для любых полей $X_1,\dots,X_r,X$

$$[(\nabla S)(X_1,\dots,X_r,X)]^i=(\nabla S)^i_{j_1\dots j_r j}X_1^{j_1}\dots X_r^{j_r}X^j=$$

$$=\frac{\partial S^i_{j_1\dots j_r}}{\partial x^j}X_1^{j_1}\dots X_r^{j_r}X^j+\Gamma^i_{jp}S^p_{j_1\dots j_r}X_1^{j_1}\dots X_r^{j_r}X^j-$$

$$-\sum_{b=1}^{r}\Gamma^q_{jj_b}S^i_{j_1\dots q\dots j_r}X_1^{j_1}\dots X_r^{j_r}X^j=$$

$$=\frac{\partial S^i_{j_1\dots j_r}X_1^{j_1}\dots X_r^{j_r}}{\partial x^j}X^j-\sum_{b=1}^{r}S^i_{j_1\dots j_b\dots j_r}X_1^{j_1}\dots\frac{\partial X_b^{j_b}}{\partial x^j}\dots X_r^{j_r}X^j+$$

$$+\Gamma^i_{jp}S^p_{j_1\dots j_r}X_1^{j_1}\dots X_r^{j_r}X^j-\sum_{b=1}^{r}\Gamma^q_{jj_b}S^i_{j_1\dots q\dots j_r}X_1^{j_1}\dots X_r^{j_r}X^j=$$

$$= \left(\frac{\partial S(X_1,\ldots,X_r)^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jp} S(X_1,\ldots,X_r)^p\right) X^j -$$

$$- \sum_{b=1}^{r} S^i_{j_1\ldots j_b \ldots j_r} X_1^{j_1} \ldots \left(\frac{\partial X_b^{j_b}}{\partial x^j} + \Gamma^{j_b}_{jq} X_b^q\right) \ldots X_r^{j_r} X^j =$$

$$= [\nabla_X S(X_1,\ldots,X_r)]^i - \sum_{b=1}^{r} S(X_1,\ldots,\nabla_X X_b,\ldots,X_r)^i,$$

и, следовательно,

$$(\nabla S)(X_1,\ldots,X_r,X) =$$
$$= \nabla_X S(X_1,\ldots,X_r) - \sum_{b=1}^{r} S(X_1,\ldots,\nabla_X X_b,\ldots,X_r). \quad (9)$$

Например, при $r = 1,2,3$

$$(\nabla S)(X,Y) = \nabla_Y S(X) - S(\nabla_Y X),$$
$$(\nabla S)(X,Y,Z) = \nabla_Z S(X,Y) - S(\nabla_Z X,Y) - S(X,\nabla_Z Y),$$
$$(\nabla S)(X,Y,Z,T) = \nabla_T S(X,Y,Z)-$$
$$-S(\nabla_T X,Y,Z) - S(X,\nabla_T Y,Z) - S(X,Y,\nabla_T Z),$$

или в других обозначениях

$$\begin{aligned}
&(\nabla_Y S)(X) = \nabla_Y S(X) - S(\nabla_Y X),\\
&(\nabla_Z S)(X,Y) = \nabla_Z S(X,Y) - S(\nabla_Z X,Y) - S(X,\nabla_Z Y),\\
&(\nabla_T S)(X,Y,Z) = \nabla_T S(X,Y,Z)-\\
&\quad -S(\nabla_T X,Y,Z) - S(X,\nabla_T Y,Z) - S(X,Y,\nabla_T Z).
\end{aligned} \quad (10)$$

