ЛЕКЦИЯ 3

Аффинные отображения. — Аффиннитеты. — Аффинные накрытия. — Ограничение связности на подмногообразие. — Индуцированная связность на нормализованном подмногообразии. — Формула Гаусса и вторая основная форма нормализованного подмногообразия. — Вполне геодезические и автопараллельные подмногообразия. — Нормальная связность и формула Вейнгартена. — Связность ван дер Вардена — Бортолотти.

Аффинные отображения Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — пространства аффинной связности со связностями $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$. (Впрочем, для упрощения формул мы часто вместо $\nabla^{\mathcal{X}}$ будем писать ∇, а вместо $\nabla^{\mathcal{Y}}$ будем писать $\widehat{\nabla}$.) На каждой координатной окрестности U многообразия $\mathcal{X}$ (координатной окрестности V многообразия $\mathcal{Y}$) связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ (связность $\nabla^{\mathcal{Y}}$) задается матрицей $\omega = \omega^{\mathcal{X}}$ (матрицей $\widehat{\omega} = \omega^{\mathcal{Y}}$) форм связности. Каждому касательному вектору A (точке тотального пространства $\mathsf{T}\mathcal{X}$ касательного расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$) связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ относит горизонтальное подпространство $H_A^{\mathcal{X}}$ касательного пространства $\mathsf{T}_A(\mathsf{T}\mathcal{X})$. Аналогично, каждой точке $B \in \mathsf{T}\mathcal{Y}$ связность $\nabla^{\mathcal{Y}}$ относит горизонтальное подпространство $H_B^{\mathcal{Y}} \subset \subset \mathsf{T}_B(\mathsf{T}\mathcal{Y})$.

Пусть $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — произвольное гладкое отображение. Карты $(U,h) = (U,x^1,\dots,x^n)$ и $(V,k) = (V,y^1,\dots,y^m)$ многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ мы будем называть *f-связанными*, если $fU \subset V$. В таких картах отображение f (или, точнее, индуцированное им отображение $U \to V$) задается функциями вида

$$y^a = f^a(x^1,\dots,x^n), \qquad a = 1,\dots,m.$$

Якобиева матрица

$$J_f = \left\|\frac{\partial f^a}{\partial x^i}\right\|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant a \leqslant m,$$

этих функций называется *якобиевой матрицей отображения* f в картах (U,h) и (V,k) (см. лекцию III.12).

Напомним (см. замечание 3 лекции III.17), что векторные поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и $\widehat{X} \in \mathfrak{a}\mathcal{Y}$ называются *f-связанными*, если

$$(df)_p X_p = \widehat{X}_{f(p)} \tag{1}$$

для любой точки $p \in \mathcal{X}$, т. е. если для любой пары f-связанных карт (U, h) и (V, k) имеют место равенства

$$\frac{\partial f^a}{\partial x^i} X^i = \widehat{X}^a \circ f, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant a \leqslant m,$$

где X^i и $\widehat{X}^a$ — компоненты полей X и $\widehat{X}$ в картах (U, h) и (V, k).

С другой стороны, ясно, что формула

$$(\mathsf{T}f)A = (df)_p A, \qquad A \in \mathsf{T}\mathcal{X},$$

где $p \in \mathcal{X}$ — такая точка, что $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, корректно определяет гладкое отображение

$$\mathsf{T}f\colon \mathsf{T}\mathcal{X} \to \mathsf{T}\mathcal{Y}$$

многообразий касательных векторов. Поскольку это отображение гладко, для любой точки $A \in \mathsf{T}\mathcal{X}$ определен его дифференциал в этой точке

$$(d\mathsf{T}f)_A\colon \mathsf{T}_A(\mathsf{T}\mathcal{X}) \to \mathsf{T}_B(\mathsf{T}\mathcal{Y}),$$

где $B = (\mathsf{T}f)A$.

Предложение 1. *Следующие свойства гладкого отображения $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ равносильны.*

А. *Если поля $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ f-связаны с полями $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \mathfrak{a}\mathcal{Y}$, то поле $\nabla_X Y$ f-связано с полем $\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y}$.*

Б. *Для любых f-связанных карт (U, h) и (V, k)*

$$J_f \omega = f^* \widehat{\omega} J_f + dJ_f \quad \textit{на } U. \tag{2}$$

В. *Для любой кривой $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ и любого векторного поля $X\colon t \mapsto X(t)$ на γ*

$$\frac{\widehat{\nabla}}{dt}[(df)_{\gamma(t)} X(t)] = (df)_{\gamma(t)} \frac{\nabla}{dt} X(t), \qquad t \in I. \tag{3}$$

Г. *Для любой кривой $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} & \xrightarrow{(df)_{p_0}} & \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}, \\ {\scriptstyle \Pi_\gamma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\Pi}_{f\circ\gamma}} \\ \mathsf{T}_{p_1}\mathcal{X} & \xrightarrow{(df)_{p_1}} & \mathsf{T}_{q_1}\mathcal{Y}, \end{array} \tag{4}$$

где p_0 — начальная и p_1 — конечная точки кривой γ, $q_0 = f(p_0)$, $q_1 = f(p_1)$, а Π_γ и $\widehat{\Pi}_{f\circ\gamma}$ — параллельные переносы вдоль кривых γ и $f\circ\gamma$.

Д. *В каждой точке $A \in \mathsf{T}\mathcal{X}$*

$$(d\mathsf{T}f)_A H_A^{\mathcal{X}} \subset H_B^{\mathcal{Y}}, \qquad B = (\mathsf{T}f)A.$$

Доказательство. Если поля $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \mathfrak{a}\mathcal{Y}$ f-связаны, то для любых f-связанных карт (U, h) и (V, k)

$$X^i \frac{\partial f^a}{\partial x^i} = \widehat{X}^a \circ f, \quad Y^i \frac{\partial f^a}{\partial x^i} = \widehat{Y}^a \circ f \qquad \text{на } U.$$

С другой стороны, если Γ^i_{kj} и $\widehat{\Gamma}^a_{cb}$ — коэффициенты связностей ∇ и $\widehat{\nabla}$ в этих картах, то

$$(\nabla_X Y)^i = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} Y^j\right) X^k,$$

$$(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \widehat{Y})^a = \left(\frac{\partial \widehat{Y}^a}{\partial y^c} + \widehat{\Gamma}^a_{cb} \widehat{Y}^b\right) \widehat{X}^c.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
(\widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \widehat{Y})^a \circ f &= \left(\left(\frac{\partial \widehat{Y}^a}{\partial y^c} \circ f\right) + (\widehat{\Gamma}^a_{cb} \circ f)(\widehat{Y}^b \circ f)\right)(\widehat{X}^c \circ f) = \\
&= \left(\left(\frac{\partial \widehat{Y}^a}{\partial y^c} \circ f\right) \frac{\partial f^c}{\partial x^k} + (\widehat{\Gamma}^a_{cb} \circ f) \frac{\partial f^b}{\partial x^j} Y^j \frac{\partial f^c}{\partial x^k}\right) X^k = \\
&= \left(\frac{\partial (\widehat{Y}^a \circ f)}{\partial x^k} + (\widehat{\Gamma}^a_{cb} \circ f) \frac{\partial f^b}{\partial x^j} \frac{\partial f^c}{\partial x^k} Y^j\right) X^k = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\left(Y^i \frac{\partial f^a}{\partial x^i}\right) + (\widehat{\Gamma}^a_{cb} \circ f) \frac{\partial f^b}{\partial x^j} \frac{\partial f^c}{\partial x^k} Y^j\right) X^k = \\
&= \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} \frac{\partial f^a}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^i \partial x^k} + (\widehat{\Gamma}^a_{cb} \circ f) \frac{\partial f^b}{\partial x^j} \frac{\partial f^c}{\partial x^k} Y^j\right) X^k = \\
&= (\nabla_X Y)^i \frac{\partial f^a}{\partial x^i} + \left(-\frac{\partial f^a}{\partial x^i} \Gamma^i_{kj} + \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^j \partial x^k} + (\widehat{\Gamma}^a_{cb} \circ f) \frac{\partial f^b}{\partial x^j} \frac{\partial f^c}{\partial x^k}\right) Y^j X^k.
\end{aligned}$$

Поскольку равенство $(\nabla_X Y)^i \dfrac{\partial f^a}{\partial x^i} = (\widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \widehat{Y})^a \circ f$ означает, что поля $\nabla_X Y$ и $\widehat{\nabla}_{\widehat{X}}\widehat{Y}$ f-связаны, а равенство

$$\frac{\partial f^a}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj} = \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^j \partial x^k} + (\widehat{\Gamma}^a_{cb} \circ f)\frac{\partial f^b}{\partial x^j}\frac{\partial f^c}{\partial x^k}$$

после умножения на dx^k переходит в равенство (2), это доказывает равносильность свойств **А** и **Б**.

Задача 1. Докажите равносильность свойств **Б**, **В** и **Г**.

Задача 2. Докажите равносильность свойств **Б** и **Д**. [Указание. В картах $(\mathsf{T}U, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ и $(\mathsf{T}V, y^1, \ldots, y^m, \dot{y}^1, \ldots, \dot{y}^m)$ (см. лекцию 1) якобиева матрица отображения $\mathsf{T}f$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} J_f & 0 \\ K_f & J_f \end{Vmatrix}, \qquad \text{где} \qquad K_f = \left\| \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^i \partial x^k}\dot{x}^k \right\|.$$

С другой стороны, подпространство $H^{\mathcal{X}}_A$ порождается векторами $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)_A - \Gamma^i_{kj}\dot{x}^j\left(\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right)_A$, а подпространство $H^{\mathcal{Y}}$ — векторами $\left(\dfrac{\partial}{\partial y^c}\right)_B - \Gamma^a_{cb}\dot{y}^b\left(\dfrac{\partial}{\partial \dot{y}^a}\right)_B$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant c \leqslant \leqslant n$.]

Это доказывает предложение 1. □

***Определение* 1**. Гладкое отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, обладающее свойствами **А** — **Д**, называется *аффинным отображением*.

Задача 3. Каждый интервал I оси $\mathbb{R}$ является пространством аффинной связности относительно тривиальной связности $\nabla_{\partial/\partial t} = \partial/\partial t$. Поэтому имеет смысл говорить о кривых $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, являющихся аффинными отображениями. Покажите, что это в точности геодезические пространства $\mathcal{X}$.

Ясно, что свойство отображения быть аффинным является локальным свойством, т. е. *отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ аффинно, если оно аффинно на некоторой окрестности любой точки $p \in \mathcal{X}$.*

Кроме того, из свойства **Г** аффинных отображений непосредственно вытекает, что *каждое аффинное отображение переводит геодезические в геодезические, и поэтому в нормальных координатах записывается линейными функциями.*

Этот факт лежит в основе доказательства следующего предложения.

Предложение 2 (О единственности аффинного отображения). *Пусть аффинные отображения $f, g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ совпадают в точке $p_0 \in \mathcal{X}$, и пусть в этой точке совпадают их дифференциалы:*

$$f(p_0) = g(p_0), \quad (df)_{p_0} = (dg)_{p_0}.$$

Тогда $f = g$ на компоненте многообразия $\mathcal{X}$, содержащей точку p_0.

Доказательство. Пусть

$$C = \{p \in \mathcal{X};\ f(p) = g(p),\ (df)_p = (dg)_p\}$$

— множество всех точек $p \in \mathcal{X}$, в которых отображения f и g совпадают вместе с их дифференциалами. Так как отображения f и g непрерывны (а многообразие $\mathcal{Y}$ хаусдорфово), то множество C замкнуто. С другой стороны, из того что каждое аффинное отображение в нормальных координатах записывается линейными функциями, непосредственно вытекает, что для любой точки $p \in C$ каждая ее нормальная окрестность содержится в C. Следовательно, множество C открыто. Являясь открыто-замкнутым множеством, содержащим точку p_0, множество C содержит компоненту $\mathcal{X}_0$ этой точки. Значит, $f = g$ на $\mathcal{X}_0$. □

Аффиннитеты Ясно, что композиция аффинных отображений является аффинным отображением, и, следовательно, все пространства аффинной связности и все их аффинные отображения составляют категорию (см. ниже лекцию 7). Изоморфизмами этой категории являются, как легко видеть, аффинные отображения, являющиеся диффеоморфизмами. Мы будем называть их *аффинными изоморфизмами* или *аффинными диффеоморфизмами* (а изоморфизмы $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ на себя — его *аффинными автоморфизмами*).