В первой из этих формул символы $\nabla_Y S$, S и ∇_Y обозначают операторы на $\mathfrak{a}\mathcal{X}$. Первое слагаемое справа представляет собой результат применения к полю X сначала оператора S, а затем оператора ∇_Y, а второе — результат применения сначала оператора ∇_Y, а затем оператора S. Поэтому употребляя во избежание двусмысленности для обозначения композиции операторов знак $\circ$ (и заменяя Y на X), мы можем эту формулу записать в виде следующего соотношения между операторами:

$$\nabla_X S = \nabla_X \circ S - S \circ \nabla_X.$$

По определению это означает, что *оператор* $\nabla_X S$ *является коммутатором* $[\nabla_X, S]$ *операторов* ∇_X *и* S:

$$\nabla_X S = [\nabla_X, S]. \tag{11}$$

Аналогичную интерпретацию допускают и остальные формулы (10). Например, каждое тензорное поле S типа (3,1) может быть отождествлено с отображением $\mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}\mathcal{X}, \mathfrak{a}\mathcal{X})$, сопоставляющим любым двум векторным полям $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ линейный оператор

$$S(X,Y)\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}, \qquad Z \mapsto S(X,Y,Z).$$

В силу этого отождествления третья формула (10) приобретает (после соответствующего переименования аргументов) следующий вид:

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = [\nabla_X, S(Y,Z)] - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z), \tag{12}$$

где X, Y, Z — произвольные векторные поля на многообразии $\mathcal{X}$.

Заметим, что *тензорное поле* S *типа* $(r,1)$ *тогда и только тогда ковариантно постоянно, когда* $\nabla S = 0$.

Поэтому, в частности (см. формулу (11)), *тензорное поле* S *типа* $(1,1)$ *тогда и только тогда ковариантно постоянно, когда рассматриваемое как* $\mathsf{F}\mathcal{X}$*-линейный оператор* $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$ *оно перестановочно со всеми операторами* ∇_X.

Тензор кручения и симметрические связности

Поскольку для связности на многообразии оператор ∇_X определен на том же линеале $\mathfrak{a}\mathcal{X}$, которому принадлежит X, можно для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ в выражении $\nabla_X Y$ переставить X и Y (операция, в общем случае смысла не имеющая). Это позволяет ввести в рассмотрение векторное поле

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Отображение

$$T\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}, \quad (X,Y) \mapsto T(X,Y), \tag{13}$$

очевидно, кососимметрично, т. е.

$$T(X,Y) = -T(Y,X),$$

и $\mathbb{R}$-линейно по каждому аргументу ($\mathbb{R}$-билинейно).

Более того, так как для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$[fX,Y] = f[X,Y] - Yf \cdot X$$

(см. формулу (23) лекции III.16), то

$$T(fX,Y) = \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] =$$
$$= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f[X,Y] = fT(X,Y)$$

и, значит, отображение (13) $\mathsf{F}\mathcal{X}$-билинейно. Следовательно, оно соответствует некоторому тензорному полю на $\mathcal{X}$ типа $(2,1)$, кососимметричному по нижним индексам.

Определение 1. Тензорное поле T называется *тензором кручения* аффинной связности ∇. В случае, когда этот тензор равен нулю, т. е. когда для любых полей $X, Y \in \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \tag{14}$$

связность ∇ называется *симметрической* (или *симметричной*).

В каждой координатной окрестности компоненты T^i_{jk} тензора T выражаются формулой

$$T^i_{jk} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)^i = \left(\nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k}\right)^i - \left(\nabla_k \frac{\partial}{\partial x^j}\right)^i,$$

т. е. (см. формулу (2) лекции 1) формулой

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{[jk]}, \quad i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{15}$$

В частности, мы видим, что *связность ∇ тогда и только тогда симметрична, когда в каждой карте ее коэффициенты связности Γ^i_{kj} симметричны по нижним индексам:*

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$$

для любых $i,j,k = 1,\ldots,n$.

Предложение 1. *Если связность ∇ на многообразии $\mathcal{X}$ симметрична, то для любой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ существуют центрированные в p_0 локальные координаты $x^1,\ldots,x^n$, в которых коэффициенты связности Γ^i_{kj} в точке p_0 обращаются в нуль:*

$$(\Gamma^i_{kj})_{p_0} = 0. \tag{16}$$

Этими координатами являются нормальные в точке p_0 координаты.

Доказательство. Согласно утверждению задачи 3 лекции 1, если координаты $x^1, \ldots, x^n$ нормальны в точке p_0, то

$$\Gamma^i_{kj} x^j x^k = 0$$

тождественно по $x^1, \ldots, x^n$. В частности, отсюда следует, что при $x^i = a^i t$

$$\Gamma^i_{kj}(t\mathbf{a}) a^j a^k = 0, \qquad \mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n),$$

для любых $a^1, \ldots, a^n$ и t. При $t = 0$ мы получаем

$$(\Gamma^i_{kj})_{p_0} a^j a^k = 0,$$

что в силу симметричности коэффициентов $(\Gamma^i_{kj})_{p_0}$ по k и j и произвольности чисел $a^1, \ldots, a^n$ возможно только тогда, когда эти коэффициенты равны нулю. □

Геометрический смысл симметричности связности

В чем состоит геометрический смысл тензора кручения и условия симметричности связности?

Пусть $p_0 \in \mathcal{X}$ и $A, B \in \mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Согласно следствию 1 леммы 2 лекции III.18 на многообразии $\mathcal{X}$ существует такое векторное поле X, что $X_{p_0} = A$. Более того, если $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная содержащая точку p_0 карта, то поле X можно выбрать так, чтобы в карте (U, h) его компоненты X^i были бы постоянны (и, значит, в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{p_0}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{p_0}$ равны координатам a^i вектора A).

Если поле X выбрано указанным образом, то интегральная кривая $u\colon t \mapsto u(t)$ поля X, проходящая при $t = 0$ через точку p_0, будет задаваться в карте (U, h) линейными функциями

$$x^i(t) = x^i_0 + a^i t, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где x^i_0, $1 \leqslant i \leqslant n$, — координаты точки p_0. Поэтому для координат $b^i(t)$ вектора $B(t)$, получающегося из вектора B параллельным переносом вдоль кривой u в точку $u(t)$, будут иметь место равенства

$$b^i(t) = b^i - \int_0^t \Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{x}(t))b^j(t)a^k dt, \qquad \boldsymbol{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)),$$

где b^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — координаты вектора B. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$b^i(t) = b^i - (\Gamma^i_{kj})_0 b^j a^k t + O(t^2),$$

где $(\Gamma^i_{kj})_0$ — значения коэффициентов связности Γ^i_{kj} в точке p_0.

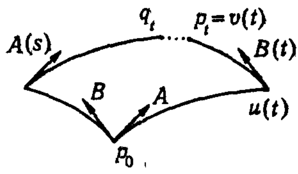
Пусть теперь t фиксировано, и пусть Y — векторное поле на $\mathcal{X}$, компоненты которого в карте (U, h) постоянны и равны $b^i(t)$. Тогда интегральная кривая $s \mapsto v(s)$ поля Y, проходящая при $s = 0$ через точку $u(t)$, будет задаваться линейными по s функциями

$$s \mapsto x^i(t) + b^i(t)s, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначив через p_t точку $v(s)$ при $s = t$, мы получим, следовательно, для координат x^i_t этой точки равенство

$$x^i_t = x^i_0 + (a^i + b^i)t - (\Gamma^i_{kj})_0 b^j a^k t^2 + O(t^3).$$

Наглядно точку p_t можно представлять себе как результат сдвига точки p_0 на расстояние t сначала в направлении вектора A, а затем в направлении вектора B.



Аналогичные формулы (с перестановкой координат a^i и b^i) будут иметь место и для точки q_t, получающейся сдвигом точки p_0 сначала в направлении вектора B, а затем в направлении вектора A.

Поэтому разность координат точек q_t и p_t будет равна

$$[(\Gamma^i_{kj})_0 b^j a^k - (\Gamma^i_{kj})_0 a^j b^k]t^2 + O(t^3) =$$

$$= [((\Gamma^i_{kj})_0 - (\Gamma^i_{jk})_0)a^k b^j]t^2 + O(t^3) = T(A, B)^i t^2 + O(t^3),$$

где $T(A, B)^i = (\Gamma^i_{[kj]})_0 a^k b^j$ — компоненты поля $T(X, Y)$ в точке p_0 (зависящие лишь от векторов A и B).