Аффинные диффеоморфизмы называются также *аффиннитетами*.

Для случая, когда f является диффеоморфизмом, условие (2) можно переписать в виде

$$\omega = J_f^{-1}(f^*\widehat{\omega})J_f + J_f^{-1}dJ_f. \qquad (2')$$

В частном случае, когда диффеоморфизм f действует по равенству координат (т. е. каждую точку $p \in U$ переводит в точку $q \in V$, имеющую в карте (V, k) те же координаты, что точка p в карте (U, h)), это условие приобретает вид $\omega = f^*\widehat{\omega}$, означающий, что $\widehat{\omega}$ переходит в ω при подстановке $y^i = x^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (формы ω и $\widehat{\omega}$ отличаются лишь обозначениями переменных).

Каждый диффеоморфизм $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ определяет по формуле

$$(f_*X)_q = (df)_p X_p, \quad p = f^{-1}(q),$$

биективное отображение $f_*\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{Y}$, обладающее тем свойством, что поля X и f_*X f-связаны. (Это в точности отображение $(f^{-1})^*$ из лекции III.17.) Поэтому (см. свойство А из предложения 1) *диффеоморфизм $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ тогда и только тогда является аффиннитетом, когда для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}\mathcal{X} & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{a}\mathcal{Y} \\ {\scriptstyle \nabla_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_{f_*X}} \\ \mathfrak{a}\mathcal{X} & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{a}\mathcal{Y} \end{array} \tag{5}$$

коммутативна.

Отсюда непосредственно следует, что *каждый аффиннитет сохраняет тензоры кручения и кривизны*, т. е., точнее, для любого аффиннитета $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ имеет место равенство

$$T^{\mathcal{X}} = f^*T^{\mathcal{Y}}, \quad R^{\mathcal{X}} = f^*R^{\mathcal{Y}}, \tag{6}$$

где $T^{\mathcal{X}}$, $R^{\mathcal{X}}$ — тензоры кручения и кривизны пространства $\mathcal{X}$, а $T^{\mathcal{Y}}$ и $R^{\mathcal{Y}}$ — тензоры кручения и кривизны пространства $\mathcal{Y}$. (Отображение f^* для тензорных полей определено в лекции III.17.)

Таким образом, равенства (6) н е о б х о д и м ы, чтобы диффеоморфизм $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ был аффиннитетом. Однако, вообще говоря, они недостаточны. (Заметим, что в некоторых учебниках и монографиях в этом месте допускается ошибка.) Мы рассмотрим этот вопрос в следующей лекции, а пока обратимся к накрытиям и подмногообразиям пространств аффинной связности.

Аффинные накрытия В отношении накрытий ситуация по-существу тривиальна.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное гладкое многообразие (без аффинной связности) и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — его этальное отображение на пространство аффинной связности $\mathcal{Y}$.

Задача 4. Покажите, что *на $\mathcal{X}$ существует единственная связность, по отношению к которой отображение f аффинно.* [Указание. Если $(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(V, y^1, \ldots, y^n)$ — такие карты многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, что $V = fU$ и f действует по равенству координат (т. е. $x^i = y^i \circ f$ для всех $i = 1, \ldots, n$), то формами связности $\nabla^{\mathcal{X}}$ на U будут формы $f^*\widehat{\omega}^i_j$, где $\widehat{\omega}^i_j$ — формы связности $\nabla^{\mathcal{Y}}$ на $\mathcal{Y}$ (выражения форм $f^*\widehat{\omega}^i_j$ и $\widehat{\omega}^i_j$ в координатах отличаются друг от друга лишь обозначениями переменных).]

В частности, мы видим, что *для любого гладкого накрывающего отображения $\pi\colon \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ существует на $\widetilde{\mathcal{X}}$ единственная связность, по отношению к которой отображение π аффинно.*

Гладкое накрытие $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$, проекция π которого является аффинным отображением, называется *аффинным накрытием.*

Если в гладком накрытии $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ пространством аффинной связности является многообразие $\widetilde{\mathcal{X}}$ то, вообще говоря, на многообразии $\mathcal{X}$ не существует связности, по отношению к которой это накрытие было бы аффинным. Разберем этот вопрос подробнее.

Пусть $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{X}}$ — группа автоморфизмов (скольжений) накрытия $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$. Напомним (см. лекцию IV.5), что эта группа дискретно и гладко действует на $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Задача 5. Покажите, что *для любого аффинного накрытия $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ группа $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{X}}$ состоит из аффинных автоморфизмов пространства $\widetilde{\mathcal{X}}$.*

Поэтому, для того чтобы на многообразии $\mathcal{X}$ можно было ввести связность, по отношению к которой накрытие $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ аффинно, необходимо, чтобы группа $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{X}}$ состояла из аффинных автоморфизмов.

Когда это необходимое условие достаточно?

Напомним (см. лекцию IV.5), что для любой группы Г, дискретно и гладко действующей на гладком многообразии $\widetilde{\mathcal{X}}$, тройка $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$, где $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}/\Gamma$ — пространство орбит, а π — каноническое отображение $\widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$, является гладким регулярным накрытием с $\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{X}} = \Gamma$, и любое регулярное накрытие изоморфно накрытию такого вида.

Задача 6. Покажите, что *для любой группы* Г *аффинных автоморфизмов, дискретно действующей на пространстве аффинной связности* $\widetilde{\mathcal{X}}$, *на многообразии* $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}/\Gamma$ *существует единственная аффинная связность, по отношению к которой накрытие* $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ *аффинно.*

Ср. предложение 3 лекции IV.5.

Таким образом, мы видим, что справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Если в гладком регулярном накрытии* $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ *многообразие* $\widetilde{\mathcal{X}}$ *является пространством аффинной связности, то на* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда существует аффинная связность, по отношению к которой это накрытие аффинно, когда группа* $\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{X}}$ *состоит из аффинных автоморфизмов пространства* $\widetilde{\mathcal{X}}$. □

В дальнейшем нам понадобится также следующее простое — по существу, очевидное — предложение.