На инфинитезимальном языке это означает, что попытка построить в многообразии $\mathcal{X}$ на векторах A и B бесконечно малый параллелограмм приводит к пятиугольнику, замыкающая сторона которого является бесконечно малой второго порядка, с точностью до бесконечно малых третьего порядка равной $T(A, B)$.

Это дает наглядную геометрическую интерпретацию тензора кручения и, в частности, показывает, что *аффинная связность тогда и только тогда симметрична, когда каждый бесконечно малый параллелограмм замыкается с точностью до бесконечно малых третьего порядка.*

Перестановочность вторых ковариантных производных

Формально иную, но по-существу ту же самую интерпретацию свойства симметричности связности можно получить на языке ковариантных производных.

Пусть W — открытое множество (s,t)-плоскости $\mathbb{R}^2$ и пусть $\varphi\colon W \to \mathcal{X}$ — гладкое отображение (*элементарная поверхность в* $\mathcal{X}$). Пусть, далее, $X\colon (s,t) \mapsto X(s,t)$ — такое гладкое отображение $W \to \mathsf{T}\mathcal{X}$, что

$$X(s,t) \in \mathsf{T}_{\varphi(s,t)}\mathcal{X}$$

для любой точки $(s,t) \in W$ (*векторное поле на поверхности* φ).

Тогда на φ определены два векторных поля $\dfrac{\nabla X}{\partial t}$ и $\dfrac{\nabla X}{\partial s}$, компоненты которых в каждой карте $(U,h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ задаются формулами

$$\left(\frac{\nabla X}{\partial t}\right)^i = \frac{\partial X^i}{\partial t} + \Gamma^i_{kj} X^j \frac{\partial x^k}{\partial t}, \qquad \left(\frac{\nabla X}{\partial s}\right)^i = \frac{\partial X^i}{\partial s} + \Gamma^i_{kj} X^j \frac{\partial x^k}{\partial s},$$

где

$X^i = X^i(s,t)$ — компоненты вектора $X(s,t)$ в карте (U,h);

$x^k = x^k(s,t)$ — функции, задающие в карте (U,h) поверхность φ;

$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{kj}(s,t)$ — значения коэффициентов связности ∇ в точке $\varphi(s,t)$.

Примером векторного поля X является поле $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$, состоящее из векторов, касательных к координатным линиям $s = \mathrm{const}$ поверхности φ, и аналогичное поле $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$, состоящее из векторов, касательных к координатным линиям $t = \mathrm{const}$.

Для этих полей

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^i = \frac{\partial x^i}{\partial s},$$

и, значит, имеют место равенства

$$\left(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial s\,\partial t} + \Gamma^i_{kj}\frac{\partial x^j}{\partial t}\frac{\partial x^k}{\partial s},$$

$$\left(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t\,\partial s} + \Gamma^i_{kj}\frac{\partial x^j}{\partial s}\frac{\partial x^k}{\partial t}.$$

Поэтому *связность* ∇ *тогда и только тогда симметрична, когда для любой поверхности* $\varphi\colon W \to \mathcal{X}$ *имеет место равенство*

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial s} \tag{17}$$

(*тождественно по* s *и* t).

Тензор кривизны аффинной связности

Как мы знаем (см. лекцию IV.19), для любой связности в векторном расслоении над многообразием $\mathcal{X}$ и, в частности, для любой аффинной связности на $\mathcal{X}$ определен *тензор кривизны* R этой связности, компоненты $R^i_{j,kl}$ которого в каждой карте выражаются формулой

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj} - \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{kj}.$$

Для аффинной связности закон преобразования этих компонент при замене координат имеет вид

$$R^{i'}_{j',k'l'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}R^i_{j,kl}$$

(ср. формулу (33) лекции IV.19), так что R *является тензором типа* $(3,1)$ *на многообразии* $\mathcal{X}$. Рассматриваемый как отображение

$$R\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X},$$

этот тензор сопоставляет векторным полям $X, Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ векторное поле $R(X,Y)Z$, где

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \tag{18}$$

(см. формулу (34) лекции IV.19.) В каждой карте поле

$R(X,Y)Z$ имеет компоненты $R^i_{j,kl}X^kY^lZ^j$, где X^k, Y^l, Z^j — компоненты полей X, Y, Z.

Задача 5. Покажите, что для любой элементарной поверхности φ

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}-\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}=R_{\varphi(s,t)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

т. е. — подробнее — что

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}X(s,t)-\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}X(s,t)=R_{\varphi(s,t)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)X(s,t)$$

для любого векторного поля X на φ.

Согласно утверждению задачи 1 (точнее, ее частному случаю, относящемуся к $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейным операторам D), для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ оператор кривизны

$$R(X,Y)\colon \mathfrak{a}\mathcal{X}\to\mathfrak{a}\mathcal{X}$$

однозначно распространяется до некоторого (обозначаемого тем же символом) дифференцирования алгебры тензорных полей на многообразии $\mathcal{X}$, а так как — см. лекцию III.16 — коммутатор двух дифференцирований также представляет собой дифференцирование, то правая часть формулы (18) является ограничением на $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ дифференцирования $\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ алгебры тензорных полей на многообразии $\mathcal{X}$. Последнее дифференцирование, как и дифференцирование $R(X,Y)$, перестановочно со свертками и равно нулю на $\mathsf{F}\mathcal{X}$. Поэтому *обе части формулы* (18) *совпадают и как дифференцирования тензорных полей на* $\mathcal{X}$.

В частности, отсюда следует, что *для любого тензора S типа $(r,1)$ и любых векторных полей $X, Y, X_1, \ldots$ $\ldots, X_r \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место формула*

$$(R(X,Y)S)(X_1,\ldots X_r)=R(X,Y)S(X_1,\ldots,X_r)-\\-\sum_{b=1}^{r}S(X_1,\ldots,R(X,Y)X_b,\ldots,X_r).\quad(19)$$

[Достаточно применить формулу (9) (левая часть которой переписана в виде $(\nabla_XS)(X_1,\ldots,X_r)$) к тензору ∇_YS, проальтернировать результат по X, Y, вычесть формулу (9) для поля $[X,Y]$ и всюду заменить $\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$ на $R(X,Y)$.]

При $r = 1$ формула (19) приобретает — ср. формулу (11) — вид

$$R(X,Y)S = [R(X,Y),S], \tag{20}$$

где S — произвольный $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейный оператор $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$ (тензор типа $(1,1)$), а при $r = 3$ — см. формулу (12) — вид

$$(R(X,Y)S)(U,V) = [R(X,Y),S(U,V)] - \\ - S(R(X,Y)U,V) - S(U,R(X,Y)V), \tag{21}$$

где S — произвольный тензор типа $(3,1)$ (и, значит, $S(U,V)$, где $U,V \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, — некоторый $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейный оператор $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$).

Пространства с абсолютным параллелизмом

Определение 2. Связное пространство аффинной связности $\mathcal{X}$ называется *пространством с абсолютным параллелизмом*, если для любых двух точек $p,q \in \mathcal{X}$ и любого соединяющего их пути $u\colon I \to \mathcal{X}$ параллельный перенос

$$\Pi_u\colon \mathsf{T}_p\mathcal{X} \to \mathsf{T}_q\mathcal{X}, \qquad p = u(0),\ q = u(1),$$

(см. лекцию 1) не зависит от выбора этого пути (т. е. если связность на $\mathcal{X}$ является связностью с абсолютным параллелизмом в смысле лекции IV.20).