Предложение 4. *В аффинном накрытии* $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ *пространство* $\widetilde{\mathcal{X}}$ *тогда и только тогда геодезически полно, когда геодезически полно пространство* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть пространство $\mathcal{X}$ геодезически полно, и пусть

$$\widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{X}}, \quad \widetilde{A} \in \mathsf{T}_{\widetilde{p}}\widetilde{\mathcal{X}}, \quad p = \pi(\widetilde{p}), \quad A = (d\pi)_{\widetilde{p}}\widetilde{A}.$$

Рассмотрим геодезическую $\gamma\colon t \mapsto \exp_p tA$. По условию эта геодезическая определена для всех $t \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 1 лекции IV.2 (или, точнее, согласно ее варианту, относящемуся к кривым вида $\mathbb{R} \to \mathcal{X}$ и очевидным образом вытекающему из теоремы 1 лекции IV.2), в многообразии $\widetilde{\mathcal{X}}$ существует такая кривая $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \widetilde{\mathcal{X}}$, что $\pi\circ\widetilde{\gamma} = \gamma$ и $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{p}$.

Но тогда $(d\pi)_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) = \dot{\gamma}(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и, в частности, $(d\pi)_{\tilde{p}}(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) = \dot{\gamma}(0) = A = (d\pi)_{\tilde{p}}(\widetilde{A})$. Значит, $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \widetilde{A}$. Кроме того, так как отображение π аффинно, то кривая $\tilde{\gamma}$ локально (а потому и глобально) является геодезической. Этим доказано, что для любой точки $\tilde{p} \in \widetilde{X}$ и любого вектора $\widetilde{A} \in \mathsf{T}_{\tilde{p}}\widetilde{\mathcal{X}}$ максимальная геодезическая пространства $\widetilde{\mathcal{X}}$, проходящая при $t = 0$ через точку $\tilde{p}$ и имеющая в этой точке касательный вектор $\widetilde{A}$, определена для всех t. Значит, пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$ геодезически полно.

Обратное утверждение доказывается еще проще. Пусть пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$ геодезически полно, и пусть $p \in \mathcal{X}$, $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$. Поскольку отображения π и $(d\pi)_{\tilde{p}}$ надъективны, существуют такая точка $\tilde{p} \in \widetilde{X}$ и такой вектор $\widetilde{A} \in \mathsf{T}_{\tilde{p}}\widetilde{\mathcal{X}}$, что $p = \pi(\tilde{p})$, $A = (d\pi)_{\tilde{p}}\widetilde{A}$, а так как отображение π аффинно, то кривая $\pi \circ \gamma_{\tilde{p},\widetilde{A}}$, проходящая при $t = 0$ через точку p, имеющая в этой точке касательный вектор A и определенная для всех $t \in \mathbb{R}$, является геодезической. Следовательно, пространство $\mathcal{X}$ геодезически полно. $\square$

Ограничение связности на подмногообразие

Обратимся теперь к вложенным подмногообразиям, т. е. — собственно говоря — к инъективным и монеоморфным погружениям $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Впрочем, так как любое погружение $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ локально (в окрестности каждой точки $p_0 \in \mathcal{X}$) инъективно и монеоморфно, то все наши результаты локального характера будут применимы к любым погружениям $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, т. е. — как принято несколько неточно говорить — к любым *погруженным подмногообразиям* $\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{Y}$. Наглядно это означает, что мы допускаем у $\mathcal{X}$ *самопересечения* (возможно, многократные); поэтому такие $\mathcal{X}$ называются также *подмногообразиями с самопересечениями*. (Заметим, что это понятие погруженного подмногообразия отличается от понятия погруженного подмногообразия в смысле определений 2, 3 лекции III.13. К сожалению, оба употребления этого термина одинаково распространены. Когда нужно будет провести различие, мы будем говорить о погруженных подмногообразиях с самопересечениями или без самопересечений.)

Рассмотрим сначала вопрос в общем виде для связностей в расслоениях.

Пусть $\mathcal{Y}$ — произвольное гладкое многообразие, $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{Y})$ — гладкое векторное расслоение над $\mathcal{Y}$ и ∇ — связность на ξ. Тогда для любого подмногообразия $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ определено расслоение

$$\xi|_{\mathcal{X}} = (\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \pi_{\mathcal{X}}, \mathcal{X}),$$

где $\mathcal{E}_{\mathcal{X}} = \pi^{-1}\mathcal{X}$ и $\pi_{\mathcal{X}} = \pi|_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}}$, называемое *ограничением* расслоения ξ на $\mathcal{X}$.

Заметим, что поскольку отображение π представляет собой субмерсию, *подпространство $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ является вложенным подмногообразием многообразия $\mathcal{E}$.*

Задача 7. Докажите, что

а. *Расслоение $\xi|_{\mathcal{X}}$ является гладким векторным расслоением.* [Указание. Над каждой точкой $b \in \mathcal{X}$ слоем $\pi_{\mathcal{X}}^{-1}(b)$ расслоения $\xi|_{\mathcal{X}}$ является слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ расслоения ξ.]

б. *Расслоение $\xi|_{\mathcal{X}}$ изоморфно расслоению $\iota^*\xi$, где $\iota\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — вложение* (см. лекцию IV.10).

В каждой точке $p \in \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ касательное пространство $\mathsf{T}_p\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ является подпространством касательного пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{E}$, содержащим вертикальное подпространство $\mathsf{T}_p\mathcal{F}_b$, $b = \pi(p)$. Отсюда следует (докажите!), что если H_p — горизонтальные подпространства связности ∇, то подпространства

$$H'_p = H_p \cap \mathsf{T}_p\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \qquad p \in \mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \tag{7}$$

составляют связность на $\xi|_{\mathcal{X}}$. Эта связность обозначается символом $\nabla|_{\mathcal{X}}$ и называется *ограничением на $\mathcal{X}$* связности ∇.

Задача 8. Покажите, что $\nabla|_{\mathcal{X}} = \iota^*\nabla$, где $\iota\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — вложение (см. лекцию IV.10).