В пространстве с абсолютным параллелизмом перенос обозначается символом Π_q^p, а векторы $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и $B \in \mathsf{T}_q\mathcal{X}$, связанные соотношением $B = \Pi_q^p A$, называются *параллельными*. Векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ на пространстве $\mathcal{X}$ с абсолютным параллелизмом называется *полем параллельных векторов*, если для любых точек $p,q \in \mathcal{X}$ векторы X_p и X_q параллельны. Все такие поля составляют, очевидно, n-мерное линейное подпространство пространства $\mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Согласно общим результатам лекции IV.20 *для того, чтобы пространство аффинной связности было пространством с абсолютным параллелизмом, необходимо, чтобы его тензор кривизны R был тождественно равен нулю* (связности, тензор кривизны которых тождественно равен нулю, в лекции IV.20 назывались плоскими; однако, применительно к аффинным связностям этот термин обычно используется лишь в дополнительном предположении, что связность симметрична). Это необходимое условие достаточно, если многообразие $\mathcal{X}$ односвязно.

С другой стороны, легко видеть (покажите!), что *для пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ тензор кривизны тогда и только тогда тождественно равен нулю, когда пространство $\mathfrak{c}\mathcal{X}$ ковариантно постоянных векторных полей n-мерно (где, как всегда, $n = \dim\mathcal{X}$).*

В частности, $\dim\mathfrak{c}\mathcal{X} = n$ для каждого пространства $\mathcal{X}$ с абсолютным параллелизмом.

Вообще, размерность пространства $\mathfrak{c}\mathcal{X}$ равна размерности пространства всех векторов, остающихся инвариантными при всех преобразованиях суженной группы голономии. (В силу общих результатов лекции IV.20 последняя группа тривиальна тогда и только тогда, когда $R = 0$.)

Тождества Бианки Ковариантная производная $\nabla_Z R$ тензора R также является тензором типа (3,1), и потому любым векторным полям $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ сопоставляет оператор

$$(\nabla_Z R)(X, Y)\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}.$$

Для этого оператора имеет место формула (12) (в которой, естественно, S надо заменить на R).

Предложение 2. *Если связность на многообразии $\mathcal{X}$ симметрична, то для любых полей $X, Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеют место равенства*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \tag{22}$$

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Для любой функции S от аргументов X, Y и Z о сумме

$$S(X, Y, Z) + S(Y, Z, X) + S(Z, X, Y)$$

говорят, что она получается из $S(X, Y, Z)$ *циклированием*. В этой терминологии формула (22) утверждает, что *циклирование поля $R(X, Y)Z$ дает нуль*. Поскольку операция циклирования, очевидно, линейна, для доказательства этой формулы достаточно, следовательно, представить $R(X, Y)Z$ в виде суммы выражений, циклирование каждого из которых заведомо равно нулю.

Но в случае, когда связность ∇ симметрична, для поля

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

согласно формуле (14) имеет место равенство

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Z Y + [Y,Z]) - \nabla_Y\nabla_X Z - \\ - (\nabla_Z[X,Y] + [[X,Y],Z]),$$

т. е. равенство

$$R(X,Y)Z = (\nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Y\nabla_X Z) + \\ + (\nabla_X[Y,Z] - \nabla_Z[X,Y]) - [[X,Y],Z]. \quad (24)$$

С другой стороны, автоматическое вычисление показывает, что *циклирование любой функции вида*

$$S(X,Y,Z) - S(Y,Z,X)$$

равно нулю. Действительно,

$$S(X,Y,Z) - S(Y,Z,X) + S(Y,Z,X) - \\ - S(Z,X,Y) + S(Z,X,Y) - S(X,Y,Z) = 0$$

(заметим, что то же самое верно и для любой функции вида $S(X,Y,Z) - S(X',Y',Z')$, где X',Y',Z' — произвольная четная перестановка аргументов X,Y,Z). Поэтому, в частности, циклирование обеих скобок в правой части формулы (24) дает нуль. Кроме того, согласно тождеству Якоби (см. формулу (22) лекции III.16), циклирование третьего слагаемого $[[X,Y],Z]$ также дает нуль.

Это доказывает формулу (22).