Пусть $(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(V, y^1, \ldots, y^m)$ — такие карты многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, что $U = V \cap \mathcal{X}$ и

$$y^1|_V = x^1, \ldots, y^n|_V = x^n, y^{n+1}|_V = 0, \ldots, y^m|_V = 0 \tag{8}$$

(см. лекцию III.13; таким образом, $n = \dim \mathcal{X}$ и $m = \dim \mathcal{Y}$). Пусть, кроме того, расслоение ξ тривиализируется над окрестностью V и, значит, определены формы $\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i\, dx^k$

связности ∇. Тогда расслоение $\xi|_{\mathcal{X}}$ тривиализируется над U и формами связности $\nabla|_{\mathcal{X}}$ будут ограничения $\iota^*\omega^i_j = \omega^i_j|_U$ форм ω^i_j на U. В частности, коэффициентами связности $\nabla|_{\mathcal{X}}$ над U будут ограничения $\Gamma^i_{kj}|_U$ коэффициентов Γ^i_{kj} связности ∇ с индексами $k = 1,\dots,n$ (коэффициенты Γ^i_{kj} с $k = n+1,\dots,m$ к связности $\nabla|_{\mathcal{X}}$ отношения ие имеют).

Операция ограничения сечений $s \mapsto s|_U$ определяет гомоморфизм $\Gamma(\xi, V) \to \Gamma(\xi|_{\mathcal{X}}, U)$ модулей сечений, согласованный с гомоморфизмом ограничения $\mathsf{F}V \to \mathsf{F}U$, т. е. такой, что

$$(fs)|_U = (f|_U)(s|_U)$$

для любого сечения $s \in \Gamma(\xi, V)$ и любой функции $f \in \mathsf{F}V$. Этот гомоморфизм переводит базис $\{s_i\}$ $\mathsf{F}V$-модуля $\Gamma(\xi, V)$ в базис $\{s_i|_U\}$ $\mathsf{F}U$-модуля $\Gamma(\xi|_{\mathcal{X}}, U)$, и потому *является эпиморфизмом*. (Действительно, если $s \in \Gamma(\xi|_{\mathcal{X}}, U)$ и $s = s^i s_i|_U$, где $s^i = s^i(x^1,\dots,x^n)$ на U, то $s = s'|_U$, где $s' = s^i(y^1,\dots,y^n)s_i$ на V.)

В частности, это верно для расслоения $\tau_{\mathcal{Y}}$ и, значит, каждое векторное поле X на U является ограничением некоторого векторного поля X' на V. При этом, так как для любой функции f на V имеют место равенства

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y^k}\right|_U = \frac{\partial (f|_U)}{\partial x^k}, \qquad k = 1,\dots,n,$$

то, как показывает очевидное вычисление (мы снова возвращаемся к сечениям произвольного расслоения ξ),

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X\, s = \nabla_{X'}\, s'|_U \tag{9}$$

для любого сечения $s \in \Gamma(\xi|_{\mathcal{X}}, U)$ (где, как и выше, s' — такое сечение расслоения ξ над V, что $s'|_U = s$).

При желании формулу (9) можно принять за определение связности $\nabla|_{\mathcal{X}}$. (Конечно, тогда надо доказывать его корректность.)

В дальнейшем мы будем, как правило, вместо s' и X' писать просто s и X, а вместо $|_U$ будем писать $|_{\mathcal{X}}$. В этих двусмысленных, но удобных обозначениях формула (9) приобретает вид

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X\, s = (\nabla_X\, s)|_{\mathcal{X}}. \tag{9'}$$

Надо помнить, что слева s и X определены над U, а справа над V.

Задача 9. Покажите, что *любое сечение s (в частности, любое векторное поле X) над $\mathcal{X}$ является ограничением некоторого сечения s' (векторного поля X') над $\mathcal{Y}$.* [Указание. Сечение s' можно построить в окрестности любой точки $p \in \mathcal{X}$. Эти локальные продолжения склеиваются в одно с помощью разбиения единицы; см. лекцию III.22.]

Индуцированная связность на нормализованном подмногообразии

Конечно, все это автоматически применимо к случаю, когда ξ является касательным расслоением $\tau_{\mathcal{Y}}$ (и, значит, ∇ — связностью на $\mathcal{Y}$). В частности, формула (9′) приобретает в этом случае вид

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y = (\nabla_X Y)|_{\mathcal{X}}, \tag{9''}$$

где слева X и Y — векторные поля, определенные на $\mathcal{X}$ (или на U), а справа — их продолжения на $\mathcal{Y}$ (на V).

Однако, в этом случае ограничение $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$ не будет касательным расслоением $\tau_{\mathcal{X}}$ (и, значит, связность $\nabla|_{\mathcal{X}}$ не будет связностью на $\mathcal{X}$, а Y и $(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y$ — векторными полями на $\mathcal{X}$). Можно лишь утверждать, что для любой точки $p \in \mathcal{X}$ слой $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ будет подпространством слоя $\mathsf{T}_p\mathcal{Y}$ расслоения $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$, т. е. что расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ является *подрасслоением* расслоения $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$.

Задача 10. Покажите, что

а. *На произвольном (паракомпактном и хаусдорфовом) многообразии $\mathcal{X}$ для любого подрасслоения η векторного расслоения ξ существует такое подрасслоение ζ, что*

$$\xi = \eta \oplus \zeta \tag{10}$$

(*т. е.* $\mathcal{F}_p^{\xi} = \mathcal{F}_p^{\eta} \oplus \mathcal{F}_p^{\zeta}$ *для любой точки* $p \in \mathcal{X}$). [Указание. Введя в ξ метрику (см. предложение 3 лекции IV.7), положите $\mathcal{F}_p^{\zeta} = (\mathcal{F}_p^{\eta})^{\perp}$.]

б. *Все такие подрасслоения ζ изоморфны.* [Указание. Определите *факторрасслоение* ξ/η и покажите, что оно изоморфно расслоению ζ.]

В частности, отсюда следует, что в расслоении $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$ существует — с точностью до изоморфизма единственное — подрасслоение ν, для которого

$$\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}} = \tau_{\mathcal{X}} \oplus \nu. \tag{11}$$

Определение 2. Каждое подрасслоение ν, удовлетворяющее соотношению (11), называется *нормальным* (или, точнее, *аффинно нормальным*) **расслоением** над подмногообразием $\mathcal{X}$ в многообразии $\mathcal{Y}$. Его слой $\mathcal{F}_p^\nu$ над точкой $p \in \mathcal{X}$ называется *нормальным пространством* подмногообразия $\mathcal{X}$ в точке p и обозначается символом $\mathsf{N}_p\mathcal{X}$.

Таким образом,

$$\mathsf{T}_p\mathcal{Y} = \mathsf{T}_p\mathcal{X} + \mathsf{N}_p\mathcal{X}$$

для любой точки $p \in \mathcal{X}$.