Аналогично, согласно формулам (12) и (15)

$$(\nabla_X R)(Y,Z) = [\nabla_X, R(Y,Z)] - R(\nabla_X Y, Z) - R(Y, \nabla_X Z) = \\ = [\nabla_X, R(Y,Z)] - R(\nabla_Y X, Z) - R([X,Y],Z) - R(Y,\nabla_X Z) = \\ = ([\nabla_X, R(Y,Z)] - R([X,Y],Z)) + (R(Z,\nabla_Y X) - R(Y,\nabla_X Z)),$$

где вторая скобка имеет вид $S(Z,Y,X) - S(Y,X,Z)$, и потому ее циклирование дает нуль (тройка Y,X,Z получается из тройки Z,Y,X четной перестановкой). С другой стороны,

$$[\nabla_X, R(Y,Z)] - R([X,Y],Z) = [\nabla_X,[\nabla_Y,\nabla_Z]] - \\ - [\nabla_X, \nabla_{[Y,Z]}] - [\nabla_{[X,Y]}, \nabla_Z] + \nabla_{[[X,Y],Z]},$$

где циклирование первого и последнего слагаемых дает нуль в силу тождества Якоби, а циклирование суммы средних слагаемых дает нуль, потому что эту сумму можно записать в виде

$$[\nabla_{[Y,Z]}, \nabla_X] - [\nabla_{[X,Y]}, \nabla_Z].$$

□

Задача 6. Покажите, что для произвольной аффинной связности на многообразии имеют место соотношения

$$\mathfrak{S}\{R(X,Y)Z\} = \mathfrak{S}\{T(T(X,Y),Z)\} + \mathfrak{S}\{\nabla_X T(Y,Z)\},$$
$$\mathfrak{S}\{(\nabla_X R)(Y,Z)\} = \mathfrak{S}\{R(X,T(Y,Z))\},$$

где $\mathfrak{S}$ — оператор циклирования.

В компонентах соотношения (22) и (23) имеют вид

$$R^i_{j,kl} + R^i_{k,lj} + R^i_{l,jk} = 0, \tag{22'}$$

$$\nabla_s R^i_{j,kl} + \nabla_k R^i_{j,ls} + \nabla_l R^i_{j,sk} = 0, \tag{23'}$$

Используя введенные в лекции IV.19 обозначения, эти формулы можно записать короче:

$$R^i_{(j,kl)} = 0, \tag{22''}$$

$$\nabla_{(s} R^i_{|j|,kl)} = 0. \tag{23''}$$

Интересно сравнить формулу (23″) с формулой (42) лекции IV.19 (написанной для случая $\xi = \tau_{\mathcal{X}}$, т. е. для случая связности на многообразии). Содержательно эти формулы различны, так как в формуле (23″) символ ∇_s обозначает оператор частного ковариантного дифференцирования тензоров типа (3,1) на многообразии $\mathcal{X}$ (при вычислении которого мы попеременно свертываем коэффициенты связности Γ^i_{kj} со всеми индексами k, l, i и j), а в формуле (42) лекции IV.19 этот символ обозначает оператор частного ковариантного дифференцирования ξ-тензорных полей типа (1,1) (когда мы производим свертывание *лишь* по индексам i и j). Тем не менее, оказывается, что *эти формулы следуют одна из другой* (что, в частности, заново доказывает формулу (23″)), поскольку результаты применения обоих операторов ∇_s к тензору R имеют компоненты, отличающиеся на выражение

$$\Gamma^p_{sk} R^i_{j,pl} + \Gamma^p_{sl} R^i_{j,kp} = \Gamma^p_{sk} R^i_{j,pl} - \Gamma^p_{sl} R^i_{j,pk},$$

циклирование которого по индексам s, k и l дает нуль.

Формулы (22″) и (23″) (а также равносильные им формулы (22) и (23)) называются *первым* и *вторым тождествами Бианки* для симметрических связностей. Первое тождество Бианки называется также *тождеством Риччи*, а второе — *тождеством Бианки — Падова*.