Ранг $m - n$ расслоения ν называется *коразмерностью* подмногообразия $\mathcal{X}$.

Подмногообразие $\mathcal{X}$, для которого выбрано и зафиксировано некоторое нормальное расслоение ν называется *нормализованным*. Сечения расслоения ν называются *полями нормальных векторов* на $\mathcal{X}$. (Такие поля называют также *нормальными векторными полями на* $\mathcal{X}$, хотя, строго говоря, векторными полями на $\mathcal{X}$ они не являются.)

Каждое разложение (10) очевидным образом определяет морфизм $\xi \mapsto \eta$, ядром которого (в понятном смысле) является расслоение ζ. (Заметим, что отнюдь не любой морфизм векторных расслоений обладает ядром.) Этот морфизм для разложения (11) называется *нормализующим морфизмом*. Он однозначно определяется нормальным расслоением ν и, наоборот, однозначно его определяет.

По построению нормализующий морфизм P является отображением гладкого многообразия $\mathcal{E}_\mathcal{X} = \mathcal{E}(\tau_\mathcal{Y}|_\mathcal{X})$ на многообразие $\mathcal{E}(\tau_\mathcal{X}) = \mathsf{T}\mathcal{X}$. Легко видеть (докажите!), что *это отображение гладко*. Поэтому в любой точке $A \in \mathcal{E}_\mathcal{X}$ (являющейся касательным вектором к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке $p = \pi(A)$ подмногообразия $\mathcal{X}$) определен его дифференциал $(dP)_A$, представляющий собой линейное отображение линейного пространства $\mathsf{T}_A\mathcal{E}_\mathcal{X}$ на линейное пространство $\mathsf{T}_B(\mathsf{T}\mathcal{X})$, где $B = P(A)$ — касательный вектор к подмногообразию $\mathcal{X}$ в точке p. Но в линейном пространстве $\mathsf{T}_A\mathcal{E}_\mathcal{X}$ у нас выделено линейное подпространство H_A, состоящее из векторов, горизонтальных по отношению к связности ∇. Поэтому в пространстве $\mathsf{T}_B(\mathsf{T}\mathcal{X})$ у нас возникает подпространство $(dP)_A H_A$.

Задача 11. Покажите, что

а. *Подпространство* $(dP)_A H_A$ *зависит только от точки* $B \in \mathsf{T}\mathcal{X}$.

6. *Поле подпространств*
$$B \mapsto (dP)_A H_A \tag{12}$$
на $\mathsf{T}\mathcal{X}$ *является связностью на* $\mathcal{X}$.

Мы будем обозначать связность (12) символом $\nabla^{\mathcal{X}}$ и будем говорить, что эта связность *индуцирована* на $\mathcal{X}$ связностью $\nabla = \nabla^{\mathcal{Y}}$ на $\mathcal{Y}$.

Подчеркнем, что индуцированная связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ определена только для нормализованных подмногообразий. При изменении нормализации (нормального расслоения) она, вообще говоря, меняется.

Формула Гаусса и вторая основная форма нормализованного подмногообразия

Для любого векторного поля X на $\mathcal{X}$ и любого сечения s расслоения $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$ значение $[(\nabla|_{\mathcal{X}})_X\, s]_p$ ковариантной производной $(\nabla|_{\mathcal{X}})_X\, s$ в точке $p \in \mathcal{X}$ является вектором пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{Y}$. Спроектировав его на подпространство $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ вдоль подпространства $\mathsf{N}_p\mathcal{X}$ (т. е. применив линейное отображение P_p), мы получим в $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ вектор $P_p[(\nabla|_{\mathcal{X}})_X\, s]_p$.

Эта конструкция применима, в частности, когда сечение s принимает значения в $\mathsf{T}\mathcal{X} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$, т. е. когда это сечение является векторным полем Y на $\mathcal{X}$.

С другой стороны, в этом случае в пространстве $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ определен вектор $(\nabla^{\mathcal{X}}_X Y)_p$, являющийся значением в точке p ковариантной производной $\nabla^{\mathcal{X}}_X Y$.

З а д а ч а 12. Покажите, что
$$(\nabla^{\mathcal{X}}_X Y)_p = P_p[(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y]_p \tag{13}$$
для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любых векторных полей X, Y на $\mathcal{X}$.

Формулу (13) можно принять за о п р е д е л е н и е связности $\nabla^{\mathcal{X}}$. Ее можно переписать в виде
$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y = \nabla^{\mathcal{X}}_X Y + h(X, Y), \tag{14}$$
где $h(X, Y)$ — некоторое нормальное векторное поле на $\mathcal{X}$. В этом виде она называется ф о р м у л о й Г а у с с а.

Легко видеть, что *поле* $h(X, Y)$ *линейно* (*над* $\mathsf{F}\mathcal{X}$) *зависит от полей* X *и* Y, т. е. соответствие $X, Y \mapsto h(X, Y)$ представляет собой $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейное отображение
$$\mathfrak{a}\mathcal{X} \otimes \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \Gamma\nu.$$

Действительно, $\mathbb{R}$-линейность по Y и $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейность по X следует из соответствующих свойств ковариантных производных. Кроме того, для любой функции f на $\mathcal{X}$

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot (\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y$$

и

$$\nabla_X^{\mathcal{X}}(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X^{\mathcal{X}} Y.$$

Поэтому

$$h(X, fY) = (\nabla|_{\mathcal{X}})_X(fY) - \nabla_X^{\mathcal{X}}(fY) = \\ = f[(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y - \nabla_X^{\mathcal{X}} Y] = fh(X, Y). \square$$

Вариант формулы (14) имеет место и для векторных полей на кривых.

Задача 13. Для любого векторного поля $X\colon t \mapsto X_t$ на кривой $\gamma\colon t \mapsto \gamma(t)$ многообразия $\mathcal{X}$ определены его ковариантные производные $\dfrac{\nabla^{\mathcal{X}} X}{dt}$ и $\dfrac{\nabla^{\mathcal{Y}} X}{dt}$ вдоль γ относительно связностей $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$ (соответственно в $\mathcal{X}$ и в $\mathcal{Y}$). Покажите, что

$$\frac{\nabla^{\mathcal{Y}} X}{dt} = \frac{\nabla^{\mathcal{X}} X}{dt} + h(\dot\gamma, X) \tag{14'}$$

В частности,

$$\frac{\nabla^{\mathcal{Y}} \dot\gamma}{dt} = \frac{\nabla^{\mathcal{X}} \dot\gamma}{dt} + h(\dot\gamma, \dot\gamma). \tag{14''}$$

для каждой кривой γ на $\mathcal{X}$.

Для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ мы положим

$$h_p(A, B) = h(X, Y)(p),$$

где X и Y — произвольные векторные поля на $\mathcal{X}$, для которых $X_p = A$, $Y_p = B$ (см. следствие 1 леммы 2 лекции III.18).

Задача 14. Докажите, что *эта конструкция корректно определяет на $\mathcal{X}$ гладкое поле $p \mapsto h_p$*, т. е. что вектор $h_p(A, B)$ не зависит от выбора векторных полей X и Y.

Это поле по традиции называется *второй основной формой* (или *вторым основным тензором*) нормализованного подмногообразия $\mathcal{X}$.

Если связность $\nabla = \nabla^{\mathcal{Y}}$ симметрична, т. е.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

для любых полей X и Y на $\mathcal{Y}$, то

$$(\nabla_X Y)|_{\mathcal{X}} - (\nabla_Y X)|_{\mathcal{X}} = [X, Y]|_{\mathcal{X}},$$

и, значит (см. формулу (9″)),

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y - (\nabla|_{\mathcal{X}})_Y X = [X, Y]$$

для любых полей X и Y на $\mathcal{X}$. Применив формулу (14) и приравняв касательные компоненты, мы немедленно получим отсюда, что

$$\nabla^{\mathcal{X}}_X Y - \nabla^{\mathcal{X}}_Y X = [X, Y],$$

т. е. что связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ симметрична. Приравняв же нормальные компоненты, мы получим, что

$$h(X, Y) = h(Y, X).$$

Таким образом, *если связность $\nabla^{\mathcal{Y}}$ симметрична, то связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ также симметрична, а вторая основная форма $h(X, Y)$ симметрична по X и Y.*

Вполне геодезические и автопараллельные подмногообразия

Легко видеть, что *каждая лежащая в $\mathcal{X}$ геодезическая γ многообразия $\mathcal{Y}$ (относительно связности $\nabla^{\mathcal{Y}}$) является и геодезической подмногообразия $\mathcal{X}$ (относительно связности $\nabla^{\mathcal{X}}$).* [Действительно, если равна нулю левая часть формулы (14″), то, будучи друг другу ортогональными, равны нулю и оба слагаемых левой части.] Обратное, вообще говоря, неверно: геодезическая подмногообразия $\mathcal{X}$ может и не быть геодезической во всем многообразии $\mathcal{Y}$ (для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $h(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0$.)

Определение 3. Нормализованное подмногообразие $\mathcal{X}$ называется *вполне геодезическим*, если каждая его геодезическая γ (относительно связности $\nabla^{\mathcal{X}}$) является геодезической и всего многообразия $\mathcal{Y}$ (относительно связности $\nabla^{\mathcal{Y}}$).

Предложение 5. *Нормализованное подмногообразие $\mathcal{X}$ тогда и только тогда является вполне геодезическим подмногообразием пространства $\mathcal{Y}$ с симметрической аффинной связностью, когда его вторая* *основная форма h тождественно равна нулю:*

$$h(X, Y) = 0 \tag{15}$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Доказательство. Если условие (15) выполнено, то в силу формулы (14″)

$$\frac{\nabla^{\mathcal{Y}}}{dt}\dot\gamma(t) = \frac{\nabla^{\mathcal{X}}}{dt}\dot\gamma(t)$$

для любой кривой γ: $t \mapsto \gamma(t)$ на $\mathcal{X}$ (где слева кривая γ рассматривается как кривая в $\mathcal{Y}$). Поэтому если кривая γ является геодезической в $\mathcal{X}$, то она будет геодезической и в $\mathcal{Y}$.

Обратно, пусть подмногообразие $\mathcal{X}$ вполне геодезическое. Тогда для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любого вектора $A \in \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ геодезическая $\gamma_{p,A}$ в $\mathcal{X}$ (т. е. такая геодезическая γ, что $\gamma(0) = p$ и $\dot\gamma(0) = A$) будет геодезической $\gamma_{p,A}$ и в $\mathcal{Y}$. Так как геодезическая γ регулярна, то на $\mathcal{X}$ существует такое векторное поле X, что $X_{\gamma(t)} = \dot\gamma(t)$ для всех достаточно малых $|t|$. Поэтому (см. задачу 2 лекции IV.11) на $\mathcal{X}$ в точке p будет иметь место равенство

$$(\nabla^{\mathcal{X}}_X X)_p = \frac{\nabla^{\mathcal{X}}\dot\gamma}{dt}(0) = 0,$$

а на $\mathcal{Y}$ — равенство

$$(\nabla^{\mathcal{Y}}_X X)_p = \frac{\nabla^{\mathcal{Y}}\dot\gamma}{dt}(0) = 0$$

(где, конечно, под X подразумевается его распространение X' на $\mathcal{Y}$). Следовательно, $h_p(A, A) = h(X, X)(p) = 0$.

Так как это верно для любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и любой точки $p \in \mathcal{X}$, то $h(X, X) = 0$ для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, что для симметрической формы h возможно только при $h = 0$. □

Определение 4. Подмногообразие $\mathcal{X}$ пространства аффинной связности $\mathcal{Y}$ называется *автопараллельным*, если для любых двух точек $p_0, p_1 \in \mathcal{X}$ и любой кривой γ в $\mathcal{X}$, соединяющей эти точки, параллельный перенос

$$\Pi_\gamma\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{Y} \to \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{Y}$$

вдоль γ отображает подпространство $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \subset \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{Y}$ на подпространство $\mathsf{T}_{p_1}\mathcal{X} \subset \mathsf{T}_{p_1}\mathcal{Y}$ (т. е. вектор, касательный к $\mathcal{X}$, остается касательным).

Задача 15. Докажите, что *подмногообразие $\mathcal{X}$ тогда и только тогда автопараллельно, когда для любых двух векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и любой точки $p \in \mathcal{X}$ вектор $[(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y]_p$ принадлежит $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$.*

Отсюда следует, что для автопараллельного подмногообразия $\mathcal{X}$ формула

$$(\nabla_X^{\mathcal{X}} Y)_p = [(\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y]_p, \qquad p \in \mathcal{X}, \quad X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X},$$

определят на $\mathcal{X}$ некоторую связность $\nabla^{\mathcal{X}}$. Эта связность совпадает со связностью (13), отвечающей произвольной нормализации многообразия $\mathcal{X}$ (и, значит, не зависит от ее выбора).