След тензора кривизны

Поскольку для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ оператор кривизны $R(X,Y)$ пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ является линейным оператором $a\mathcal{X} \to a\mathcal{X}$, и поскольку над каждой координатной окрестностью $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуль $a\mathcal{X}$ является свободным модулем конечного ранга, можно ввести в рассмотрение след $\operatorname{Tr} R(X,Y)$ оператора $R(X,Y)$. Этот след $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейно зависит от X, Y, т. е. соответствие

$$\operatorname{Tr} R\colon\ (X,Y) \mapsto \operatorname{Tr} R(X,Y)$$

является кососимметрическим тензором типа $(2,0)$ на пространстве $\mathcal{X}$, или в другой терминологии, дифференциальной формой второй степени на $\mathcal{X}$.

В каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ этот тензор имеет компоненты

$$R^i_{i,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x^l}$$

(ибо $\Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{li} = \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{ki}$). Следовательно, рассматриваемый как дифференциальная форма, тензор $\operatorname{Tr} R$ является внешним дифференциалом $d\gamma$ линейной дифференциальной формы

$$\gamma = \Gamma^i_{ki}dx^k. \tag{25}$$

Подчеркнем, что в отличие от $\operatorname{Tr} R$ форма γ зависит от выбора локальных координат $x^1, \ldots, x^n$; изменив эти координаты мы прибавим к γ форму вида df, где f — некоторая функция.

Задача 7. Докажите последнее утверждение. [Указание. Функция f равна логарифму определителя матрицы перехода.]

Тензор Риччи Другой — на первый взгляд малоестественный — способ построить по тензору кривизны тензор типа $(2,0)$ состоит в том, чтобы свернуть индекс i не с индексом j, а с одним из индексов k или l (с точностью до знака выбор индекса безразличен; мы выберем k).

Определение 3. Тензор типа $(2,0)$ с компонентами

$$R_{ij} = R^k_{i,kj}$$

называется *тензором Риччи* пространства аффинной связности $\mathcal{X}$. В современной литературе его принято обозначать символом $\operatorname{Ric}\mathcal{X}$ (но, тем не менее, для его компонент обычно сохраняется классическое обозначение R_{ij}).

Чтобы описать тензор Риччи в инвариантных бескоординатных терминах, мы заметим, что для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ соответствие $Z \mapsto R(Z, Y)X$, $Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, определяет некоторый линейный оператор на $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуле $\mathfrak{a}\mathcal{X}$. Так как над каждой координатной окрестностью $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуль $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ является свободным модулем конечного ранга, то определен след $\operatorname{Tr}[Z \mapsto R(Z, Y)X]$ этого оператора, являющийся функцией из $\mathsf{F}\mathcal{X}$, и непосредственное сравнение определений показывает, что эта функция является не чем иным, как значением $\operatorname{Ric}(X, Y)$ на полях X, Y тензора Ric (интерпретированного как отображение $\mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathsf{F}\mathcal{X}$):

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \operatorname{Tr}[Z \mapsto R(Z, Y)X]. \tag{26}$$

Компоненты R_{ij} тензора Риччи выражаются через коэффициенты связности по формуле

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{kp}\Gamma^p_{ji} - \Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{ki} \tag{27}$$

и в каждой карте имеет место равенство

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = R_{ij}X^iY^j, \qquad X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}, \tag{28}$$

где X^i и Y^j — компоненты полей X и Y в данной карте.

Задача 8. Покажите, что *если связность ∇ симметрична, то для любых векторных полей X и Y справедлива формула*

$$\operatorname{Ric}(X, Y) - \operatorname{Ric}(Y, X) = \operatorname{Tr} R(X, Y).$$

[Указание. Для компонент эта формула утверждает, что $R^k_{i,kj} - R^k_{j,ki} = R^k_{k,ij}$.]

В частности, отсюда следует, что *тензор Риччи симметрической связности тогда и только тогда симметричен, когда тензор* $\operatorname{Tr} R$ *тождественно равен нулю, т. е. когда*

$$d\gamma = 0$$

(*дифференциальная форма γ замкнута*).