Задача 16. Покажите, что *любое автопараллельное подмногообразие вполне геодезично* и, обратно, *если связность $\nabla^{\mathcal{Y}}$ симметрична, то любое вполне геодезическое подмногообразие автопараллельно.*

В частности, мы видим, что *связность, индуцированная симметричной связностью на вполне геодезическом многообразии, не зависит от выбора нормализации.*

Нормальная связность и формула Вейнгартена

Пусть теперь s — произвольное нормальное векторное поле на $\mathcal{X}$ (сечение расслоения ν). Поскольку s автоматически является сечением расслоения $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$, то для любого векторного поля X на $\mathcal{X}$ определено сечение $(\nabla|_{\mathcal{X}})_X s$ последнего расслоения. Разложив его на касательную и нормальную компоненты, мы получим формулу вида

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X s = -A_s X + D_X s, \tag{16}$$

где $A_s X$ — векторное касательное, а $D_X s$ — векторное нормальное поле на $\mathcal{X}$.

Формула (16) называется **формулой Вейнгартена**.

Согласно формуле (16) каждое касательное векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ определяет отображение D_X: $s \mapsto D_X s$ модуля Γ_ν в себя, а каждое нормальное векторное поле $s \in \Gamma_\nu$ — отображение $X \mapsto A_s X$ модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X} = \Gamma(\tau_\mathcal{X})$ в себя.

Поля $A_s X$ и $D_X s$, очевидно, $\mathbb{R}$-линейно зависят от s и $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейно от X. Более того, так как для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$

$$-A_{fs}X + D_X(fs) = (\nabla|_\mathcal{X})_X(fs) =$$
$$= Xf \cdot s + f \cdot (\nabla|_\mathcal{X})_X s = -fA_s X + [Xf \cdot s + fD_X s],$$

то

$$A_{fs}X = fA_s X \quad \text{и} \quad D_X(fs) = (Xf)s + fD_X s.$$

Следовательно, поле $A_s X$ на самом деле $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейно зависит от s, а операторы D_X обладают свойствами а, б, в из лекции 1 (см. также предложение 2 лекции IV.11) и, значит (см. теорему 1 лекции IV.11), являются операторами ковариантного дифференцирования относительно некоторой связности D на ν.

Связность D называется *нормальной связностью* на $\mathcal{X}$, индуцированной связностью ∇. (Заметим, что подобно тому как нормальные векторные поля на $\mathcal{X}$ не являются векторными полями на $\mathcal{X}$, нормальная связность на $\mathcal{X}$ не является, собственно говоря, связностью на $\mathcal{X}$.)

Связность ван дер Вардена — Бортолотти

Связности $\nabla^\mathcal{X}$ и D можно объединить в одну. Любые две связности ∇_1 и ∇_2 в векторных расслоениях ξ_1 и ξ_2 (над одним и тем же многообразием $\mathcal{X}$) естественным образом определяют связность $\nabla_1 \oplus \nabla_2$ в сумме Уитни $\xi_1 \oplus \xi_2$ этих расслоений. В частности, на векторном расслоении $\tau_\mathcal{Y}|_\mathcal{X} = \tau_\mathcal{X} \oplus \nu$ (см. формулу (11)) определена связность

$$\overline{\nabla} = \nabla^\mathcal{X} \oplus D. \tag{17}$$

Связность (17) называется *связностью ван дер Вардена — Бортолотти.*

Сечения расслоений вида

$$\tau_\mathcal{X}^* \otimes \ldots \otimes \tau_\mathcal{X}^* \otimes \nu^* \otimes \ldots \otimes \nu^* \otimes \tau_\mathcal{X} \otimes \ldots \otimes \tau_\mathcal{X} \otimes \nu \otimes \ldots \otimes \nu \tag{18}$$

называются *смешанными* (τ, ν)*-тензорными полями* на $\mathcal{X}$. Так как (см. замечание 3 лекции IV.12) $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$-тензорные поля (данного типа (r, s)) представляют собой не что иное, как сечения расслоения

$$\mathsf{T}_r^s\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}} = \mathsf{T}_r^s(\tau_{\mathcal{X}} \oplus \nu) =$$
$$= \underbrace{(\tau_{\mathcal{X}} \oplus \nu)^* \otimes \ldots \otimes (\tau_{\mathcal{X}} \oplus \nu)^*}_{r} \otimes \underbrace{(\tau_{\mathcal{X}} \oplus \nu) \otimes \ldots \otimes (\tau_{\mathcal{X}} \oplus \nu)}_{s},$$

являющегося прямой суммой расслоений вида (18), то *любое $\tau_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$-тензорное поле единственным образом разлагается в сумму смешанных (τ, ν)-тензорных полей*, и, значит, ковариантные дифференцирования, отвечающие связности (17), однозначно определяются их действиями на смешанных полях.

Примером смешанного поля является (в силу очевидных идентификаций) вторая основная форма или, вообще, произвольное $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейное отображение

$$h\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \otimes \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \Gamma\nu. \qquad (19)$$

Поэтому для любого такого поля h и любого векторного поля $X \in \mathcal{X}$ определено поле $\overline{\nabla}_X h$ (также являющееся отображением вида (19)).

Задача 17. Докажите, что

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = D_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \qquad (20)$$

для любых векторных полей X, Y, Z на $\mathcal{X}$ (где $\nabla = \nabla^{\mathcal{X}}$).

Задача 18. Докажите аналогичную формулу для смешанных (τ, ν)-тензорных полей и запишите ее в координатах.

Связность (17) позволяет ввести в рассмотрение целый ряд интересных классов подмногообразий. Например, можно рассматривать нормализованные подмногообразия с ковариантно постоянной (по отношению к связности (17)) второй основной формой, т. е. — см. формулу (20) — такие, что

$$D_X h(Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z)$$

для любых векторных полей X, Y, Z на $\mathcal{X}$, или нормализованные подмногообразия с ковариантно постоянным (в том же смысле) тензором кривизны связности (17) и т. д. и т. п.